COURS • 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

Chapitre 4-5 — Vecteurs et translations

◆ **Sommaire**

- 1. Vecteurs et égalité vectorielle
- 2. Translation
- 3. Somme de deux vecteurs
- 4. Produit d'un vecteur par un réel – Colinéarité
- 5. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Reconnaître et utiliser l'égalité de deux vecteurs ; construire l'image d'une figure par une translation.
- Additionner des vecteurs (relation de Chasles, règle du parallélogramme).
- Multiplier un vecteur par un réel ; utiliser la colinéarité pour montrer un parallélisme ou un alignement.

1 Vecteurs et égalité vectorielle

◆ **Définition**

Un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par sa **direction** (celle de la droite (AB)), son **sens** (de A vers B) et sa **longueur** (ou norme) AB.

Les bipoints $(A\,;B)$ et $(C\,;D)$ représentent le même vecteur si les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu. On écrit $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$.

◆ **Propriété**

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ équivaut à $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.
- Si A, B, C ne sont pas alignés : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \iff ABCD$ est un **parallélogramme**.
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC} \iff B$ est le **milieu** de $[AC]$; $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB} \iff M=B$.

◆ **Attention — ordre des lettres**

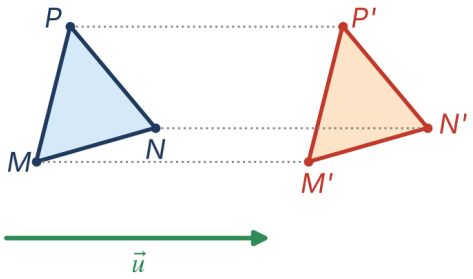
$ABCD$ parallélogramme se traduit par $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (et non $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$) : on « suit le tour » du quadrilatère.

2 Translation

◆ Définition

Soient A et B deux points. L'image d'un point M par la **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$, notée $t_{\overrightarrow{AB}}$, est le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

En particulier $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$, et l'image de B est le symétrique de A par rapport à B.



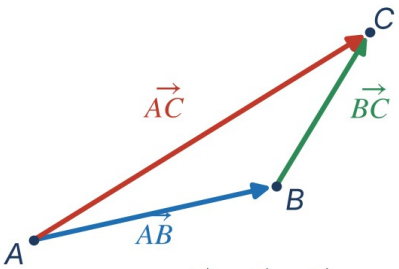
◆ Propriété — une translation conserve...

- les **distances** : si M' et N' sont les images de M et N, alors $M'N' = MN$;
- l'image d'une **droite** est une droite qui lui est **parallèle** ; celle d'un **segment** est un segment de même longueur ;
- l'image d'un **cercle** de centre I et de rayon r est le cercle de centre $t(I)$ et de même rayon r ;
- un **polygone** et son image sont superposables : mêmes longueurs, mêmes angles, même aire.

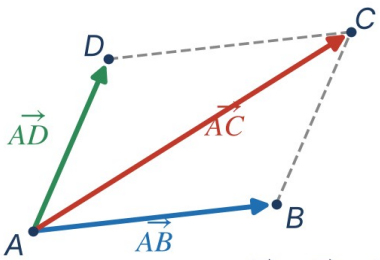
◆ Méthode — construire une figure à l'aide d'une translation

Pour construire deux points $A \in (C)$ et $B \in (C)$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$: le point B appartient à (C) **et** à l'image (C') de (C) par $t_{\vec{u}}$. On trace (C'), on prend B sur $(C) \cap (C')$, puis $A = t_{-\vec{u}}(B)$.

3 Somme de deux vecteurs



Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Parallélogramme : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

◆ Propriété — relation de Chasles

Pour tous points A, B, C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

◆ Propriété — règle du parallélogramme

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC} \iff ABCD$ est un parallélogramme (si A, B, D non alignés).

◆ Propriété — vecteurs opposés – milieu

- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$: on note $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.
- I est le milieu de $[AB] \iff \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \iff \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$.
- Si I est le milieu de $[BC]$: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$.

◆ Exemple corrigé

Simplifier $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$: on regroupe pour appliquer Chasles : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

◆ Démonstration — $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$ si I est le milieu de $[BC]$

Par la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})+(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})=2\overrightarrow{AI}+(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC})$.

Comme I est le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IB}$, donc $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$.

◆ Exemple corrigé

Simplifier $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$.

Solution. En réordonnant : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

4 Produit d'un vecteur par un réel – Colinéarité

◆ Définition

Soient $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ non nul et α un réel. Le vecteur $\alpha\vec{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{AM}$ où M est le point d'abscisse α dans le repère $(A\,;B)$ de la droite (AB).

- si $\alpha>0$: $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de **même sens** et $AM=\alpha\,AB$;
- si $\alpha<0$: $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de **sens contraires** et $AM=|\alpha|\,AB$.

◆ Définition — vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont **colinéaires** si l'un est le produit de l'autre par un réel : $\vec{v}=k\vec{u}$. Par convention, $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

◆ Propriété — parallélisme et alignement

- $(AB)\parallel(CD) \iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- A, B, C sont **alignés** $\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

◆ Méthode — montrer un alignement

On exprime $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ à l'aide des mêmes vecteurs de base (Chasles), puis on cherche un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$.

◆ Exemple corrigé

$ABCD$ parallélogramme, $\overrightarrow{DM} = x\,\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BM'} = \frac{1}{x}\overrightarrow{BC}$ ($x \neq 0$). Alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + x\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{x}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{x}\overrightarrow{AM}$: A, M, M' **sont alignés**.

◆ Exemple corrigé

ABC est un triangle. On place E et F tels que $\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 2\,\overrightarrow{AC}$. Montrer que $(EF) \parallel (BC)$.

Solution. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = -2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = 2\,\overrightarrow{BC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, donc $(EF) \parallel (BC)$ (et $EF = 2\,BC$).

★ Fiche mémo

◆ L'essentiel à retenir

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff ABCD$ parallélogramme ; $t_{\overrightarrow{AB}}(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.
- Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; milieu : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AI}$.
- Colinéaires : $\vec{v} = k\,\vec{u} \implies$ parallélisme ou alignement.
- La translation conserve distances, angles, parallélisme, aires.

◆ Pour aller plus loin — un petit défi d'olympiade

ABC est un triangle et G le point tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ où I est le milieu de $[BC]$: G est le centre de gravité.