EXERCICES • 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

Chapitre 3 — Trigonométrie

1 Rapports trigonométriques

Exercice 1

ABC est rectangle en A et $[AH]$ est sa hauteur. Écrire de deux façons $\cos\hat{B}$, $\sin\hat{B}$ et $\tan\hat{B}$ (dans ABC et dans ABH).

Exercice 2

ABC est rectangle en A avec $AB=12$ et $\widehat{ABC}=35\,°$. Calculer des valeurs approchées à $0{,}1$ près de AC et BC.

Exercice 3

ABC est isocèle en A avec $AB=5$ cm et $BC=9$ cm. Calculer $\cos\hat{B}$, une valeur approchée de $\hat{B}$ à $0{,}01$ près, puis l'aire de ABC.

2 Relations trigonométriques

Exercice 4

α est un angle aigu tel que $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$. Calculer $\cos\alpha$ et $\tan\alpha$.

Exercice 5

Montrer que pour tout angle aigu α :

a) $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$

b) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

Exercice 6

Sans calculatrice, calculer : $A=\sin 30\,°+\cos 60\,°$; $B=\cos^2 45\,°+\tan 45\,°$; $C=\sin 60\,°\times\tan 30\,°$.

3 Problèmes et relations métriques

Exercice 7

Un panneau annonce une descente de 15 % : sur un parcours horizontal de 100 m, l'altitude baisse de 15 m. Quel angle la route fait-elle avec l'horizontale ?

Exercice 8

ABC est rectangle en A avec $AB=5$; $[AH]$ est la hauteur et $BH=4$. Calculer AH, BC, HC et AC.

Exercice 9

Construire un angle aigu $\widehat{xOy}$ tel que $\sin\widehat{xOy}=\frac{2}{3}$. Expliquer la construction.

Exercice 10

Soit α un angle aigu. Montrer que :

a) $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}$ b) $\frac{1+\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ c) $2-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha\left(2+\tan^2\alpha\right)$

d) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ e) $\left(\cos\alpha+\sin\alpha+1\right)\left(\cos\alpha+\sin\alpha-1\right)=2\sin\alpha\cos\alpha$

Exercice 11

Soit α un angle aigu vérifiant $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{5}{4}$. Calculer $\sin\alpha\times\cos\alpha$, $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$ et $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$.

Exercice 12

Soit ABC un triangle rectangle en A. On pose $BC=a$, $CA=b$ et $AB=c$. Montrer que $a=b\cos\hat{C}+c\cos\hat{B}$.

Exercice 13

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus ; O et R sont le centre et le rayon de son cercle circonscrit et H le milieu de $[BC]$. On pose $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$.

1) Montrer que $\widehat{BAC}=\widehat{BOH}$.

2) En considérant le triangle BOH, montrer que $a=2R\sin\widehat{BAC}$.

3) En déduire que $\frac{a}{\sin\widehat{BAC}}+\frac{b}{\sin\widehat{CBA}}+\frac{c}{\sin\widehat{ACB}}=6R$.

Exercice 14

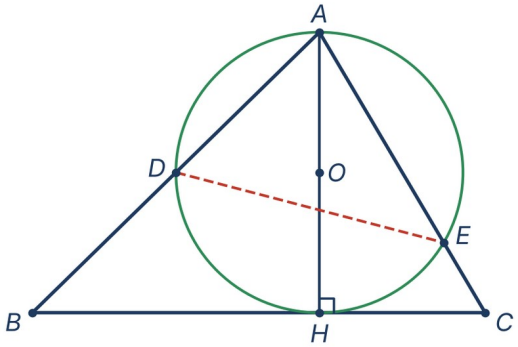
(γ) est un cercle de centre O et de rayon r ; ABC est un triangle inscrit dans (γ) dont l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu ; H est le projeté orthogonal de A sur (BC) et la droite (AO) recoupe (γ) en D. On pose $AB=c$, $AC=b$ et $AH=h$.

1) Montrer que $\widehat{ADB}=\widehat{ACB}$ et que le triangle ABD est rectangle en B.

2) En exprimant $\sin\widehat{ACB}$ de deux façons, démontrer que $bc=2rh$.

Exercice 15

ABC est un triangle, H le projeté orthogonal de A sur (BC), $\widehat{BAH}=45°$, $\widehat{HAC}=30°$ et $AH=6$ cm. Le cercle (C) de diamètre $[AH]$ et de centre O coupe (AB) en D et (AC) en E.



1) a) Calculer AB et AC.

b) Montrer que AHE est un triangle rectangle.

c) Montrer que $AE = 3\sqrt{3}$ cm et $AD = 3\sqrt{2}$ cm.

2) Démontrer que $\widehat{AHE} = \widehat{ADE} = 60\,°$ et que $\widehat{ACB} = 60\,°$.

3) a) Vérifier que $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

b) On place D' sur $[AC]$ et E' sur $[AB]$ tels que $AD' = AD$ et $AE' = AE$. Montrer que $(D'E') \parallel (BC)$ et que $D'E' = DE$. S'agit-il d'une réduction ou d'un agrandissement ?

4) a) Calculer BC (on pourra couper par H).

b) En déduire que $DE = \dfrac{3}{2}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$ cm.

5) On note F le point diamétralement opposé à D sur (C).

a) Démontrer que $\widehat{DFE} = 75\,°$.

b) En déduire que $\sin 75\,° = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right)$.

Exercice 16

1) Montrer que pour tout angle aigu α : $1 < \sin\alpha + \cos\alpha \leq \sqrt{2}$.

2) Existe-t-il un angle aigu α tel que $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$?

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Pour un angle aigu, $\cos\alpha$ peut valoir $1{,}2$.	☐	☐
2. $\sin 30\,° = \cos 60\,°$.	☐	☐
3. $\tan 45\,° = 1$.	☐	☐
4. Si $\sin\alpha = 0{,}6$ alors $\cos\alpha = 0{,}4$.	☐	☐