COURS • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 12 — Rotations

◆ **Sommaire**

- 1. Orientation du plan — définition d'une rotation
- 2. Cas particuliers — rotation réciproque
- 3. Propriétés de conservation
- 4. Images des figures usuelles
- 5. Déterminer une rotation — applications
- 6. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

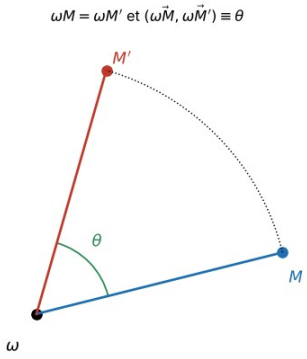
- Construire l'image d'un point et d'une figure simple par une rotation.
- Utiliser les propriétés de conservation d'une rotation pour démontrer.
- Reconnaître une rotation et déterminer ses éléments ; résoudre des problèmes de construction et de lieu.

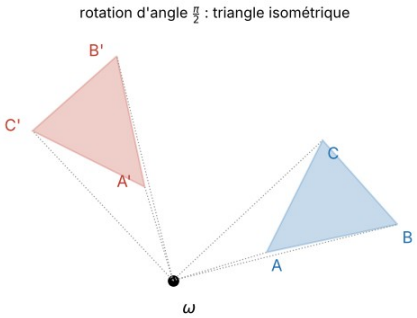
1 Orientation du plan — définition d'une rotation

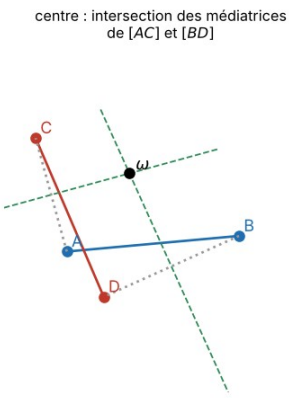
◆ **Définition**

On oriente le plan en choisissant comme **sens direct** le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Soit O un point et $\theta \in [\,0\,;\pi\,]$. La **rotation de centre O et d'angle θ (dans le sens direct)**, notée $R(O,\theta)$, associe à O le point O lui-même et à tout point $M \neq O$ le point M' tel que : $OM' = OM$ et l'angle $\widehat{MOM'} = \theta$, M' étant obtenu en tournant autour de O dans le sens direct. On définit de même une rotation dans le sens indirect.







2 Cas particuliers — rotation réciproque

Propriété

- $R(O,0)$ est l'identité du plan ; $R(O,\pi)$ est la symétrie centrale de centre O.
- Si $\theta \neq 0$, le seul point invariant est le centre O.
- La réciproque de la rotation de centre O et d'angle θ dans le sens direct est la rotation de centre O et d'angle θ dans le sens indirect.

3 Propriétés de conservation

Théorème

- Une rotation **conserve les distances** : si A' et B' sont les images de A et B, alors $A'B' = AB$.
- Elle conserve les milieux, l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, les angles géométriques, les aires et le contact.
- L'angle entre une droite (AB) et son image $(A'B')$ est égal à θ (ou à $\pi - \theta$).

Démonstration — conservation des distances (idée)

Les triangles OAB et $OA'B'$ ont $OA = OA'$, $OB = OB'$ et $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$ (on « tourne » les deux points du même angle) : ils sont isométriques, donc $A'B' = AB$.

4 Images des figures usuelles

Figure	Image par une rotation R
segment $[AB]$	segment $[A'B']$ de même longueur
droite (AB)	droite $(A'B')$
cercle de centre I et de rayon r	cercle de centre $R(I)$ et de même rayon r
triangle, polygone	figure superposable (mêmes longueurs, mêmes angles, même aire)

5 Déterminer une rotation — applications

Méthode

- Une rotation est déterminée par son centre, son angle et son sens.
- Si $R(A) = A'$ et $R(B) = B'$ (avec $AB = A'B'$), le centre est le point d'intersection des médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$.
- Triangle équilatéral : si ABC est équilatéral direct, la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ (sens direct) transforme B en C.
- Carré : si $ABCD$ est un carré direct de centre O, la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (sens direct) transforme A en B, B en C, C en D, D en A.

◆ **Exemple corrigé**

Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur les triangles équilatéraux ABE et ACF. Montrer que $EC = BF$.

Solution. La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ (dans le sens convenable) transforme E en B et C en F. Elle transforme donc le segment $[EC]$ en $[BF]$; comme elle conserve les distances, $EC = BF$.

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Définition	$OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = \theta$ (sens fixé)
Cas particuliers	$\theta = 0$: identité ; $\theta = \pi$: symétrie centrale
Conservation	distances, angles, alignement, parallélisme, aires
Images	cercle de même rayon, centre image du centre
Centre	intersection des médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$