COURS • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 13 — Fonctions de référence

Sommaire

- 1. Fonctions $x \mapsto a x^2$
- 2. Fonctions $x \mapsto a x^2 + bx + c$: forme canonique, parabole
- 3. Fonctions $x \mapsto \dfrac{a}{x}$
- 4. Fonctions homographiques $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$
- 5. Courbes déduites par translation
- 6. Résolution graphique d'équations et d'inéquations
- 7. Fiche mémo

L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel

- Reconnaître et tracer une parabole et une hyperbole ; préciser sommet, axe, centre, asymptotes.
- Étudier les variations des fonctions trinômes et homographiques.
- Résoudre graphiquement des équations et des inéquations.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 Fonctions $x \mapsto a x^2$ ($a \neq 0$)

Propriété

- La courbe de $x \mapsto a x^2$ est une **parabole** de sommet O et d'axe de symétrie l'axe des ordonnées.
- Si $a > 0$: décroissante sur $]-\infty ; 0]$, croissante sur $[0 ; +\infty[$, minimum 0 en 0 (parabole « tournée vers le haut »).
- Si $a < 0$: croissante puis décroissante, maximum 0 en 0.

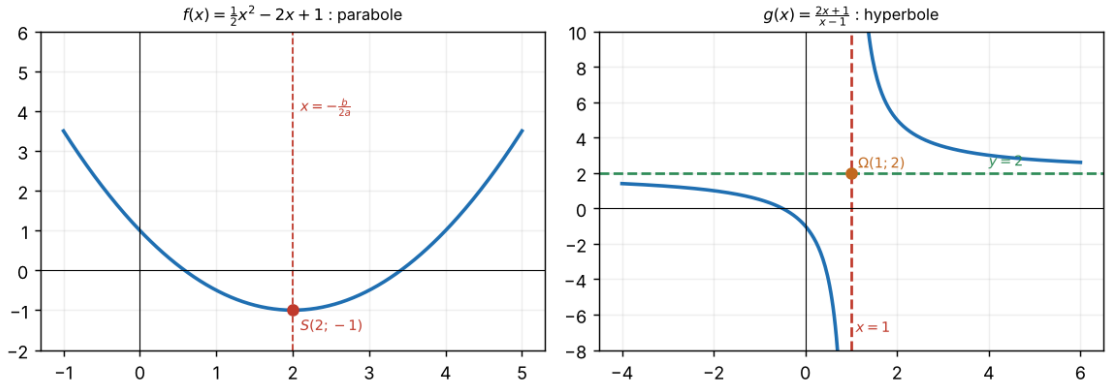
2 Fonctions $x \mapsto a x^2 + bx + c$: forme canonique, parabole

Théorème

Pour $a \neq 0$: $a x^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

La courbe est une **parabole** de sommet $S(\alpha ; \beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$. C'est l'image de la parabole d'équation $y = a x^2$ par la translation de vecteur $\alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$.

	$a>0$	$a<0$
variations	décroissante sur $]-\infty;\alpha]$, croissante sur $[\alpha;+\infty[$	croissante sur $]-\infty;\alpha]$, décroissante sur $[\alpha;+\infty[$
extremum	minimum β en α	maximum β en α



◆ **Exemple corrigé**

Étudier $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1$.

Solution. $\alpha=-\frac{-2}{1}=2$, $\beta=f(2)=-1$: $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2-1$. Parabole de sommet $S(2;-1)$, d'axe $x=2$; f est décroissante sur $]-\infty;2]$, croissante sur $[2;+\infty[$, minimum -1.

3 Fonctions $x\mapsto\frac{a}{x}$ $(a\neq0)$

◆ **Propriété**

- Définie sur IR^*, impaire : sa courbe est une **hyperbole** de centre O, d'asymptotes les axes du repère.
- Si $a>0$: décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$; si $a<0$: croissante sur chacun de ces intervalles.

4 Fonctions homographiques $x\mapsto\frac{ax+b}{cx+d}$

◆ **Théorème**

Soit $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ avec $c\neq0$ et $ad-bc\neq0$. Pour $x\neq-\frac{d}{c}$, on peut écrire $g(x)=\beta+\frac{k}{x-\alpha}$ avec $\alpha=-\frac{d}{c}$ et $\beta=\frac{a}{c}$.

La courbe est une **hyperbole** de centre $\Omega(\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=\alpha$ et $y=\beta$; c'est l'image de la courbe de $x\mapsto\frac{k}{x}$ par la translation de vecteur $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$.

◆ **Exemple corrigé**

Étudier $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

Solution. $g(x)=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=2+\dfrac{3}{x-1}$. Hyperbole de centre $\Omega(1;2)$, d'asymptotes $x=1$ et $y=2$; comme $k=3>0$, g est décroissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

5 Courbes déduites par translation

◆ **Propriété**

La courbe de $x\mapsto f(x-\alpha)+\beta$ est l'image de la courbe de f par la translation de vecteur $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$.

6 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

◆ **Méthode**

- Les solutions de $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g.
- Les solutions de $f(x)>g(x)$ sont les abscisses des points où C_f est strictement au-dessus de C_g.
- On confirme toujours par le calcul les solutions lues graphiquement.

◆ **Exemple corrigé**

Résoudre $\dfrac{1}{2}x^2-2x+1=x-3$: $x^2-6x+8=0$, soit $x=2$ ou $x=4$ — ce sont les abscisses des points d'intersection de la parabole et de la droite.

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Parabole	$y=a(x-\alpha)^2+\beta$: sommet $S(\alpha;\beta)$, axe $x=\alpha$, $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$
Sens	$a>0$: minimum en α ; $a<0$: maximum en α
Hyperbole	$y=\beta+\dfrac{k}{x-\alpha}$: centre $\Omega(\alpha;\beta)$, asymptotes $x=\alpha$, $y=\beta$
Translation	$x\mapsto f(x-\alpha)+\beta$: vecteur $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$
Graphique	intersections de courbes ; positions relatives