COURS • 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

Chapitre 2 — Théorème de Thalès

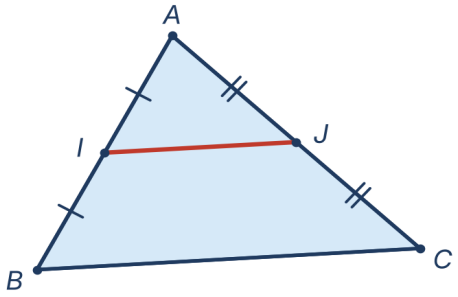
◆ **Sommaire**

- 1. Droite des milieux
- 2. Le théorème de Thalès
- 3. La réciproque du théorème de Thalès
- 4. Agrandissement et réduction
- 5. Constructions
- 6. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Utiliser les théorèmes de la droite des milieux.
- Calculer des longueurs avec le théorème de Thalès.
- Démontrer que deux droites sont parallèles avec la réciproque.
- Utiliser agrandissements et réductions ; partager un segment dans un rapport donné.

1 Droite des milieux



◆ **Propriété — théorème 1**

Dans un triangle ABC, si I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$, alors $(IJ)\parallel(BC)$ et $IJ=\frac{1}{2}BC$.

◆ **Propriété — théorème 2**

Dans un triangle ABC, la droite qui passe par le milieu I de $[AB]$ et qui est parallèle à (BC) coupe $[AC]$ en son milieu J.

◆ **Exemple corrigé**

ABC est équilatéral de côté 3 cm ; I, J, K sont les milieux de ses côtés. Chaque côté de IJK vaut $\frac{3}{2}=1{,}5$ cm : IJK est équilatéral de périmètre $4{,}5$ cm.

◆ **Démonstration — droite des milieux**

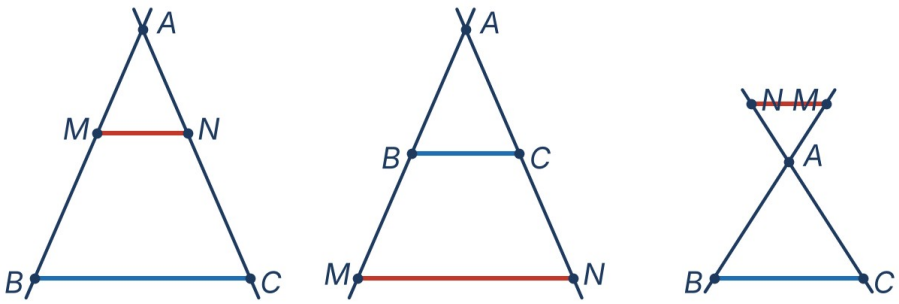
Soit I et J les milieux de $[AB]$ et $[AC]$, et K le symétrique de I par rapport à J.

Les diagonales $[AC]$ et $[IK]$ du quadrilatère $AICK$ ont le même milieu J : $AICK$ est un parallélogramme. Donc $(CK)\parallel(AI)$ et $CK=AI=IB$.

Ainsi $(CK)\parallel(IB)$ et $CK=IB$: $IBCK$ est un parallélogramme. Donc $(IK)\parallel(BC)$, c'est-à-dire $(IJ)\parallel(BC)$, et $IK=BC$, d'où $IJ=\frac{IK}{2}=\frac{BC}{2}$.

2 Le théorème de Thalès

Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A, M un point de (AB) et N un point de (AC), distincts de A. On retrouve trois configurations :



◆ **Propriété — théorème de Thalès**

Si les droites (BC) et (MN) sont **parallèles**, alors :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

◆ **Méthode — rédiger un calcul avec Thalès**

- 1. Citer les droites sécantes et les points alignés dans le même ordre.
- 2. Justifier le parallélisme (donnée de l'énoncé ou démonstration).
- 3. Écrire l'égalité des trois rapports, puis utiliser **deux** rapports dont un seul terme est inconnu (produit en croix).

◆ **Exemple corrigé**

$M \in [AB]$, $N \in [AC]$, $(MN) \parallel (BC)$, $AM = 2$ cm, $MB = 6$ cm, $AC = 5$ cm. Alors $AB = 8$ cm et $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$, donc $AN = \frac{5 \times 2}{8} = 1{,}25$ cm.

◆ **Exemple corrigé — configuration « papillon »**

Les droites (BM) et (CN) se coupent en A, avec A entre B et M et entre C et N, et $(MN) \parallel (BC)$. On donne $AM = 3$, $AB = 4{,}5$ et $BC = 6$. Calculer MN.

Solution. D'après le théorème de Thalès : $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$, donc $MN = \frac{3 \times 6}{4{,}5} = 4$.

3 La réciproque du théorème de Thalès

◆ **Propriété — réciproque**

Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A, $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$ distincts de A.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ **et si** les points A, B, M et les points A, C, N sont **dans le même ordre**, alors $(MN) \parallel (BC)$.

◆ **Attention — la condition d'ordre est indispensable**

Si M est sur $[AB]$ mais N est sur la demi-droite opposée à $[AC)$, l'égalité des rapports peut être vraie sans que les droites soient parallèles.

◆ **Méthode — montrer que deux droites ne sont PAS parallèles**

Si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$, alors (MN) et (BC) ne sont pas parallèles (sinon le théorème de Thalès donnerait l'égalité).

◆ **Exemple corrigé**

$M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ avec $AM = 2$, $AB = 5$, $AN = 3{,}2$ et $AC = 8$. Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

Solution. $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{3{,}2}{8} = 0{,}4$. Les rapports sont égaux et les points A, M, B et A, N, C sont dans le même ordre : d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

4 Agrandissement et réduction

◆ Propriété

Dans une configuration de Thalès, le triangle AMN est une réduction ($k<1$) ou un agrandissement ($k>1$) du triangle ABC de rapport $k=\dfrac{AM}{AB}$.

- Les longueurs sont multipliées par k ; le **périmètre** aussi.
- Les **aires** sont multipliées par k^2.
- Les angles sont conservés.

◆ Exemple corrigé

$AB=2$, $AD=3$, $D\in(AB)$, $(DE)\parallel(BC)$: ADE est un agrandissement de ABC de rapport $k=\dfrac{3}{2}$. Son périmètre est multiplié par $\dfrac{3}{2}$ et son aire par $\dfrac{9}{4}$.

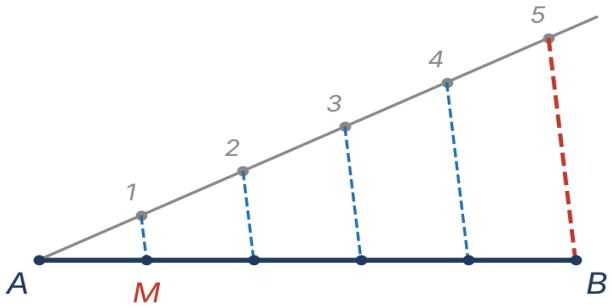
◆ Remarque

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, les longueurs sont multipliées par k, les aires par k^2 et les volumes par k^3 ; les angles sont conservés.

5 Constructions

◆ Méthode — placer M sur $[AB]$ tel que $AM=\dfrac{1}{5}AB$

On trace une demi-droite d'origine A et on y reporte 5 graduations égales. On joint la 5ème graduation à B, puis on trace les parallèles à cette droite passant par les autres graduations : la parallèle issue de la 1 ère graduation coupe $[AB]$ en M (théorème de Thalès).



◆ Pour aller plus loin — construction de Descartes

Sur une droite graduée, on place A d'abscisse x et B d'abscisse y. Avec Thalès on peut construire le point d'abscisse $x\times y$, ou un segment de longueur $\dfrac{ac}{b}$.

★ Fiche mémo

◆ L'essentiel à retenir

- Milieux de deux côtés $\Longrightarrow$ droite parallèle au 3ème côté, longueur moitié.
- Thalès : $(MN)\parallel(BC) \Longrightarrow \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{MN}{BC}$.
- Réciproque : rapports égaux **et** même ordre $\Longrightarrow$ parallèles.
- Rapport k : longueurs × k, aires × k^2.

◆ Pour aller plus loin — un petit défi d'olympiade

Dans un trapèze $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[CD]$, les diagonales se coupent en O. La parallèle aux bases passant par O coupe $[AD]$ en M et $[BC]$ en N. Montrer que O est le milieu de $[MN]$.