COURS • 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

Chapitre 7 — Quart de tour

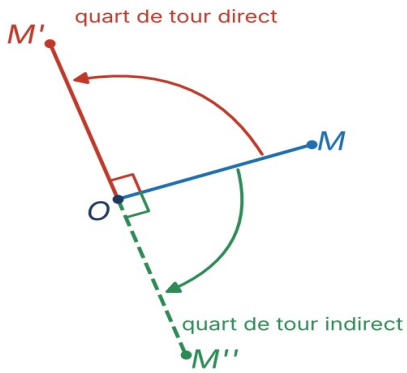
◆ **Sommaire**

- 1. Définition
- 2. Propriétés
- 3. Démontrer avec un quart de tour
- 4. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Construire l'image d'un point et d'une figure par un quart de tour direct ou indirect.
- Connaître les propriétés du quart de tour (distances, alignement, droites perpendiculaires).
- Utiliser un quart de tour pour démontrer une égalité de longueurs ou une perpendicularité.

1 Définition



◆ **Définition**

Soit O un point. On convient que le **sens direct** est le sens contraire des aiguilles d'une montre, et le **sens indirect** celui des aiguilles d'une montre.

- L'image d'un point $M \neq O$ par le **quart de tour direct** de centre O est le point M' tel que $OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = 90°$, en tournant dans le sens direct.
- Même définition pour le **quart de tour indirect**, en tournant dans le sens indirect.
- L'image du centre O est O lui-même.

◆ **Propriété — triangle rectangle isocèle**

ABC est rectangle isocèle en A **si et seulement si** C est l'image de B par un quart de tour de centre A.

◆ Méthode — construire l'image d'un point

On trace le cercle de centre O passant par M, puis la perpendiculaire à (OM) en O ; M' est le point d'intersection situé du bon côté (selon le sens).

2 Propriétés

◆ Propriété — un quart de tour conserve...

- les **distances** : si M' et N' sont les images de M et N, alors $M'N' = MN$;
- l'**alignement** et les **milieux** ;
- les **angles**, les **aires** et les **périmètres**.

◆ Propriété — image des figures usuelles

- L'image d'un **segment** est un segment de même longueur.
- L'image d'une **droite** est une droite qui lui est **perpendiculaire**.
- L'image d'un **cercle** de centre I et de rayon r est le cercle de centre I' (image de I) et de même rayon r.
- Un **polygone** et son image sont superposables.

◆ Méthode — construire l'image d'une droite D

On choisit un point A de D, on construit son image A', puis on trace la perpendiculaire à D passant par A'.

◆ Démonstration — un quart de tour conserve les distances

Soit Q un quart de tour de centre O, $M' = Q(M)$ et $N' = Q(N)$ (avec M, N, O non alignés). On a $OM' = OM$ et $ON' = ON$.

Les angles $\widehat{MOM'}$ et $\widehat{NON'}$ mesurent tous deux $90°$ et sont de même sens ; en retranchant (ou en ajoutant) l'angle commun $\widehat{NOM'}$, on obtient $\widehat{MON} = \widehat{M'ON'}$.

Les triangles OMN et $OM'N'$ ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux : ils sont isométriques, donc $M'N' = MN$.

3 Démontrer avec un quart de tour

◆ Méthode — égalité de longueurs et perpendicularité

Si un quart de tour transforme B en D et E en G, alors $[BE]$ a pour image $[DG]$: donc $BE = DG$ **et** $(BE) \perp (DG)$.

◆ **Exemple corrigé — deux carrés de même sommet**

$ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés de même sens. Le quart de tour de centre A qui transforme B en D transforme E en G. Donc $BE = DG$ et $(BE) \perp (DG)$.

◆ **Exemple corrigé — dans un carré**

$ABCD$ est un carré de centre O, I et J les milieux de $[BC]$ et $[DC]$. Le quart de tour de centre O qui transforme A en B transforme B en C et C en D, donc I (milieu de $[BC]$) en J (milieu de $[CD]$). Ainsi $[AI]$ a pour image $[BJ]$: $(AI) \perp (BJ)$ et $AI = BJ$.

◆ **Méthode — problème de construction**

Pour construire un triangle OAB rectangle isocèle en O avec $A \in D$ et $B \in D'$: B est l'image de A par un quart de tour de centre O, donc B appartient à l'image de D ; B est l'intersection de D' et de cette image.

◆ **Exemple corrigé — triangle rectangle isocèle dans un carré**

$ABCD$ est un carré de sens direct et de centre O. $M \in [AB]$ et $N \in [BC]$ sont tels que $AM = BN$. Montrer que le triangle OMN est rectangle et isocèle en O.

Solution. Soit Q le quart de tour direct de centre O. Comme $OA = OB = OC$ et $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 90°$, on a $Q(A) = B$ et $Q(B) = C$; l'image du segment $[AB]$ est donc $[BC]$.

Soit $M' = Q(M)$: $M' \in [BC]$ et $BM' = AM$ (conservation des distances), donc $BM' = BN$ et $M' = N$. Ainsi $ON = OM$ et $\widehat{MON} = 90°$: le triangle OMN est rectangle et isocèle en O.

★ Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir**

- M' image de M : $OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = 90°$ (sens direct ou indirect).
- Distances, alignement, angles, aires conservés.
- Droite ⟶ droite **perpendiculaire** ; cercle ⟶ cercle de même rayon.
- Pour montrer $BE = DG$ et $(BE) \perp (DG)$, chercher un quart de tour qui envoie $[BE]$ sur $[DG]$.

◆ **Pour aller plus loin — un petit défi d'olympiade**

Sur les côtés d'un triangle quelconque ABC, on construit extérieurement les carrés $ABDE$ et $ACFG$. Montrer que $EC = BG$ et $(EC) \perp (BG)$.