COURS • 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

Chapitre 3 — Trigonométrie

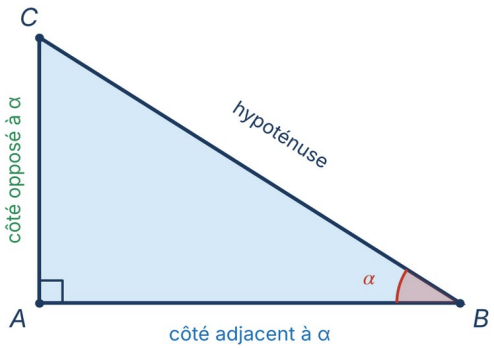
◆ **Sommaire**

- 1. Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu
- 2. Relations trigonométriques
- 3. Angles remarquables et calculatrice
- 4. Relations métriques dans le triangle rectangle
- 5. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Définir et calculer le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu.
- Utiliser les relations $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ et $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
- Connaître les valeurs pour $30°$, $45°$, $60°$; utiliser la calculatrice.
- Utiliser les relations métriques dans un triangle rectangle.

1 Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu



◆ **Définition — dans un triangle ABC rectangle en A**

$$\cos\widehat{ABC}=\frac{AB}{BC} \qquad \sin\widehat{ABC}=\frac{AC}{BC} \qquad \tan\widehat{ABC}=\frac{AC}{AB}$$

Moyen mnémotechnique : cosinus = adjacent / hypoténuse ; sinus = opposé / hypoténuse ; tangente = opposé / adjacent.

◆ **Propriété**

- Ces rapports ne dépendent que de l'angle, pas de la taille du triangle (théorème de Thalès).
- Pour tout angle aigu α : $0<\cos\alpha<1$ et $0<\sin\alpha<1$.

2 Relations trigonométriques

◆ Propriété — pour tout angle aigu α

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Si deux angles sont **complémentaires** ($\alpha+\beta=90\,°$), alors $\sin\alpha=\cos\beta$ et $\cos\alpha=\sin\beta$.

◆ Exemple corrigé

Si $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ (α aigu) : $\sin^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$, donc $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ et $\tan\alpha=\frac{4}{3}$.

◆ Méthode — démontrer une identité

On part du membre le plus compliqué et on utilise $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ et $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Exemple :

$1+\tan^2\alpha=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

◆ Démonstration

Dans le triangle ABC rectangle en A, avec $\alpha=\widehat{C}$: $\cos\alpha=\frac{AC}{BC}$ et $\sin\alpha=\frac{AB}{BC}$.

- $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\frac{AC^2+AB^2}{BC^2}=1$ d'après le théorème de Pythagore.
- $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{AB}{BC}\times\frac{BC}{AC}=\frac{AB}{AC}=\tan\alpha$.
- Les angles aigus $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires ; le côté opposé à l'un est adjacent à l'autre, d'où $\sin(90\,°-\alpha)=\cos\alpha$ et $\cos(90\,°-\alpha)=\sin\alpha$.

◆ Exemple corrigé

α est un angle aigu tel que $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. Calculer $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$.

Solution. $\sin^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$ et $\sin\alpha>0$, donc $\sin\alpha=\frac{4}{5}$; $\tan\alpha=\frac{4}{5}\times\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$.

3 Angles remarquables et calculatrice

Angle x	$30\,°$	$45\,°$	$60\,°$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

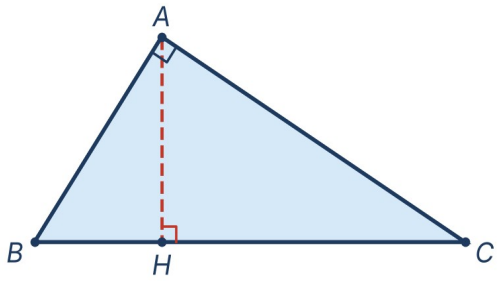
◆ **Méthode — utiliser la calculatrice (mode DEG)**

- Valeur approchée de $\cos 50\,°$: taper **cos** 50 **=** ; on lit $0{,}642\ldots$, donc $\cos 50\,° \approx 0{,}64$.
- Angle α tel que $\cos\alpha = 0{,}4$: taper 2**ndF cos** $0{,}4$ **=** ; on lit $66{,}42\ldots$, donc $\alpha \approx 66{,}42\,°$.

◆ **Exemple corrigé — hauteur d'une tour**

Un observateur est à 40 m du pied d'une tour et voit son sommet sous un angle de $38°$ (œil à $1{,}70$ m du sol). Hauteur : $1{,}70 + 40 \times \tan 38\,° \approx 1{,}70 + 31{,}25 \approx 32{,}95$ m.

4 Relations métriques dans le triangle rectangle



◆ **Propriété — ABC rectangle en A, H pied de la hauteur issue de A**

- $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (Pythagore)
- $AB \times AC = AH \times BC$ (deux expressions de l'aire)
- $AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = CH \times CB$
- $AH^2 = HB \times HC$

◆ **Exemple corrigé**

$AB = 5$ et $BH = 4$: $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 9$, $AH = 3$. Puis $AB^2 = BH \times BC$ donne $BC = \frac{25}{4}$, et $\cos\hat{B} = \frac{BH}{AB} = \frac{4}{5}$.

◆ **Démonstration** — $AB^2 = BH \times BC$

Dans le triangle ABH rectangle en H : $\cos\hat{B} = \dfrac{BH}{AB}$. Dans le triangle ABC rectangle en A : $\cos\hat{B} = \dfrac{AB}{BC}$.

Donc $\dfrac{BH}{AB} = \dfrac{AB}{BC}$, soit $AB^2 = BH \times BC$.

★ Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir**

- $\cos = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$; $\sin = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$; $\tan = \dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$.
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; angles complémentaires : sin ↔ cos.
- Valeurs pour $30°$, $45°$, $60°$ à connaître par cœur.
- $AH^2 = HB \times HC$; $AB^2 = BH \times BC$; $AB \times AC = AH \times BC$.

◆ **Pour aller plus loin — un petit défi d'olympiade**

Montrer que pour tout angle aigu α : $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$. Peut-on trouver un angle aigu tel que $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$?