COURS • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 11 — Trigonométrie et mesure des grandeurs

◆ **Sommaire**

- 1. Rappels dans le triangle rectangle
- 2. Demi-cercle trigonométrique — radian
- 3. Valeurs remarquables et angles associés
- 4. Relations fondamentales
- 5. Relations dans un triangle quelconque : aire, loi des sinus, Al-Kashi
- 6. Relations métriques dans le triangle rectangle
- 7. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Utiliser le demi-cercle trigonométrique pour définir $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ pour $x \in [\,0\,;\pi\,]$.
- Utiliser les valeurs remarquables et les angles associés.
- Calculer des longueurs, des angles et des aires dans un triangle quelconque.

1 Rappels dans le triangle rectangle

◆ **Propriété — ABC rectangle en A, $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$**

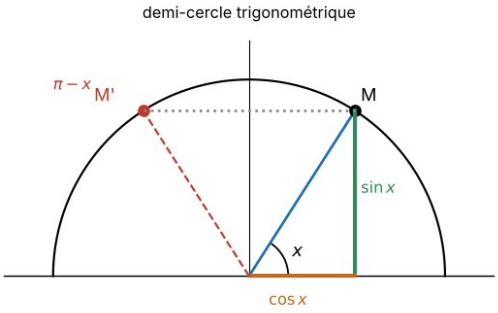
$\cos\hat{B}=\dfrac{c}{a}$; $\sin\hat{B}=\dfrac{b}{a}$; $\tan\hat{B}=\dfrac{b}{c}$ (côté adjacent, côté opposé, hypoténuse).

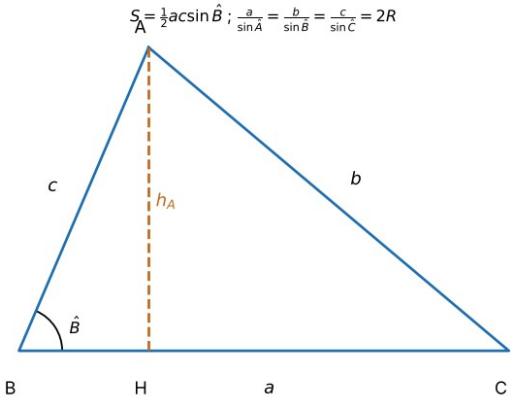
2 Demi-cercle trigonométrique — radian

◆ **Définition**

Dans un repère orthonormé (O,I,J), le **demi-cercle trigonométrique** est le demi-cercle de centre O, de rayon 1, situé dans le demi-plan $y\geq 0$. À tout réel $x\in[\,0\,;\pi\,]$ on associe le point M de ce demi-cercle tel que $\widehat{IOM}=x$ (en radians).

Alors $M(\cos x\,;\sin x)$ et, pour $x\neq\dfrac{\pi}{2}$, $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$.





◆ Propriété — conversion

π radians $= 180\,°$: une mesure de $\alpha\,°$ correspond à $\dfrac{\alpha\pi}{180}$ radians.

3 Valeurs remarquables et angles associés

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0

◆ Propriété — angles associés, pour $x \in [0\,;\pi]$

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin(\pi - x) = \sin x$; $\tan(\pi - x) = -\tan x$.
- Pour $x \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$: $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$; $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$; $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \dfrac{1}{\tan x}$ $(x \neq 0)$.

◆ Exemple corrigé

$\cos\dfrac{5\pi}{6} = \cos(\pi - \dfrac{\pi}{6}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4 Relations fondamentales

◆ Théorème

- Pour tout $x \in [\,0\,;\pi\,]$: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $-1 \le \cos x \le 1$ et $0 \le \sin x \le 1$.
- Pour $x \neq \dfrac{\pi}{2}$: $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

◆ Exemple corrigé

Sachant que $x \in [\,\frac{\pi}{2}\,;\pi\,]$ et $\sin x = \dfrac{3}{5}$, calculer $\cos x$ et $\tan x$.

Solution. $\cos^2 x = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$ et $\cos x \le 0$ sur cet intervalle : $\cos x = -\dfrac{4}{5}$, $\tan x = -\dfrac{3}{4}$.

5 Relations dans un triangle quelconque

Dans un triangle ABC, on note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, S l'aire et R le rayon du cercle circonscrit.

◆ Théorème — aire

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}.$$

◆ Démonstration

Si H est le pied de la hauteur issue de A, $AH = AB\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$ (dans le triangle ABH, que $\widehat{B}$ soit aigu ou obtus). Donc $S = \dfrac{1}{2}BC \times AH = \dfrac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$.

◆ Théorème — loi des sinus

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R.$$

◆ Théorème — formule d'Al-Kashi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}\ ;\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}\ ;\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}.$$

◆ Exemple corrigé

ABC est un triangle tel que $b = 5$, $c = 8$ et $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{3}$. Calculer a et l'aire S.

Solution. $a^2 = 25 + 64 - 2 \times 5 \times 8 \times \dfrac{1}{2} = 49$, donc $a = 7$. $S = \dfrac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

6 Relations métriques dans le triangle rectangle

◆ **Propriété — ABC rectangle en A, H pied de la hauteur issue de A**

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Pythagore).
- $AB^2 = BH \times BC$; $AC^2 = CH \times CB$; $AH^2 = HB \times HC$.
- $AB \times AC = BC \times AH$ (deux expressions du double de l'aire).

◆ **Exemple corrigé**

$AB = 6$, $AC = 8$: $BC = 10$, $AH = \dfrac{6 \times 8}{10} = 4{,}8$, $BH = \dfrac{36}{10} = 3{,}6$.

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Demi-cercle	$M(\cos x ; \sin x),\ x \in [0 ; \pi] ; \sin x \geq 0$
Pythagore	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
Supplémentaire	$\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin(\pi - x) = \sin x$
Aire	$S = \dfrac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$
Loi des sinus	$\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R$
Al-Kashi	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$