COURS • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 1 — Calcul dans IR

◆ **Sommaire**

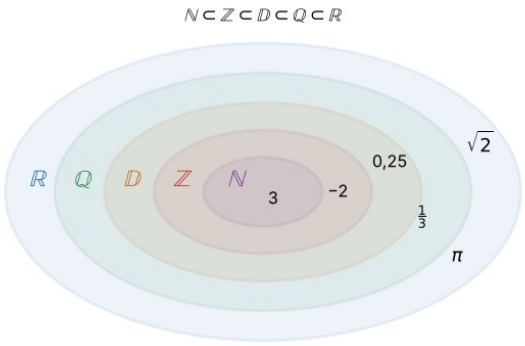
- 1. Les ensembles de nombres
- 2. Puissances
- 3. Racines carrées
- 4. Identités remarquables
- 5. Ordre dans IR — comparaisons
- 6. Valeur absolue et distance
- 7. Intervalles, encadrements, valeurs approchées
- 8. Moyennes de deux réels positifs
- 9. Pourcentages
- 10. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Reconnaître l'appartenance d'un nombre aux ensembles IN, $\mathbb{Z}$, ID, $\mathbb{Q}$, IR.
- Utiliser les règles de calcul sur les puissances, les racines carrées et les identités remarquables.
- Comparer deux réels ; utiliser la valeur absolue, les intervalles, les encadrements et les valeurs approchées.
- Calculer et utiliser des pourcentages (évolutions successives, évolution réciproque).

1 Les ensembles de nombres

Ensemble	Description	Exemples
IN	entiers naturels	$0\ ;\ 3\ ;\ 125$
$\mathbb{Z}$	entiers relatifs	$-7\ ;\ 0\ ;\ 12$
ID	décimaux : $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathrm{IN}$	$-2{,}35\ ;\ 0{,}25 = \frac{1}{4}$
$\mathbb{Q}$	rationnels : $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in I\,N^*$	$\frac{1}{3}\ ;\ -\frac{5}{7}$
IR	réels (points d'une droite graduée)	$\sqrt{2}\ ;\ \pi$



◆ Propriété

- $\mathrm{IN} \subset \mathbb{Z} \subset ID \subset \mathbb{Q} \subset IR$.
- Un nombre qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel** : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ sont irrationnels.

◆ Démonstration — $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Supposons $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ avec p, q entiers premiers entre eux. Alors $p^2=2q^2$, donc p^2 est pair et p est pair : $p=2k$. Il vient $q^2=2k^2$, donc q est pair. p et q seraient tous deux pairs : contradiction.

◆ Exemple corrigé

$\frac{1}{4}=0{,}25$ est décimal ; $\frac{1}{3}=0{,}333\ldots$ est rationnel non décimal ; $\sqrt{16}=4$ est entier naturel.

2 Puissances

◆ Définition

Pour $a \in IR$ et $n \in I\,N^*$: $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ (n facteurs), $a^0=1$; pour $a \neq 0$: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

◆ Propriété — pour a, b non nuls et m, n entiers relatifs

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$; $(a^m)^n=a^{mn}$.
- $(ab)^n=a^n b^n$; $(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}$.

◆ Exemple corrigé

$$\frac{2^5\times 4^{-2}}{8^{-1}}=\frac{2^5\times 2^{-4}}{2^{-3}}=2^{5-4+3}=2^4=16.$$

3 Racines carrées

◆ **Définition**

Pour $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est l'unique réel **positif** dont le carré est a.

◆ **Propriété — pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$**

- $(\sqrt{a})^2 = a$; pour tout réel x : $\sqrt{x^2} = |x|$.
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; si $b>0$: $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
- En général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (exemple : $\sqrt{9+16} = 5$ et $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$).

◆ **Méthode — supprimer un radical au dénominateur**

On multiplie par la **quantité conjuguée** : $\dfrac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$ $(a \neq b)$.

Exemple : $\dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

4 Identités remarquables

Degré 2	Degré 3
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

◆ **Démonstration — $(a+b)^3$**

$(a+b)^3 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

◆ **Exemple corrigé — factoriser**

- $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.
- $4x^2 - 25 = (2x-5)(2x+5)$.
- $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$.

5 Ordre dans IR — comparaisons

◆ Définition

$a \le b$ signifie que $b - a \ge 0$. Pour **comparer** deux réels, on étudie le signe de leur différence.

◆ Propriété — règles de calcul

- $a \le b \iff a + c \le b + c$.
- Si $c > 0$: $a \le b \iff ac \le bc$; si $c < 0$: $a \le b \iff ac \ge bc$ (le sens change).
- On peut **ajouter** membre à membre deux inégalités de même sens ; on peut les **multiplier** si tous les termes sont positifs.
- Pour a, b positifs : $a \le b \iff a^2 \le b^2 \iff \sqrt{a} \le \sqrt{b}$.
- Pour a, b strictement positifs : $a \le b \iff \dfrac{1}{a} \ge \dfrac{1}{b}$.

◆ Propriété — comparaison de a, a^2, $\sqrt{a}$ et $\dfrac{1}{a}$ ($a > 0$)

- Si $0 < a < 1$: $a^2 < a < \sqrt{a} < 1 < \dfrac{1}{a}$.
- Si $a > 1$: $\dfrac{1}{a} < 1 < \sqrt{a} < a < a^2$.

◆ Exemple corrigé

Comparer $A = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ et $B = \sqrt{2} + \sqrt{6}$.

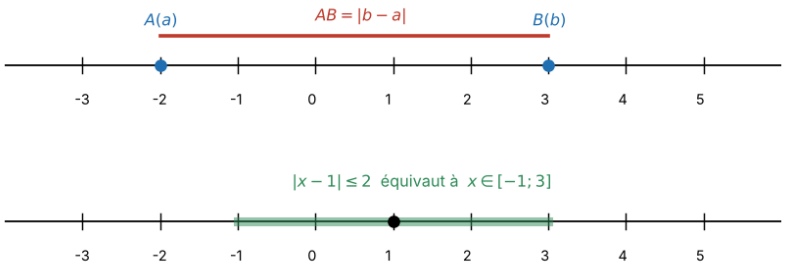
Solution. Ce sont deux réels positifs : on compare leurs carrés. $A^2 = 8 + 2\sqrt{15}$ et $B^2 = 8 + 2\sqrt{12}$. Comme $15 > 12$, $A^2 > B^2$, donc $A > B$.

6 Valeur absolue et distance

◆ Définition

La **valeur absolue** de x est $|x| = x$ si $x \ge 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$.

Sur une droite graduée, si A et B ont pour abscisses a et b, la distance AB vaut $|b - a|$.



◆ **Propriété**

- $|x|\geq 0$; $|-x|=|x|$; $|xy|=|x||y|$; $|x+y|\leq|x|+|y|$.
- Pour $r\geq 0$: $|x-a|=r \Leftrightarrow x=a-r$ ou $x=a+r$.
- Pour $r>0$: $|x-a|\leq r \Leftrightarrow a-r\leq x\leq a+r \Leftrightarrow x\in[a-r\,;a+r]$.
- Pour $r>0$: $|x-a|\geq r \Leftrightarrow x\leq a-r$ ou $x\geq a+r$.

◆ **Exemple corrigé**

1) Résoudre $|2x+1|=3$.

2) Résoudre $|x-1|<2$.

Solution.

1) $2x+1=3$ ou $2x+1=-3$: $x=1$ ou $x=-2$.

2) $-2<x-1<2$, soit $x\in]-1\,;3[$.

7 Intervalles, encadrements, valeurs approchées

Intervalle	Inégalités	Intervalle	Inégalités
$[a\,;b]$	$a\leq x\leq b$	$[a\,;+\infty[$	$x\geq a$
$]a\,;b[$	$a<x<b$	$]a\,;+\infty[$	$x>a$
$[a\,;b[$	$a\leq x<b$	$]-\infty\,;b]$	$x\leq b$
$]a\,;b]$	$a<x\leq b$	$]-\infty\,;b[$	$x<b$

◆ **Définition**

- Un **encadrement** de x d'amplitude e est une double inégalité $a\leq x\leq b$ avec $b-a=e$.
- a est une **valeur approchée** de x à e près si $|x-a|\leq e$; par défaut si $a\leq x\leq a+e$, par excès si $a-e\leq x\leq a$.

◆ **Exemple corrigé**

$1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$: $1{,}414$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près par défaut, et $1{,}415$ par excès.

8 Moyennes de deux réels positifs

◆ **Définition — $x>0$ et $y>0$**

- Moyenne **arithmétique** : $m=\dfrac{x+y}{2}$; **géométrique** : $g=\sqrt{xy}$.
- Moyenne **harmonique** h : $\dfrac{2}{h}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$; **quadratique** : $q=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$.

◆ Théorème

$\min(x,y) \le h \le g \le m \le q \le \max(x,y)$, avec égalité si et seulement si $x = y$.

◆ Démonstration — $g \le m$

$m - g = \dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \ge 0$, avec égalité si et seulement si $x = y$.

9 Pourcentages

◆ Définition

Si une partie A compte n éléments d'un ensemble E de N éléments, la part de A dans E est $t = \dfrac{n}{N}$, souvent exprimée en pourcentage : $t \times 100$ %.

◆ Propriété — coefficients multiplicateurs

- Augmenter une grandeur de t % revient à la multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$; la diminuer de t % revient à la multiplier par $1 - \dfrac{t}{100}$.
- Des évolutions successives correspondent au **produit** des coefficients multiplicateurs.
- L'évolution réciproque d'une évolution de coefficient c a pour coefficient $\dfrac{1}{c}$.

◆ Exemple corrigé

1) Un prix augmente de 20 % puis baisse de 15 %. Quelle est l'évolution globale ?

2) Après une hausse de 25 %, de quel pourcentage faut-il baisser pour revenir au prix initial ?

Solution.

1) $1{,}2 \times 0{,}85 = 1{,}02$: hausse globale de 2 %.

2) $\dfrac{1}{1{,}25} = 0{,}8$: il faut baisser de 20 %.

◆ Attention

Une hausse de 20 % suivie d'une baisse de 20 % ne ramène pas à la valeur initiale : $1{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}96$, soit une baisse de 4 %.

Fiche mémo

Notion	À retenir
Ensembles	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\sqrt{2}$ et π irrationnels
Racines	$\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$; $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$; conjugué pour le dénominateur
Identités	$(a\pm b)^2$; $(a+b)(a-b)$; $(a\pm b)^3$; $a^3\pm b^3$
Comparer	signe de la différence ; carrés pour des positifs
Valeur absolue	$\lvert x-a\rvert \le r \Leftrightarrow x\in[a-r\,;a+r]$
Moyennes	$h\le g\le m\le q$
Pourcentages	coefficient $1\pm\frac{t}{100}$; évolutions successives : produit