COURS • 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

Chapitre 9 — Activités numériques I

◆ **Sommaire**

- 1. Les ensembles de nombres
- 2. Division euclidienne – Divisibilité
- 3. Nombres premiers – Décomposition
- 4. PGCD de deux entiers
- 5. PPCM de deux entiers
- 6. Nombres premiers entre eux – Fractions irréductibles
- 7. Notation scientifique – Ordre de grandeur
- 8. Valeurs approchées – Troncature – Arrondi
- 9. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

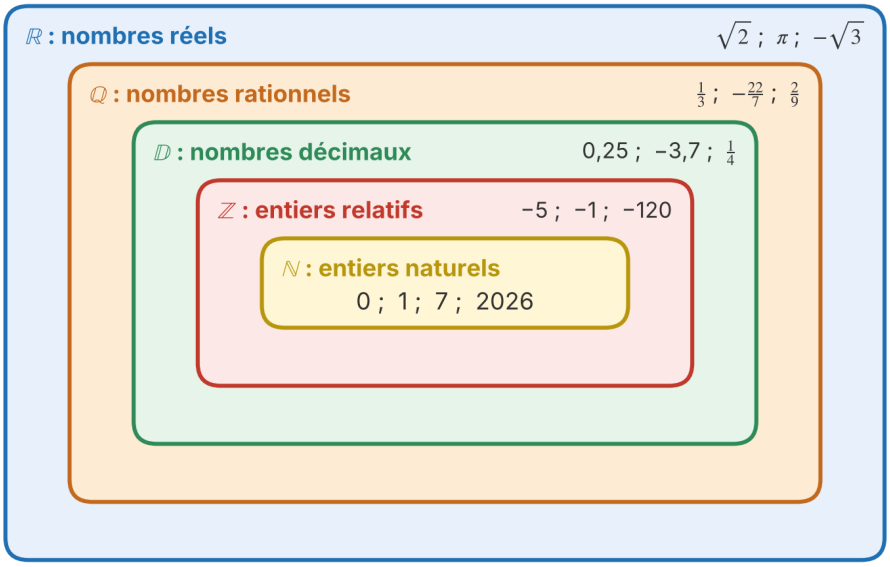
- Reconnaître les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et leurs inclusions.
- Effectuer une division euclidienne ; utiliser les critères de divisibilité.
- Reconnaître un nombre premier et décomposer un entier en produit de facteurs premiers.
- Calculer un PGCD et un PPCM ; rendre une fraction irréductible.
- Utiliser la notation scientifique, l'ordre de grandeur, les valeurs approchées et l'arrondi.

1 Les ensembles de nombres

◆ **Définition**

- $\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...
- $\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs : ... ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; ...
- $\mathbb{D}$: ensemble des nombres décimaux : nombres qui s'écrivent $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ (exemple : $-3{,}7 = \dfrac{-37}{10}$).
- $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels : nombres qui s'écrivent $\dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.
- $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels (tous les nombres de la droite graduée).

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



◆ **Attention**

$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ est rationnel mais **n'est pas décimal** : $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

$\sqrt{2}$ et π sont des réels **non rationnels** (on l'admet en 1ère année).

◆ **Démonstration — $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel**

Supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers naturels non nuls et la fraction irréductible. Alors $p^2 = 2q^2$: p^2 est pair, donc p est pair (le carré d'un impair est impair).

On écrit $p = 2k$: $4k^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2k^2$, donc q est pair aussi. La fraction $\frac{p}{q}$ serait simplifiable par 2 : contradiction.

2 Division euclidienne – Divisibilité

◆ **Définition — Division euclidienne**

Soient a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$. Il existe un **unique** couple d'entiers naturels $(q\,;r)$ tel que :

$$a = b \times q + r \qquad \text{et} \qquad 0 \leq r < b$$

a est le **dividende**, b le **diviseur**, q le **quotient** et r le **reste**.

◆ **Exemple corrigé**

Division euclidienne de 258 par 17 : $17\times15=255$ et $258-255=3$, donc $258=17\times15+3$ avec $0\leq3<17$.

Le quotient est $q=15$ et le reste est $r=3$.

◆ **Attention — le reste doit être strictement inférieur au diviseur**

L'égalité $155=17\times8+19$ est vraie, mais ce **n'est pas** la division euclidienne de 155 par 17 car $19\geq17$. La bonne écriture est $155=17\times9+2$.

◆ **Définition — Multiple - Diviseur**

On dit que b **divise** a (ou que a est un **multiple** de b) s'il existe un entier naturel k tel que $a=k\times b$.

Autrement dit : b divise a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

▸ Critères de divisibilité

Un entier est divisible par...	si et seulement si...	Exemple
2	son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8	$923\,864$
3	la somme de ses chiffres est divisible par 3	$72\,531$ (somme des chiffres : 18)
4	le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4	$1\,316$ ($16=4\times4$)
5	son chiffre des unités est 0 ou 5	$1\,231\,105$
9	la somme de ses chiffres est divisible par 9	$813\,543\,210$ (somme des chiffres : 27)
10	son chiffre des unités est 0	$4\,570$
25	ses deux derniers chiffres sont 00, 25, 50 ou 75	$3\,175$

◆ **Exemple corrigé — divisibilité par 6**

$53\,652$ est pair (divisible par 2) et $5+3+6+5+2=21$ est divisible par 3. Il est divisible par 2 et par 3, donc **par** 6.

Attention : ce raisonnement marche car 2 et 3 sont premiers entre eux. Être divisible par 2 et par 4 n'implique pas la divisibilité par 8 (exemple : 4).

3 Nombres premiers – Décomposition

◆ Définition — Nombre premier

Un entier naturel est **premier** s'il est différent de 1 et s'il possède **exactement deux diviseurs** : 1 et lui-même.

Nombres premiers inférieurs à 50 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47.

◆ Attention

- 0 et 1 ne sont **pas** premiers.
- 2 est le **seul** nombre premier pair.
- Un nombre impair n'est pas forcément premier : $9=3\times3$; $91=7\times13$.

◆ Propriété — Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers (et cette décomposition est unique à l'ordre près).

◆ Méthode — divisions successives par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, ...

On divise par le plus petit nombre premier possible, puis on recommence avec le quotient, jusqu'à obtenir 1. Exemple avec 360 :

Nombre	360	180	90	45	15	5	1
Divisé par	2	2	2	3	3	5	—

$$360=2^3\times3^2\times5$$

◆ Pour aller plus loin — astuce de calcul (complément)

Pour savoir si un entier $n\geq2$ est premier, il suffit de tester sa divisibilité par les nombres premiers p tels que $p^2\leq n$.

Exemple : 97 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 et $11^2=121>97$: donc 97 **est premier**.

4 PGCD de deux entiers

◆ Définition

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Le **plus grand commun diviseur** de a et b est le plus grand des diviseurs communs à a et b. On le note $\mathrm{PGCD}(a\,;b)$.

▸ Méthode 1 : liste des diviseurs

◆ **Exemple corrigé — PGCD(36 ; 24)**

$D_{36}=\{1;2;3;4;6;9;12;18;36\}$ et $D_{24}=\{1;2;3;4;6;8;12;24\}$.

$D_{36}\cap D_{24}=\{1;2;3;4;6;12\}$, donc $\mathrm{PGCD}(36;24)=12$.

▸ Méthode 2 : décomposition en facteurs premiers

◆ **Méthode**

$\mathrm{PGCD}(a;b)$ est le produit des facteurs premiers **communs**, chacun pris avec le **plus petit** exposant.

◆ **Exemple corrigé — PGCD(126 ; 210)**

$126=2\times3^2\times7$ et $210=2\times3\times5\times7$.

Facteurs communs : 2, 3 et 7 (avec le plus petit exposant) : $\mathrm{PGCD}(126;210)=2\times3\times7=42$.

▸ Méthode 3 : algorithme d'Euclide

◆ **Propriété**

Si $a=b\times q+r$ avec $r\neq0$, alors $\mathrm{PGCD}(a;b)=\mathrm{PGCD}(b;r)$. On répète les divisions euclidiennes : **le PGCD est le dernier reste non nul**.

Étape	Dividende	Diviseur	Division euclidienne	Reste
1	385	140	$385=140\times2+105$	105
2	140	105	$140=105\times1+35$	35
3	105	35	$105=35\times3+0$	0

Le dernier reste non nul est 35, donc **PGCD(385 ; 140) =** 35.

◆ **Démonstration — pourquoi l'algorithme d'Euclide fonctionne**

Si $a=bq+r$, tout diviseur commun de a et b divise $r=a-bq$, et tout diviseur commun de b et r divise $a=bq+r$. Les diviseurs communs de a et b sont donc ceux de b et r : $PGCD(a,b)=PGCD(b,r)$.

Les restes successifs sont des entiers naturels strictement décroissants : on arrive à un reste nul, et le dernier reste non nul est le PGCD.

◆ **Exemple corrigé**

Calculer $PGCD(385,140)$ puis $PPCM(385,140)$.

- $385=2\times140+105$; $140=1\times105+35$; $105=3\times35+0$. Donc $PGCD(385,140)=35$.
- $PPCM(385,140)=\dfrac{385\times140}{35}=1540$.
- Application : $\dfrac{385}{140}=\dfrac{385\div35}{140\div35}=\dfrac{11}{4}$ (fraction irréductible).

5 PPCM de deux entiers

◆ **Définition**

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Le **plus petit commun multiple** de a et b est le plus petit multiple commun non nul de a et b. On le note $\text{PPCM}(a\,;b)$.

◆ **Méthode — par la décomposition**

$\text{PPCM}(a\,;b)$ est le produit de **tous** les facteurs premiers (communs et non communs), chacun pris avec le **plus grand** exposant.

Exemple : $\text{PPCM}(126\,;210)=2\times3^2\times5\times7=630$.

◆ **Propriété**

$$\text{PGCD}(a\,;b)\times\text{PPCM}(a\,;b)=a\times b$$

- Vérification : $42\times630=26\,460$ et $126\times210=26\,460$.
- Si a est un multiple de b, alors $\text{PGCD}(a\,;b)=b$ et $\text{PPCM}(a\,;b)=a$.

◆ **Exemple corrigé — une situation concrète**

Deux sirènes envoient un signal, la première toutes les 20 s, la seconde toutes les 30 s. Elles démarrent ensemble.

Elles sonnent de nouveau ensemble après $\text{PPCM}(20\,;30)$ secondes. $20=2^2\times5$ et $30=2\times3\times5$, donc $\text{PPCM}=2^2\times3\times5=60$: **après 60 secondes**.

6 Nombres premiers entre eux – Fractions irréductibles

◆ **Définition**

Deux entiers naturels non nuls a et b sont **premiers entre eux** si leur seul diviseur commun est 1, c'est-à-dire $\text{PGCD}(a\,;b)=1$.

Une fraction $\dfrac{a}{b}$ est **irréductible** si $\text{PGCD}(a\,;b)=1$.

◆ **Méthode — rendre une fraction irréductible**

On calcule $\text{PGCD}(a\,;b)$ puis on divise le numérateur et le dénominateur par ce PGCD.

$$\text{PGCD}(385\,;140)=35 \text{ donc } \frac{385}{140}=\frac{385\div 35}{140\div 35}=\frac{11}{4}$$

◆ **Propriété — reconnaître un décimal**

Une fraction **irréductible** $\frac{a}{b}$ est un nombre décimal si et seulement si son dénominateur b ne possède pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5.

Exemple : $\text{PGCD}(18\,954\,;7\,800)=78$, donc $\frac{18\,954}{7\,800}=\frac{243}{100}=2{,}43\in\mathbb{D}$. En revanche $\frac{11}{6}\notin\mathbb{D}$ car $6=2\times 3$.

7 Notation scientifique – Ordre de grandeur

◆ **Définition**

Tout nombre décimal non nul x s'écrit de façon unique sous la forme $a\times 10^n$ où $n\in\mathbb{Z}$ et a est un décimal ayant **un seul chiffre non nul avant la virgule** ($1\leq a<10$ si $x>0$). C'est la **notation scientifique** de x.

L'**ordre de grandeur** de x s'obtient en arrondissant a à l'unité : $b\times 10^n$.

Nombre	Notation scientifique	Ordre de grandeur
$35\,215\,000$	$3{,}5215\times 10^7$	4×10^7
$78{,}3548$	$7{,}83548\times 10^1$	8×10^1
$0{,}542\,31$	$5{,}4231\times 10^{-1}$	5×10^{-1}
$0{,}000\,784\,5$	$7{,}845\times 10^{-4}$	8×10^{-4}

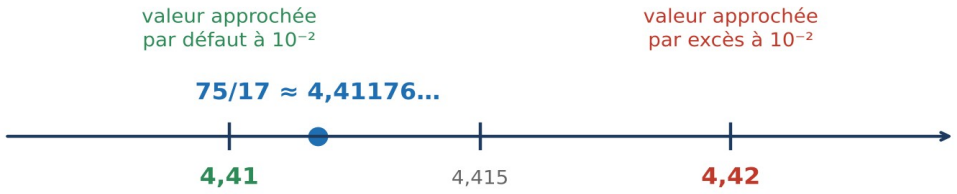
8 Valeurs approchées – Troncature – Arrondi

◆ **Définition**

Soit n un entier relatif. Le nombre décimal a est une **valeur approchée** du réel b à 10^n près si :

$$a-10^n\leq b\leq a+10^n$$

- Si $a\leq b$, on dit que a est une valeur approchée de b à 10^n près **par défaut**.
- Si $a\geq b$, on dit que a est une valeur approchée de b à 10^n près **par excès**.



75/17 est plus proche de 4,41 (il est avant le milieu 4,415) : l'arrondi à 10^{-2} est 4,41

◆ **Méthode — arrondir un nombre**

On conserve les chiffres jusqu'au rang demandé. Si le chiffre suivant est 0, 1, 2, 3 ou 4, on ne change rien ; s'il est 5, 6, 7, 8 ou 9, on ajoute 1 au dernier chiffre conservé.

Exemples : l'arrondi au centième de $829{,}3485$ est $829{,}35$; l'arrondi au millier de $5\,723\,438$ est $5\,723\,000$.

La **troncature** consiste simplement à « couper » le nombre au rang demandé (c'est une valeur approchée par défaut pour un nombre positif).

	$8{,}569\,201\,324\ldots$	$\frac{22}{7}\approx 3{,}142\,857\ldots$	$\pi\approx 3{,}141\,592\ldots$
Troncature à 10^{-2}	$8{,}56$	$3{,}14$	$3{,}14$
Troncature à 10^{-3}	$8{,}569$	$3{,}142$	$3{,}141$
Arrondi à l'unité	9	3	3
Arrondi à 10^{-2}	$8{,}57$	$3{,}14$	$3{,}14$
Arrondi à 10^{-3}	$8{,}569$	$3{,}143$	$3{,}142$

★ Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir**

- $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.
- Division euclidienne : $a=bq+r$ avec $0\le r<b$; b divise $a \iff r=0$.
- PGCD : facteurs **communs**, **plus petit** exposant — ou dernier reste non nul (Euclide).
- PPCM : **tous** les facteurs, **plus grand** exposant.
- $\mathrm{PGCD}(a\,;b)\times\mathrm{PPCM}(a\,;b)=a\times b$.
- $\frac{a}{b}$ irréductible $\iff \mathrm{PGCD}(a\,;b)=1$; décimale $\iff$ dénominateur (irréductible) de la forme $2^m\times 5^p$.
- Notation scientifique : $a\times 10^n$ avec un seul chiffre non nul avant la virgule.

◆ **Pour aller plus loin — un petit défi d'olympiade**

Montrer que pour tout entier naturel n, les entiers n et $n+1$ sont premiers entre eux.

Indication : un diviseur commun d de n et $n+1$ divise leur différence $(n+1)-n=1$.