EXERCICES • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 11 — Trigonométrie et mesure des grandeurs

1 Valeurs et relations

Exercice 1

Soit $x \in [0\,;\pi]$.

1) On donne $\tan x = \frac{3}{2}$. Calculer $\cos x$ et $\sin x$.

2) On donne $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $\cos x$ et $\tan x$.

3) On donne $\tan x = -\frac{3}{2}$. Calculer $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice 2

Démontrer que pour tout $x \in [0\,;\pi]$:

1) $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

2) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

3) $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos x - \sin x + \cos^2 x \sin x - \sin^2 x \cos x$

Exercice 3

On donne $\cos x + \sin x = \frac{6}{5}$. Calculer $A = \cos x \sin x$, $B = \cos^3 x + \sin^3 x$ et $C = \cos^4 x + \sin^4 x$.

Exercice 4

Calculer sans calculatrice :

$$C = \cos^2\frac{\pi}{5} + \cos^2\frac{2\pi}{5} + \sin^2\frac{3\pi}{5} + \sin^2\frac{4\pi}{5} \qquad D = \tan\frac{\pi}{12} \times \tan\frac{5\pi}{12} \times \tan\frac{\pi}{5} \times \tan\frac{4\pi}{5}$$

2 Triangles

Exercice 5

ABC est un triangle avec $AC = 3$, $AB = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$. Calculer BC.

Exercice 6

ABC est un triangle avec $BC = 2$, $AC = 3$ et $AB = 4$. Calculer la valeur exacte de l'aire de ABC.

Exercice 7

Soit ABC un triangle, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

1) Montrer que $-2bc \leq a^2-b^2-c^2 \leq 2bc$.

2) En déduire que $(b-c)^2 \leq a^2 \leq (b+c)^2$, puis que $|b-c| \leq a \leq b+c$.

Exercice 8

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB=15$ cm et $BC=9$ cm. M est le point de $[AD]$ tel que $AM=4$ cm. E est le point de $[AB]$ tel que $(DE) \perp (MC)$; les droites (DE) et (MC) se coupent en H.

1) Montrer que $\widehat{ADE} = \widehat{DCH}$. En déduire que les triangles DMC et AED sont semblables.

2) Montrer que $AE=3$ cm.

3) Calculer ME et CE. Démontrer que (MC) est la médiatrice du segment $[DE]$.

Exercice 9

ζ est un cercle de centre O et de rayon r, ABC un triangle inscrit dans ζ avec $\widehat{BAC}$ aigu. H est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$ et (AO) recoupe ζ en D.

1) Démontrer que les triangles ABD et AHC sont semblables.

2) On pose $AB=c$, $AC=b$ et $AH=h$. En déduire que $bc=2rh$.

3) En déduire que l'aire de ABC vaut $S=\dfrac{abc}{4r}$ et que $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}}=2r$.

Exercice 10

ABC est un triangle, H le projeté orthogonal de A sur (BC), avec $\widehat{BAH}=45°$, $\widehat{HAC}=30°$ et $AH=6$ cm. Le cercle (C) de diamètre $[AH]$ coupe (AB) en D et (AC) en E.

1) Calculer AB et AC. Montrer que AHE est rectangle et que $AE=3\sqrt{3}$ cm.

2) Démontrer que $\widehat{AED}=45°$ et en déduire que les triangles BAC et EAD sont semblables. Montrer que le rapport de similitude qui fait passer de BAC à EAD est $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Réduction ou agrandissement ?

3) Calculer BC ; en déduire DE.

4) En calculant l'aire de ABC de deux façons, montrer que $\sin 75° = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$.

Exercice 11

Soit ABC un triangle de demi-périmètre p ($2p=a+b+c$) et d'aire S. Montrer que $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. $\cos\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$.	☐	☐
2. $\sin(\pi-x)=\sin x$.	☐	☐
3. Si $\widehat{A}=\dfrac{\pi}{2}$, Al-Kashi redonne le théorème de Pythagore.	☐	☐
4. π rad $=360°$.	☐	☐