EXERCICES • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 15 — Géométrie dans l'espace

1 Parallélisme

Exercice 1

Soit $ABCDEF$ un prisme droit à base triangulaire (ABC et DEF sont les bases, $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ les arêtes latérales). I et J sont les milieux respectifs de $[CF]$ et $[BE]$.

1) Montrer que $(IJ)\parallel(BC)$.

2) Construire la droite Δ intersection des plans (DIJ) et (DEF) et montrer que $\Delta\parallel(BC)$.

Exercice 2

$ABCD$ est un tétraèdre ; I, J, K, M, N, L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$, $[BD]$, $[CD]$.

1) Montrer que $(MI)\parallel(KL)$ et $MI=KL$. En déduire la nature de $MLKI$.

2) Montrer de même que $IJLN$ est un parallélogramme. En déduire que les segments $[KM]$, $[IL]$ et $[JN]$ ont le même milieu.

Exercice 3

$OABCD$ est une pyramide de sommet O dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. I, J, K sont les milieux de $[OC]$, $[OD]$, $[OA]$.

1) Montrer que $(IJ)\parallel(AB)$ et en déduire que $(IJ)\parallel(OAB)$.

2) Montrer que le plan (IJK) est parallèle à $(ABCD)$.

3) Montrer que (IJK) coupe $[OB]$ en son milieu L et que $IJKL$ est un parallélogramme.

2 Orthogonalité

Exercice 4

$SABCD$ est une pyramide régulière de sommet S, de base le carré $ABCD$ de centre O, dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux.

1) Montrer que (SBD) est le plan médiateur de $[AC]$.

2) En déduire que les droites (AC) et (SB) sont orthogonales.

3) Calculer SA^2+SC^2 et AC^2 (côté a). En déduire que (AS) et (CS) sont perpendiculaires.

Exercice 5

$ABCDEFGH$ est un cube ($ABCD$ et $EFGH$ faces opposées, $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ arêtes).

1) Montrer que $(EG)\parallel(AC)$ et que $(EG)\parallel(ABC)$.

2) Montrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.

3) Montrer que $(AC)\perp(BDF)$; en déduire que (AC) et (BH) sont orthogonales.

Exercice 6

$ABCD$ est un tétraèdre. Soit I un point de $[AB]$ distinct de A et B. Le plan P passant par I et parallèle à (BCD) coupe (AC) en J et (AD) en K.

1) Montrer que $(IJ)\parallel(BC)$ et $(JK)\parallel(CD)$.

2) On pose $\dfrac{AI}{AB}=t$. Montrer que $\dfrac{AJ}{AC}=\dfrac{AK}{AD}=t$ et que le triangle IJK est une réduction de BCD de rapport t.

Exercice 7

Dans un plan P, OAB est un triangle isocèle de sommet O et I est le milieu de $[AB]$. Sur la perpendiculaire Δ au plan P en B, on marque un point C distinct de B.

1) Montrer que (OI) est perpendiculaire au plan (ABC).

2) En déduire que (OI) et (AC) sont orthogonales.

3) Soit $[OK]$ la hauteur issue de O du triangle AOC. Montrer que $(AC)\perp(OIK)$, puis que le triangle AKI est rectangle en K.

Exercice 8

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1. On cherche les points M de la diagonale $[HB]$ tels que $(MA)\perp(MC)$. On pose $BM=x$.

1) Montrer que le triangle HAB est rectangle en A et calculer $\cos\widehat{ABH}$.

2) Exprimer MA^2 et MC^2 en fonction de x (Al-Kashi).

3) Conclure.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Deux droites sans point commun sont parallèles.	☐	☐
2. Deux droites orthogonales peuvent ne pas être sécantes.	☐	☐
3. Une droite orthogonale à deux droites parallèles d'un plan est perpendiculaire à ce plan.	☐	☐
4. Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.	☐	☐