COURS • 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

Chapitre 8 — Sections planes d'un solide

◆ **Sommaire**

- 1. Solides usuels : aires et volumes
- 2. Sections planes
- 3. Réduction : section parallèle à la base
- 4. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Connaître les solides usuels et les formules d'aires et de volumes.
- Reconnaître et dessiner la section d'un solide par un plan.
- Utiliser le coefficient de réduction k : longueurs × k, aires × k^2, volumes × k^3.

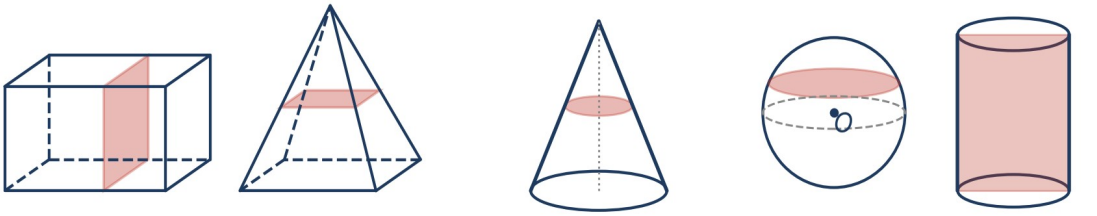
1 Solides usuels : aires et volumes

Solide	Volume	Aire / remarque
Cube d'arête a	$V = a^3$	aire totale $6a^2$
Pavé droit $L \times l \times h$	$V = L \times l \times h$	aire totale $2(L \times l + l \times h + L \times h)$
Prisme droit	$V = B \times h$	B : aire de la base
Cylindre de rayon R	$V = \pi R^2 h$	aire latérale $2\pi Rh$
Pyramide, tétraèdre	$V = \frac{1}{3} B \times h$	B : aire de la base
Cône de révolution	$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$	génératrice $l = \sqrt{R^2 + h^2}$
Boule / sphère de rayon R	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$	aire de la sphère $4\pi R^2$

◆ **Exemple corrigé**

Une sphère de diamètre 50 cm a pour aire $4\pi \times 25^2 = 2\,500\pi \approx 7\,854$ cm² et la boule correspondante pour volume $\frac{4}{3}\pi \times 25^3 \approx 65\,450$ cm³.

2 Sections planes



pavé : rectangle | pyramide : même polygone | cône : cercle | sphère : cercle | cylindre : rectangle

◆ Propriété — à retenir

- **Pavé droit** : la section par un plan parallèle à une face est un rectangle **isométrique** à cette face ; par un plan contenant une arête, c'est un rectangle.
- **Pyramide** : la section par un plan parallèle à la base est un polygone **de même nature** que la base (réduction de la base).
- **Cylindre** : la section par un plan parallèle à une base est un cercle de même rayon ; par un plan contenant l'axe, c'est un rectangle.
- **Cône de révolution** : la section par un plan parallèle à la base est un **cercle**.
- **Sphère** : toute section plane est un **cercle** ; si le plan passe par le centre, c'est un **grand cercle**.

◆ Propriété — section d'une sphère

Si une sphère de centre O et de rayon R est coupée par un plan situé à la distance $d < R$ de O, la section est un cercle de rayon r tel que :

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

Exemple : $R = 25$ cm et $d = 20$ cm donnent $r = \sqrt{625 - 400} = 15$ cm.

◆ Exemple corrigé — section d'une sphère

Une sphère de centre O et de rayon 5 cm est coupée par un plan situé à 3 cm de O. Déterminer la section.

Solution. La section est un cercle dont le centre H est le projeté orthogonal de O sur le plan. Pour un point M du cercle, le triangle OHM est rectangle en H : $HM^2 = OM^2 - OH^2 = 25 - 9 = 16$. La section est le cercle de centre H et de rayon 4 cm.

3 Réduction : section parallèle à la base

◆ Propriété

Une pyramide (ou un cône) de hauteur h est coupée par un plan parallèle à la base, à la distance d du sommet. La petite pyramide (ou le petit cône) est une **réduction** de rapport $k = \dfrac{d}{h}$:

- les longueurs sont multipliées par k ;
- les aires sont multipliées par k^2 ;
- les volumes sont multipliés par k^3.

◆ **Exemple corrigé**

Une pyramide de hauteur 38 cm a pour base un carré de 25 cm de côté. On la coupe à 8 cm du sommet : $k = \frac{8}{38} = \frac{4}{19}$. La section est un carré de côté $25 \times \frac{4}{19} \approx 5{,}26$ cm et le petit volume vaut $V \times k^3 \approx 7\,917 \times \frac{64}{6\,859} \approx 73{,}9$ cm³.

◆ **Attention**

Un verre conique rempli aux $\frac{4}{5}$ de sa hauteur n'est pas rempli aux $\frac{4}{5}$ de son volume : il contient $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0{,}512$ du volume, soit un peu plus de la moitié.

◆ **Exemple corrigé — pyramide coupée parallèlement à la base**

Une pyramide a une hauteur de 12 cm et une base d'aire 36 cm². On la coupe par un plan parallèle à la base, à 4 cm du sommet. Calculer l'aire de la section et le volume de la petite pyramide.

Solution. La petite pyramide est une réduction de rapport $k = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. L'aire de la section vaut $36 \times \frac{1}{9} = 4$ cm². Le volume de la grande pyramide est $\frac{36 \times 12}{3} = 144$ cm³, donc celui de la petite vaut $144 \times \frac{1}{27} = \frac{16}{3}$ cm³.

★ Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir**

- Pyramide et cône : $V = \frac{1}{3} B \times h$; boule : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; sphère : $A = 4\pi R^2$.
- Section parallèle à la base : même forme que la base (cercle pour cône et cylindre).
- Section d'une sphère : cercle de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$.
- Réduction de rapport k : longueurs × k, aires × k^2, volumes × k^3.

◆ **Pour aller plus loin — un petit défi d'olympiade**

Trois balles de tennis identiques sont empilées dans une boîte cylindrique qu'elles touchent exactement. Quelle fraction du volume de la boîte est vide ?