COURS • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 14 — Arithmétique

◆ **Sommaire**

- 1. Multiples et diviseurs
- 2. Division euclidienne
- 3. Critères de divisibilité
- 4. Nombres premiers — décomposition en facteurs premiers
- 5. PGCD et PPCM
- 6. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Utiliser la divisibilité et la division euclidienne dans IN.
- Utiliser les critères de divisibilité par $2, 3, 4, 5, 9, 11, 25$.
- Reconnaître un nombre premier ; décomposer un entier en produit de facteurs premiers.
- Calculer un PGCD et un PPCM ; reconnaître deux entiers premiers entre eux.

1 Multiples et diviseurs

◆ **Définition**

Soit a et b deux entiers naturels, $b \neq 0$. On dit que b **divise** a (ou que a est un **multiple** de b) s'il existe un entier naturel k tel que $a = kb$. On note $b \mid a$.

◆ **Propriété**

- 1 divise tout entier ; tout entier non nul divise 0 et se divise lui-même.
- Si $c \mid a$ et $c \mid b$, alors c divise $a+b$, $a-b$ (si $a \geq b$) et $ka+k'b$ pour tous entiers k, k'.
- Si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$.

◆ **Exemple corrigé**

Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3 : $n+(n+1)+(n+2) = 3(n+1)$.

2 Division euclidienne

◆ Théorème

Pour $a \in \mathbb{N}$ et $b \in I N^*$, il existe un **unique** couple d'entiers naturels $(q\,;r)$ tel que $a=bq+r$ et $0 \leq r < b$. q est le **quotient**, r le **reste** ; $b \mid a$ si et seulement si $r=0$.

◆ Exemple corrigé

- $247=13\times 19+0$: 13 divise 247.
- $100=7\times 14+2$: le quotient est 14 et le reste 2.
- Tout entier s'écrit $2k$ ou $2k+1$; $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$.

3 Critères de divisibilité

Un entier est divisible par...	si et seulement si...
2	son chiffre des unités est pair
5	son chiffre des unités est 0 ou 5
4 (resp. 25)	le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 (resp. 25)
3 (resp. 9)	la somme de ses chiffres est divisible par 3 (resp. 9)
11	la différence entre la somme des chiffres de rang impair et celle des chiffres de rang pair est divisible par 11

◆ Démonstration — critère par 9

$\overline{abc}=100a+10b+c=99a+9b+(a+b+c)$: comme 9 divise $99a+9b$, $\overline{abc}$ et $a+b+c$ ont le même reste dans la division par 9.

◆ Exemple corrigé

7425 : somme des chiffres 18, divisible par 9 ; les deux derniers chiffres 25 : divisible par 25 ; $(5+4)-(2+7)=0$: divisible par 11.

4 Nombres premiers — décomposition en facteurs premiers

◆ Définition

Un entier naturel est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. (1 n'est pas premier ; 2 est le seul nombre premier pair.)

◆ Théorème

- Si $n \geq 2$ n'est divisible par aucun nombre premier p tel que $p^2 \leq n$, alors n est premier.
- Tout entier $n \geq 2$ se décompose en un produit de facteurs premiers ; cette décomposition est unique (à l'ordre près).

crible d'Ératosthène : les 25 nombres premiers inférieurs à 100

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

◆ Exemple corrigé

- 97 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 ($11^2 = 121 > 97$) : 97 est premier.
- $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

5 PGCD et PPCM

◆ Définition

- Le **PGCD** de a et b est le plus grand de leurs diviseurs communs ; on le note $a \wedge b$.
- Le **PPCM** de a et b est le plus petit de leurs multiples communs non nuls ; on le note $a \vee b$.
- a et b sont **premiers entre eux** si $a \wedge b = 1$.

◆ Méthode — calcul par décomposition

$a \wedge b$: produit des facteurs premiers communs, chacun avec son plus petit exposant ; $a \vee b$: produit de tous les facteurs premiers, chacun avec son plus grand exposant.

◆ Méthode — algorithme d'Euclide

$a \wedge b = b \wedge r$ où r est le reste de la division de a par b ; on recommence jusqu'à obtenir un reste nul : le PGCD est le dernier reste non nul.

◆ Propriété

$(a \wedge b) \times (a \vee b) = a \times b.$

◆ Exemple corrigé

Calculer $360 \wedge 84$ et $360 \vee 84$.

Solution. $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $84 = 2^2 \times 3 \times 7$: $360 \wedge 84 = 2^2 \times 3 = 12$ et $360 \vee 84 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$.
Vérification : $12 \times 2520 = 30240 = 360 \times 84$.

◆ Exemple corrigé — application

Simplifier $\frac{360}{84}$: on divise par le PGCD 12 : $\frac{360}{84} = \frac{30}{7}$ (fraction irréductible).

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Division euclidienne	$a = bq + r,\ 0 \le r < b$
Critères	3 et 9 : somme des chiffres ; 4 et 25 : deux derniers chiffres ; 11 : somme alternée
Premier	tester les diviseurs premiers p avec $p^2 \le n$
PGCD, PPCM	plus petits / plus grands exposants ; Euclide
Relation	$(a \wedge b)(a \vee b) = ab$