COURS • 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

Chapitre 15 — Systèmes de deux équations

◆ **Sommaire**

- 1. Équation du premier degré à deux inconnues
- 2. Système de deux équations
- 3. Résolution par substitution
- 4. Résolution par combinaison (élimination)
- 5. Problèmes
- 6. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Reconnaître les solutions d'une équation du premier degré à deux inconnues.
- Résoudre un système de deux équations à deux inconnues graphiquement, par substitution et par combinaison.
- Mettre un problème en équations et l'interpréter.

1 Équation du premier degré à deux inconnues

◆ **Définition**

L'équation $ax+by+c=0$, où a et b sont des réels non tous les deux nuls et x, y les inconnues, est une **équation du premier degré à deux inconnues**.

Une **solution** est un couple $(x\,;y)$ de réels qui vérifie l'égalité. Une telle équation a une infinité de solutions.

◆ **Propriété — interprétation graphique**

Dans un repère, l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $ax+by+c=0$ est une **droite**. Si $b\neq 0$, elle a pour équation $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$.

◆ **Exemple corrigé**

Le couple $(2\,;1)$ est solution de $x+y-3=0$ car $2+1-3=0$; le couple $(1\,;1)$ ne l'est pas.

2 Système de deux équations

◆ Définition

Un **système** de deux équations à deux inconnues s'écrit :

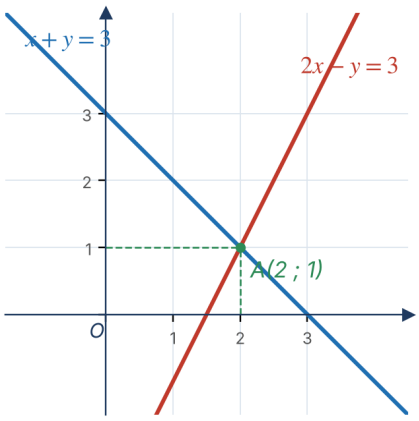
$$(S):\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

Résoudre (S) dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, c'est trouver tous les couples $(x\,;y)$ qui vérifient **les deux** équations à la fois.

◆ Propriété — résolution graphique

Les solutions de (S) sont les coordonnées des points communs aux deux droites D et D' :

- droites **sécantes** : une **unique** solution (c'est le cas si $ab'-a'b\neq 0$) ;
- droites **strictement parallèles** : **aucune** solution ;
- droites **confondues** : une **infinité** de solutions.



Le système $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ a pour unique solution le couple $(2\,;1)$, coordonnées du point d'intersection A.

3 Résolution par substitution

◆ Méthode

- Exprimer une inconnue en fonction de l'autre à partir de l'une des équations.
- Remplacer cette inconnue dans l'autre équation et résoudre l'équation à une inconnue obtenue.
- En déduire la valeur de l'autre inconnue ; conclure par l'ensemble S.

◆ Exemple corrigé

$$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+3y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-3y \\ 2(-3y)+y+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-3y \\ -5y+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=\dfrac{1}{5} \\ x=-\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

$$S=\left\{\left(-\frac{3}{5}\,;\frac{1}{5}\right)\right\}.$$

4 Résolution par combinaison (élimination)

◆ Méthode

- Multiplier les deux équations par des nombres bien choisis pour que, en les additionnant, une inconnue disparaisse.
- Résoudre l'équation obtenue, puis calculer l'autre inconnue.

◆ Exemple corrigé

$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 4x-3y=1 \end{cases}$: on multiplie la 1ère par 3 et la 2ème par 2 : $9x+6y=15$ et $8x-6y=2$. En additionnant : $17x=17$, donc $x=1$, puis $2y=5-3=2$, $y=1$. $S=\{(1;1)\}$.

◆ Attention — toujours vérifier

On remplace la solution trouvée dans **les deux** équations : $3+2=5$ ✔ et $4-3=1$ ✔.

◆ Méthode — changement d'inconnues

Pour $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=5 \\ \frac{4}{x}-\frac{3}{y}=1 \end{cases}$, on pose $X=\frac{1}{x}$ et $Y=\frac{1}{y}$: on retrouve le système précédent, donc $X=Y=1$ et $x=y=1$.

◆ Exemple corrigé — problème

3 cahiers et 2 stylos coûtent 3,600 D ; 2 cahiers et 5 stylos coûtent 4,600 D. Trouver le prix d'un cahier et celui d'un stylo.

Solution. Soit x le prix d'un cahier et y celui d'un stylo : $\begin{cases} 3x+2y=3{,}6 \\ 2x+5y=4{,}6 \end{cases}$. En multipliant la première équation par 2 et la seconde par 3 : $6x+4y=7{,}2$ et $6x+15y=13{,}8$. Par soustraction, $11y=6{,}6$, d'où $y=0{,}6$ puis $3x=3{,}6-1{,}2$, d'où $x=0{,}8$.

Un cahier coûte 0,800 D et un stylo 0,600 D (vérification : $2\times 0{,}8+5\times 0{,}6=4{,}6$).

5 Problèmes

◆ Méthode — mettre en équations

- Choisir deux inconnues et préciser ce qu'elles représentent.
- Traduire les deux informations de l'énoncé par deux équations.
- Résoudre le système, puis vérifier que la solution a un sens dans le problème.

◆ **Exemple corrigé — une classe**

Une classe de 35 élèves : les filles ont $9{,}5$ de moyenne, les garçons 12 et la moyenne générale est $10{,}5$. Avec f filles et g garçons :

$$\begin{cases} f+g=35 \\ 9{,}5f+12g=10{,}5\times 35 \end{cases} \Rightarrow 9{,}5f+12(35-f)=367{,}5 \Rightarrow 2{,}5f=52{,}5 \Rightarrow f=21,\ g=14.$$

◆ **Remarque — interprétation graphique**

Chaque équation $ax+by+c=0$ représente une droite. Le système a une solution unique si les deux droites sont sécantes, aucune si elles sont strictement parallèles, une infinité si elles sont confondues.

Exemple : $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=1 \end{cases}$ n'a pas de solution, car en multipliant la première équation par 2 on obtient $2x+4y=6\neq 1$: les droites sont parallèles.

★ Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir**

- $ax+by+c=0$: une infinité de solutions, représentées par une droite.
- Un système : intersection de deux droites (0, 1 ou une infinité de solutions).
- Substitution : isoler une inconnue ; combinaison : éliminer une inconnue.
- Toujours vérifier la solution dans les deux équations.

◆ **Pour aller plus loin — un petit défi d'olympiade**

Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ l'équation $(x+3y+7)^2-(x+y+1)^2=0$ et interpréter graphiquement l'ensemble des solutions.