EXERCICES • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 1 — Calcul dans IR

1 Racines carrées et identités

Exercice 1

Écrire sans radical au dénominateur :

$$A=\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \qquad B=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \qquad C=\frac{\sqrt{3}-1}{4-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}}$$

Exercice 2

Vérifier les égalités :

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{10}$

b) $\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{14}$

c) $\left(9+\sqrt{5}\right)^3+\left(9-\sqrt{5}\right)^3=12^3$

Exercice 3

Établir que, pour tous réels a, b, c et x :

1) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

2) $x^6-1=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

2 Comparaisons

Exercice 4

Soit x un réel strictement positif.

1) Comparer $\dfrac{1}{1+x}$ et $1-x$. En déduire la comparaison de $\dfrac{1}{1{,}000000001}$ et $0{,}999999999$.

2) Pour $0<x<1$, calculer $\dfrac{1+x}{1-x}-(1+2x)$. Comparer $\dfrac{1{,}000000001}{0{,}999999999}$ et $1{,}000000002$.

Exercice 5

1) Calculer les quatre moyennes m, g, h et q des réels 2 et 4, puis les ranger.

2) Montrer que pour tout réel x : $x^2+1\geq 2x$. En déduire que $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\geq 8abc$ pour tous réels a, b, c.

3 Valeur absolue et approximations

Exercice 6

Résoudre dans IR :

a) $|x+2|=3$

b) $|2x+1|=|3-x|$

c) $|x-1|<1$

d) $|3-2x|\geq 5$

Exercice 7

Traduire par une valeur absolue ou un encadrement :

1) $1{,}63$ est une valeur approchée de x à 10^{-2} près.

2) $-0{,}35$ est une valeur approchée de x à 2×10^{-2} près.

3) $0{,}55$ est une valeur approchée de x par défaut à 10^{-2} près.

Exercice 8

Ptolémée utilisait pour $\sqrt{3}$ la valeur $a=1+\frac{43}{60}+\frac{55}{60^2}+\frac{23}{60^3}$. Est-ce une valeur approchée par excès ou par défaut ? À quelle précision ?

4 Pourcentages

Exercice 9

1) Un prix augmente de 20 % puis baisse de 15 %. Quel est le pourcentage global d'évolution ?

2) Un document est agrandi à 125 %. Quel pourcentage faut-il utiliser pour revenir à l'original ?

3) Le litre de carburant passe de $0{,}940$ D à $1{,}530$ D. Calculer le pourcentage d'augmentation.

Exercice 10

Soient a, b et c trois réels non nuls tels que $abc=1$ et $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

1) Montrer que $a+b+c=ab+bc+ca$.

2) Développer $(a-1)(b-1)(c-1)$. En déduire que l'un au moins des réels a, b, c est égal à 1.

Exercice 11

1) Soit n un entier naturel non nul. Montrer que $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$.

2) En déduire la valeur de $E=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{2006\times 2007}$.

Exercice 12

1) Soit $n\geq 2$ un entier. Montrer que $1-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}$.

2) En déduire $F=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\ldots(1-\frac{1}{1000^2})$.

Exercice 13

1) Soit n un entier naturel. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

2) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\geq 100$.

Exercice 14

1) Montrer que pour tout réel $x\geq 0$: $1-x\leq\frac{1}{1+x}\leq 1-x+x^2$.

2) En déduire un encadrement de $\frac{1}{1{,}02}$ d'amplitude 4×10^{-4}.

3) Les dimensions d'un rectangle, mesurées au millimètre près, sont 10 cm et 5 cm. Encadrer son aire.

Exercice 15

Soient a, b, c des réels.

1) Montrer que $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$. (On pourra calculer $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$.)

2) On suppose a, b, c strictement positifs. Montrer que $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$.

3) On suppose que a, b, c sont les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que $3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2\leq 4(ab+bc+ca)$. (On utilisera $a<b+c$.)

Exercice 16

Soient a et b deux réels tels que $0<a\leq b$.

1) Montrer que $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(b-a)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$.

2) En déduire que $\frac{(b-a)^2}{8b}\leq\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\leq\frac{(b-a)^2}{8a}$.

Exercice 17

Déterminer tous les entiers naturels a, b, c tels que $a<b<c$ et $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

1) Vérifier que $a\geq 2$, puis établir $1<\frac{3}{a}$. En déduire a.

2) Montrer de même que $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{2}{b}$ et en déduire b, puis conclure.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Pour tout réel a : $\sqrt{a^2}=a$.	☐	☐
2. Si $0<a<1$ alors $a^2<a$.	☐	☐
3. $\lvert x-3\rvert\leq 2$ équivaut à $1\leq x\leq 5$.	☐	☐
4. Une hausse de 10 % puis une baisse de 10 % ramènent au prix initial.	☐	☐