COURS • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 10 — Suites arithmétiques et géométriques

◆ **Sommaire**

- 1. Généralités sur les suites
- 2. Sens de variation d'une suite
- 3. Suites arithmétiques
- 4. Suites géométriques
- 5. Suites récurrentes $u_{n+1}=a\,u_n+b$
- 6. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Calculer des termes d'une suite définie explicitement ou par récurrence.
- Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique ; calculer le terme général et la somme de termes consécutifs.
- Étudier le sens de variation d'une suite ; étudier une suite $u_{n+1}=a\,u_n+b$ à l'aide d'une suite auxiliaire.

1 Généralités sur les suites

◆ **Définition**

Une **suite** réelle (u_n) associe à chaque entier naturel n (éventuellement à partir d'un rang n_0) un réel u_n, appelé **terme de rang** n. Une suite peut être définie :

- de façon **explicite** : $u_n=f(n)$, par exemple $u_n=n^2-1$;
- par **récurrence** : la donnée du premier terme et d'une relation entre u_{n+1} et u_n, par exemple $u_0=2$ et $u_{n+1}=3u_n-1$.

◆ **Exemple corrigé**

$u_0=2$ et $u_{n+1}=3u_n-1$: $u_1=5$, $u_2=14$, $u_3=41$.

2 Sens de variation d'une suite

◆ **Définition**

(u_n) est **croissante** si $u_{n+1}\geq u_n$ pour tout n ; **décroissante** si $u_{n+1}\leq u_n$; **constante** si $u_{n+1}=u_n$.

Méthode

- Étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$.
- Si tous les termes sont strictement positifs, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Exemple corrigé

$u_n=\frac{n}{n+1}$: $u_{n+1}-u_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0$: la suite est croissante.

3 Suites arithmétiques

Définition

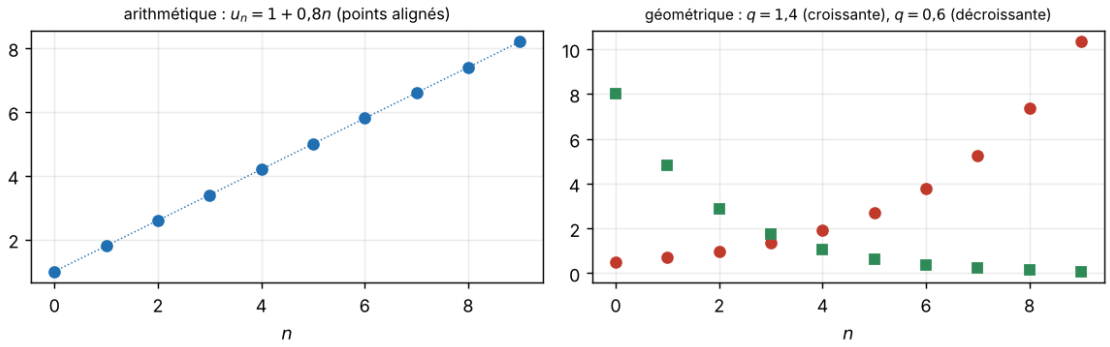
(u_n) est **arithmétique** de raison r si, pour tout n, $u_{n+1}=u_n+r$.

Théorème

- Terme général : $u_n=u_0+nr$ et, plus généralement, $u_n=u_p+(n-p)r$.
- Somme de termes consécutifs : $S=u_p+\ldots+u_n=\frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$ (nombre de termes × moyenne du premier et du dernier).
- En particulier : $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.
- Si $r>0$ la suite est croissante ; si $r<0$, décroissante.

Démonstration — $1+2+\ldots+n$

On écrit $S=1+2+\ldots+n$ et $S=n+(n-1)+\ldots+1$. En ajoutant terme à terme : $2S=n(n+1)$.



Exemple corrigé

$u_0=3$, $r=4$: $u_{20}=3+80=83$ et $u_0+\ldots+u_{20}=\frac{21\times(3+83)}{2}=903$.

4 Suites géométriques

◆ Définition

(u_n) est **géométrique** de raison q si, pour tout n, $u_{n+1} = q \times u_n$.

◆ Théorème

- Terme général : $u_n = u_0 q^n$ et, plus généralement, $u_n = u_p q^{n-p}$.
- Pour $q \neq 1$: $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$; $S = u_p + \ldots + u_n = u_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.
- Si $u_0 > 0$: la suite est croissante pour $q > 1$, décroissante pour $0 < q < 1$.

◆ Démonstration — somme

Soit $S = 1 + q + \ldots + q^n$. Alors $qS = q + q^2 + \ldots + q^{n+1}$, et $S - qS = 1 - q^{n+1}$.

◆ Exemple corrigé

$u_0 = 5$, $q = 2$: $u_6 = 5 \times 64 = 320$ et $u_0 + \ldots + u_6 = 5 \times \dfrac{1-2^7}{1-2} = 635$.

◆ Propriété — reconnaître une suite

Pour montrer que (u_n) est arithmétique (resp. géométrique), on montre que $u_{n+1} - u_n$ (resp. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$) est une constante indépendante de n.

5 Suites récurrentes $u_{n+1} = a\,u_n + b$

◆ Méthode — suite auxiliaire ($a \neq 1$)

- On cherche le réel ℓ tel que $\ell = a\ell + b$, soit $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.
- La suite $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a : $v_{n+1} = a\,v_n$.
- On en déduit $v_n = v_0 a^n$, puis $u_n = v_n + \ell$.

◆ **Exemple corrigé**

$u_0=2$ et $u_{n+1}=3u_n-1$. Exprimer u_n en fonction de n.

Solution. $\ell=3\ell-1$ donne $\ell=\frac{1}{2}$. $v_n=u_n-\frac{1}{2}$ vérifie $v_{n+1}=3u_n-1-\frac{1}{2}=3v_n$. Donc $v_n=\frac{3}{2}\times 3^n$ et $u_n=\frac{3^{n+1}+1}{2}$.

★ Fiche mémo

	Arithmétique (raison r)	Géométrique (raison q)
Relation	$u_{n+1}=u_n+r$	$u_{n+1}=q\,u_n$
Terme général	$u_n=u_p+(n-p)r$	$u_n=u_p q^{n-p}$
Somme	$\frac{\text{nombre de termes}\times(u_p+u_n)}{2}$	$u_p\frac{1-q^N}{1-q}$ (N termes)