EXERCICES • 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

Chapitre 4-5 — Vecteurs et translations

1 Égalité vectorielle et translation

Exercice 1

$ABCD$ est un carré de centre O ; E, F, G, H sont les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].

1) Nommer deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{DH}$, puis deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{HE}$.

2) Nommer tous les vecteurs de la figure égaux à $\overrightarrow{OF}$.

Exercice 2

Tracer un triangle ABC. Construire le point D symétrique de A par rapport à B, et le point E symétrique de C par rapport à B. Montrer que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{ED}$.

Exercice 3

$ABCD$ est un parallélogramme. Quelle est l'image de la droite (AB) par la translation de vecteur :

a) $\overrightarrow{AC}$?

b) $\overrightarrow{AD}$?

c) $\overrightarrow{BC}$?

d) $\overrightarrow{DC}$?

Exercice 4

ABC est un triangle. On construit $I=t_{\overrightarrow{BA}}(C)$ et $J=t_{\overrightarrow{CA}}(B)$. Montrer que A est le milieu de [IJ].

2 Somme de vecteurs

Exercice 5

Simplifier : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$; $\vec{v}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{NP}$; $\vec{w}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$; $\vec{z}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AB}$.

Exercice 6

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. Répondre par vrai ou faux :

a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC}$

b) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Exercice 7

Soit ABC un triangle. Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, puis le point F tel que $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{FC}$. Montrer que F est le milieu de [AE].

3 Produit par un réel et colinéarité

Exercice 8

Soit ABC un triangle. Construire les points I milieu de $[BC]$, F tel que $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et E tel que $\overrightarrow{AE}=-2\overrightarrow{AB}$.

Exercice 9

Soit $ABCD$ un parallélogramme, I le milieu de $[BC]$ et E le symétrique de A par rapport à I. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{BA}$.

Exercice 10

Soient A, B, C trois points non alignés et M, N définis par $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AB}$. Exprimer $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Les points A, M, N sont-ils alignés ?

Exercice 11

$ABCD$ est un parallélogramme et x un réel non nul. M est le point de (DC) tel que $\overrightarrow{DM}=x\overrightarrow{DC}$ et M' le point de (BC) tel que $\overrightarrow{BM'}=\frac{1}{x}\overrightarrow{BC}$. Montrer que les points A, M et M' sont alignés.

Exercice 12

Soient A, B, C trois points quelconques. Démontrer que les vecteurs $\vec{u}=(1-\sqrt{5})\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=(1+\sqrt{5})\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Exercice 13

Soit $ABCD$ un parallélogramme. I est le milieu de $[BC]$, E est défini par $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et A' est le milieu de $[AC]$.

1) Construire les points I, A' et E.

2) Montrer que $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$ et que $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$.

3) En déduire que les points D, E et I sont alignés.

4) Construire les points T et H tels que $\overrightarrow{AT}=4\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BH}=3\overrightarrow{BC}$. Montrer que (TH) est parallèle à (BA').

Exercice 14

Soit $ABCD$ un parallélogramme et M le point défini par $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

1) Montrer que $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$.

2) Déterminer les réels x et y tels que $\overrightarrow{DM}=x\overrightarrow{DC}+y\overrightarrow{DB}$.

3) Déterminer les réels x' et y' tels que $\overrightarrow{DM}=x'\overrightarrow{DC}+y'\overrightarrow{DA}$.

Exercice 15

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires et A un point du plan. On pose $B=t_{\vec{u}}(A)$, $C=t_{\vec{v}}(B)$ et $D=t_{-\vec{u}}(C)$.

1) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2) Déterminer $t_{-\vec{v}}(D)$.

3) Quelle condition doivent vérifier $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour que $ABCD$ soit un losange ? un carré ?

Exercice 16

1) Construire un triangle OBC isocèle de sommet principal O tel que $OB=3$ cm et $\widehat{BOC}=50°$. Placer un point O' à l'extérieur du triangle, puis construire les images B' et C' de B et C par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.

2) Tracer le cercle (ζ) de centre O' et de rayon 3 cm. Montrer que B' et C' sont sur (ζ).

3) A est un point de (ζ) situé du même côté de la droite $(B'C')$ que O'. Calculer $\widehat{B'AC'}$.

Exercice 17

Étant donné un triangle ABC, à chaque réel k on associe les points M et N définis par :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+(1-k)\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+(1-k)\overrightarrow{AB}$$

1) Placer les points M et N correspondant à $k=2$.

2) Montrer que, pour tout réel k, les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

3) Déterminer k pour que :

a) $M=N$;

b) $BCMN$ soit un parallélogramme ;

c) $BCNM$ soit un parallélogramme.

Exercice 18

1) Soient un cercle (C) et un vecteur $\vec{u}$. Construire deux points A et B du cercle (C) tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$. Discuter.

2) Soient deux droites sécantes D et D' et un vecteur $\vec{u}$. Construire un point A de D et un point B de D' tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.

Exercice 19

Soit ABC un triangle, I, J, K les milieux de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

1) Montrer qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ et que $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

2) En déduire que les trois médianes du triangle sont concourantes.

3) Montrer que $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ alors $ABCD$ est un parallélogramme.	☐	☐
2. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.	☐	☐
3. L'image d'une droite par une translation lui est parallèle.	☐	☐
4. Si $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB}$ alors A, B, C sont alignés.	☐	☐
5. Une translation change la longueur d'un segment.	☐	☐