COURS • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 15 — Géométrie dans l'espace

◆ **Sommaire**

- 1. Règles d'incidence
- 2. Positions relatives de droites et de plans
- 3. Parallélisme dans l'espace
- 4. Orthogonalité dans l'espace
- 5. Solides usuels : volumes et aires
- 6. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Utiliser les règles d'incidence pour déterminer l'intersection de droites et de plans.
- Étudier les positions relatives de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
- Utiliser les théorèmes de parallélisme et d'orthogonalité ; calculer des aires et des volumes.

1 Règles d'incidence

◆ **Propriété — axiomes**

- Par deux points distincts passe une seule droite.
- Par trois points non alignés passe un seul plan.
- Si un plan contient deux points distincts d'une droite, il contient toute cette droite.
- Si deux plans distincts ont un point commun, leur intersection est une droite.

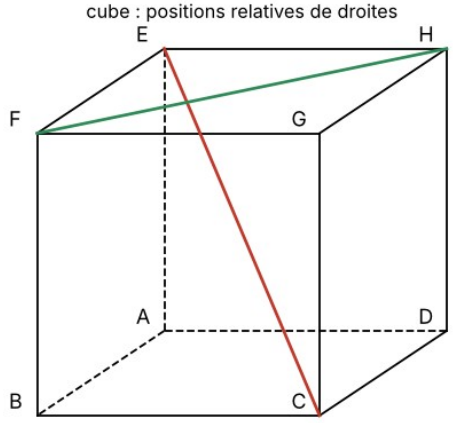
◆ **Propriété — un plan est déterminé par**

- trois points non alignés ;
- une droite et un point extérieur à cette droite ;
- deux droites sécantes ;
- deux droites strictement parallèles.

2 Positions relatives de droites et de plans

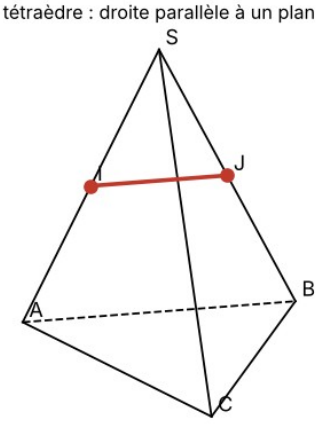
Objets	Positions possibles
deux droites	coplanaires (sécantes ou parallèles) ou non coplanaires
une droite et un plan	droite contenue dans le plan, sécante au plan (un point commun), ou strictement parallèle au plan
deux plans	sécants (suivant une droite) ou parallèles (confondus ou strictement parallèles)

cube : positions relatives de droites



(*EC*) et (*FH*) : non coplanaires

tétraèdre : droite parallèle à un plan



I, *J* milieux : (*IJ*) // (*AB*) donc (*IJ*) // (*ABC*)

◆ **Attention**

Dans l'espace, deux droites qui ne se coupent pas ne sont pas forcément parallèles : elles peuvent être non coplanaires (par exemple (EC) et (FH) dans le cube).

3 Parallélisme dans l'espace

◆ **Théorème**

- Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.
- Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.
- Deux plans sont parallèles si et seulement si l'un contient deux droites sécantes parallèles à l'autre.
- **Théorème du toit** : si deux plans sécants contiennent respectivement deux droites parallèles, leur droite d'intersection est parallèle à ces deux droites.
- Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

◆ **Exemple corrigé**

$SABC$ est un tétraèdre, I et J les milieux de $[SA]$ et $[SB]$. Montrer que (IJ) est parallèle au plan (ABC).

Solution. Dans le triangle SAB, la droite des milieux donne $(IJ)\parallel(AB)$. Or (AB) est contenue dans le plan (ABC) : donc $(IJ)\parallel(ABC)$.

4 Orthogonalité dans l'espace

◆ Définition

- Deux droites sont **orthogonales** si leurs parallèles menées par un même point sont perpendiculaires.
- Une droite est **perpendiculaire à un plan** si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

◆ Théorème

- Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
- Si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

◆ Exemple corrigé

Dans le cube $ABCDEFGH$, (AE) est orthogonale à (AB) et à (AD), sécantes dans le plan (ABC) : $(AE)\perp(ABC)$. Donc (AE) est orthogonale à (AC) et (BD).

5 Solides usuels : volumes et aires

Solide	Volume	Aire latérale / totale
pavé droit $a\times b\times c$	abc	$2(ab+bc+ac)$
cube d'arête a	a^3	$6a^2$
prisme droit	aire de base × hauteur	périmètre de base × hauteur (latérale)
pyramide	$\frac{1}{3}$ × aire de base × hauteur	somme des faces
cylindre (rayon r, hauteur h)	$\pi r^2 h$	$2\pi rh$ (latérale)
cône (rayon r, hauteur h)	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	—
boule / sphère de rayon r	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$

Fiche mémo

Notion	À retenir
Plan	3 points non alignés ; 2 droites sécantes ou parallèles
Droites	coplanaires ou non coplanaires
Droite // plan	parallèle à une droite du plan
Toit	intersection parallèle aux deux droites parallèles
Droite ⊥ plan	orthogonale à deux droites sécantes du plan