EXERCICES • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 10 — Suites arithmétiques et géométriques

1 Suites arithmétiques

Exercice 1

(u_n) est une suite arithmétique de raison r.

1) Calculer u_{10} sachant que $u_0=2$ et $r=2$.

2) Calculer u_0 sachant que $u_5=10$ et $r=2$.

3) Calculer r sachant que $u_2=1$ et $u_4=8$.

4) Calculer u_0 et r sachant que $u_7=45$ et $u_{10}+u_{11}=132$.

Exercice 2

Calculer $S=1+3+5+\ldots+2007$ et $T=2+4+6+\ldots+2006$, puis en déduire $F=1-2+3-4+\ldots-2006+2007$.

Exercice 3

(u_n) est définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+n+\frac{5}{2}$. On pose $v_n=u_n-2n-1$. Montrer que (v_n) est géométrique et en déduire u_n en fonction de n.

2 Suites géométriques

Exercice 4

(u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_0.

1) Calculer u_{10} sachant que $u_0=1$ et $q=-2$.

2) Calculer u_0 sachant que $u_5=2$ et $q=8$.

3) Calculer q sachant que $u_2=7$ et $u_4=28$.

Exercice 5

Calculer $S=1+2+2^2+\ldots+2^{2009}$.

3 Suites récurrentes

Exercice 6

(u_n) est définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=5u_n+8$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3. (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

2) On pose $v_n=u_n+2$. Montrer que (v_n) est géométrique ; exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 7

(u_n) est définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=4u_n+9$.

1) Déterminer le réel α pour que $v_n=u_n-\alpha$ soit géométrique.

2) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

3) Calculer $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$ et $T_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$.

Exercice 8

(u_n) est définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n^{\,2}}$ (on admet $u_n\geq 0$).

1) Calculer u_1, u_2, u_3. La suite est-elle arithmétique ?

2) On pose $v_n=u_n^{\,2}$. Montrer que (v_n) est arithmétique ; exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 9

Ali et Samir débutent avec un salaire mensuel de 1500 dinars. Chaque mois, à partir du deuxième mois, le salaire d'Ali augmente de 8 dinars ; celui de Samir augmente de $0{,}2$ % puis on y ajoute 4 dinars. On note a_n et c_n les salaires du $(n+1)$-ième mois ($a_0=c_0=1500$).

1) Calculer a_1, c_1, a_2, c_2.

2) Exprimer a_n en fonction de n. Quelle est la nature de (a_n) ?

3) Justifier que $c_{n+1}=1{,}002\,c_n+4$. On pose $v_n=c_n+2000$: montrer que (v_n) est géométrique de raison $1{,}002$ et en déduire $c_n=3500\times 1{,}002^n-2000$.

4) Calculer puis comparer les salaires annuels perçus par Ali et Samir au cours de leur première année de travail.

Exercice 10

Un paysagiste trace une spirale formée de demi-cercles C_0, C_1, C_2… : le premier a pour diamètre $A_0A_1=100$ m et chaque demi-cercle a un diamètre égal à la moitié du précédent. On note l_n la longueur de C_n.

1) Calculer l_0, l_1, l_2. Montrer que (l_n) est géométrique et que $l_n=50\pi\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2) Le paysagiste ne trace que les huit demi-cercles C_0 à C_7. Calculer la longueur $L=l_0+l_1+\ldots+l_7$ (arrondi à 10^{-2}).

3) Il plante un arbuste tous les 50 cm à partir de A_0. Combien d'arbustes doit-il planter ?

Exercice 11

(u_n) est définie par $u_0=3$ et $u_{n+1}=\dfrac{4u_n-2}{u_n+1}$ (on admet que $u_n>2$ pour tout n).

1) Déterminer les réels α tels que $\alpha=\dfrac{4\alpha-2}{\alpha+1}$.

2) On pose $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n-2}$. Montrer que (v_n) est géométrique et exprimer u_n en fonction de n.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. La suite $u_n = 3n - 5$ est arithmétique de raison 3.	☐	☐
2. La suite $u_n = n^2$ est arithmétique.	☐	☐
3. La suite $u_n = \dfrac{5}{2^n}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.	☐	☐
4. $1+2+\ldots+100 = 5\,050$.	☐	☐