COURS • 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

# Chapitre 6 — Activités dans un repère

◆ **Sommaire**


- 1. Repère d'une droite
- 2. Repère du plan – Coordonnées et composantes
- 3. Vecteurs colinéaires – Alignement
- 4. Distance dans un repère orthonormé
- 5. Fiche mémo


◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Utiliser l'abscisse d'un point et la mesure algébrique sur une droite graduée.
- Calculer les coordonnées d'un point, les composantes d'un vecteur, le milieu d'un segment.
- Traduire l'égalité et la colinéarité de vecteurs par les composantes ; démontrer un alignement, un parallélisme.
- Calculer une distance dans un repère orthonormé.

## 1 Repère d'une droite

◆ **Définition**

Soit $\Delta$ une droite munie d'un repère $(O\,;\vec{OI})$. L'**abscisse** d'un point $M$ de $\Delta$ est l'unique réel $x$ tel que $\vec{OM}=x\,\vec{OI}$.

Si $A$ et $B$ ont pour abscisses $x_A$ et $x_B$, la **mesure algébrique** de $\vec{AB}$ est $\overline{AB}=x_B-x_A$, et $\vec{AB}=(x_B-x_A)\vec{OI}$.

◆ **Propriété**

- Le milieu de $[AB]$ a pour abscisse $\dfrac{x_A+x_B}{2}$.
- Si $OI=1$ (repère normé) : $AB=|x_B-x_A|$.
- Relation de Chasles : $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.

◆ **Exemple corrigé**

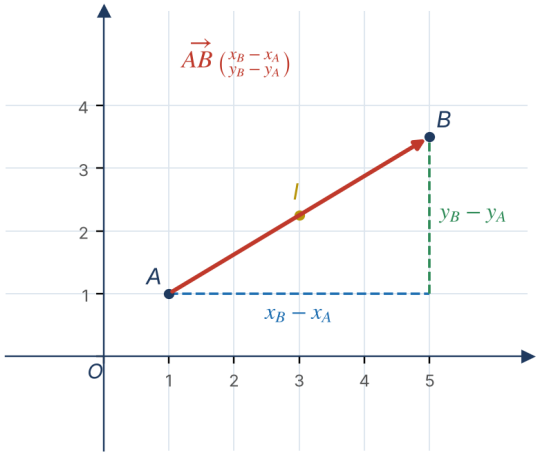
$x_A=2$ et $x_B=-2$ : $\overline{AB}=-2-2=-4$, $AB=4$ et le milieu de $[AB]$ est l'origine $O$.

## 2 Repère du plan – Coordonnées et composantes

### ◆ Définition

Si $O$, $I$, $J$ ne sont pas alignés, $(O\,;\vec{OI}\,;\vec{OJ})$ est un **repère cartésien** du plan. Les **coordonnées** $(x\,;y)$ d'un point $M$ sont les réels tels que $\vec{OM}=x\,\vec{OI}+y\,\vec{OJ}$ ; $x$ est l'abscisse et $y$ l'ordonnée.

Le repère est **orthogonal** si $(OI)\perp(OJ)$, **orthonormé** si de plus $OI=OJ=1$.




### ◆ Propriété — composantes d'un vecteur

Si $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$, le vecteur $\vec{AB}$ a pour **composantes** $\vec{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ :

$\vec{AB}=(x_B-x_A)\vec{OI}+(y_B-y_A)\vec{OJ}$.

### ◆ Propriété — conséquences

- Deux vecteurs sont **égaux** si et seulement s'ils ont les **mêmes composantes**.
- Le **milieu** $I$ de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $k$ réel, alors $k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$ ; les composantes d'une somme sont les sommes des composantes.

### ◆ Exemple corrigé — quatrième sommet d'un parallélogramme

$A(1\,;4)$, $B(-3\,;-2)$, $C(2\,;-5)$. $ABCD$ est un parallélogramme $\iff \vec{AB}=\vec{DC}\iff$ $\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-x_D\\-5-y_D\end{pmatrix}$, d'où $D(6\,;1)$.

### ◆ Démonstration — coordonnées du milieu

$I$ est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\vec{AI}=\vec{IB}$, c'est-à-dire $x_I-x_A=x_B-x_I$ et $y_I-y_A=y_B-y_I$.

On obtient $x_I=\frac{x_A+x_B}{2}$ et $y_I=\frac{y_A+y_B}{2}$.

## 3 Vecteurs colinéaires – Alignement

◆ **Propriété**

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leurs composantes sont proportionnelles, c'est-à-dire :

$$xy'-x'y=0$$

◆ **Méthode — trois points alignés**

$A, B, C$ sont alignés $\iff$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Exemple : $A(2;3), E(-2;1), C(3;2)$ : $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $(-4)(-1)-1\times(-2)=6\neq 0$ : **non alignés**.

◆ **Méthode — deux droites parallèles**

$(AB)\parallel(CD)\iff$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

◆ **Exemple corrigé**

Dans un repère, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$. Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?

**Solution.** $2\times 6-(-3)\times(-4)=12-12=0$ : les vecteurs sont colinéaires ; d'ailleurs $\vec{v}=-2\vec{u}$.

## 4 Distance dans un repère orthonormé

◆ **Propriété**

Dans un repère **orthonormé**, pour $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}\qquad OM=\sqrt{x^2+y^2}$$

◆ **Méthode — nature d'un triangle**

On calcule les trois longueurs. Pour un angle droit, on utilise la **réciproque du théorème de Pythagore**. Exemple : $O(0;0), A(3;1), B(-1;3)$ : $OA=OB=\sqrt{10}$ et $AB=\sqrt{20}$ ; $OA^2+OB^2=20=AB^2$ : $OAB$ est **isocèle rectangle en** $O$.

◆ **Attention**

La formule de la distance n'est valable que dans un repère **orthonormé**.

◆ **Démonstration — formule de la distance**

Dans un repère orthonormé, soit $C(x_B ; y_A)$. Le triangle $ABC$ est rectangle en $C$, avec $AC = |x_B - x_A|$ et $CB = |y_B - y_A|$. Le théorème de Pythagore donne $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.

◆ **Exemple corrigé**

Dans un repère orthonormé, $A(1;2)$ et $B(4;-2)$. Calculer $AB$ et les coordonnées du milieu $I$ de $[AB]$.

**Solution.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$, donc $AB = \sqrt{9+16} = 5$ ; $I\left(\frac{5}{2};0\right)$.

## ★ Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir**

- Droite graduée : $\overline{AB} = x_B - x_A$ ; $AB = |x_B - x_A|$.
- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$ ; milieu $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.
- Colinéarité : $xy' - x'y = 0$.
- Repère orthonormé : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

◆ **Pour aller plus loin — un petit défi d'olympiade**

Dans un repère orthonormé, on donne $A(2;1)$ et la droite $D$ d'équation $y = x + 2$. Trouver le point $M$ de $D$ le plus proche de $A$. *(Indication : exprimer $AM^2$ en fonction de l'abscisse $x$ de $M$ et utiliser la forme canonique.)*