COURS • 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

Chapitre 14 — Fonctions affines

◆ **Sommaire**

- 1. Définition
- 2. Sens de variation
- 3. Représentation graphique
- 4. Équations, inéquations et intersections
- 5. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Reconnaître une fonction affine et déterminer son expression à partir de deux images.
- Étudier le sens de variation d'une fonction affine.
- Représenter une fonction affine, lire graphiquement son coefficient et son ordonnée à l'origine.
- Utiliser les représentations graphiques pour résoudre équations et inéquations.

1 Définition

◆ **Définition**

Soient a et b deux réels. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ est une **fonction affine** ; a est son **coefficient** et b son **terme constant** (ordonnée à l'origine).

- Si $b=0$: $f(x)=ax$, f est **linéaire**.
- Si $a=0$: $f(x)=b$, f est **constante**.

◆ **Propriété — coefficient**

Pour tous réels distincts x_1 et x_2 :

$$a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Les accroissements de $f(x)$ sont proportionnels aux accroissements de x.

◆ **Méthode — déterminer f connaissant deux images**

$f(-2)=3$ et $f(3)=2$: $a=\dfrac{2-3}{3-(-2)}=-\dfrac{1}{5}$; puis $f(3)=-\dfrac{3}{5}+b=2$ donne $b=\dfrac{13}{5}$. Donc $f(x)=-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{13}{5}$.

Autre méthode : résoudre le système $\begin{cases}-2a+b=3\\3a+b=2\end{cases}$.

◆ **Démonstration — calcul du coefficient**

Si $f(x)=ax+b$, alors $f(x_1)-f(x_2)=a\,x_1+b-a\,x_2-b=a(x_1-x_2)$; pour $x_1\neq x_2$, on divise par x_1-x_2.

◆ **Exemple corrigé**

Déterminer la fonction affine f telle que $f(1)=3$ et $f(4)=-3$.

Solution. $a=\dfrac{-3-3}{4-1}=-2$, puis $f(1)=-2+b=3$ donne $b=5$: $f(x)=-2x+5$.

2 Sens de variation

◆ **Propriété**

- Si $a>0$, f est **croissante** : si $x\leq y$ alors $f(x)\leq f(y)$.
- Si $a<0$, f est **décroissante** : si $x\leq y$ alors $f(x)\geq f(y)$.
- Si $a=0$, f est **constante**.

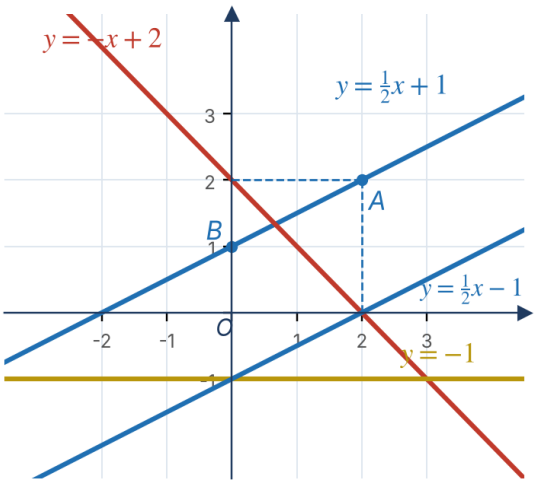
◆ **Méthode — comparer deux images**

$f(u)-f(v)=a(u-v)$: le signe de $f(u)-f(v)$ s'obtient avec le signe de a et celui de $u-v$.

◆ **Démonstration**

Pour $x_1<x_2$: $f(x_2)-f(x_1)=a(x_2-x_1)$, avec $x_2-x_1>0$. Ce nombre a le signe de a : f est croissante si $a>0$, décroissante si $a<0$, constante si $a=0$.

3 Représentation graphique



◆ Propriété

Dans un repère, la représentation graphique de $f : x \mapsto ax+b$ est la **droite** Δ_f d'équation $y=ax+b$. Elle passe par le point $B(0\,;b)$: b est l'**ordonnée à l'origine** ; a est le **coefficient directeur**.

- Pour tracer Δ_f, il suffit de deux points : par exemple $(0\,;b)$ et $(1\,;a+b)$.
- Lecture du coefficient : en se déplaçant de 1 vers la droite, on monte de a (ou on descend si $a<0$).

◆ Propriété — droites parallèles

Les représentations graphiques de deux fonctions affines de **même coefficient** sont **parallèles**. On passe de $y=ax$ à $y=ax+b$ par la translation de vecteur $b\,\vec{j}$.

◆ Exemple corrigé — lecture graphique

La droite passe par $B(0\,;1)$ et $A(2\,;2)$: $b=1$ et $a=\dfrac{2-1}{2-0}=\dfrac{1}{2}$, donc $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1$.

4 Équations, inéquations et intersections

◆ Méthode — point d'intersection de deux droites

$\Delta_f : y=2x+3$ et $\Delta_g : y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$. On résout $2x+3=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2} \iff \dfrac{3}{2}x=-\dfrac{9}{2} \iff x=-3$, puis $y=-3$.

Point d'intersection : $(-3\,;-3)$.

◆ Méthode — résolution graphique de $f(x)>g(x)$

Les solutions sont les abscisses des points de Δ_f situés **strictement au-dessus** de Δ_g. Ici, $2x+3>\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$ $\iff x>-3$.

◆ Attention — une fonction qui n'est pas affine

$h(x)=2|x|$ n'est pas affine : $h(-2)=h(2)=4$ alors qu'une fonction affine non constante prend des valeurs différentes. Sa courbe est formée de deux demi-droites.

★ Fiche mémo

◆ L'essentiel à retenir

- $f(x)=ax+b$; $a=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$; $b=f(0)$.
- $a>0$: croissante ; $a<0$: décroissante ; $a=0$: constante.
- Courbe : droite $y=ax+b$ passant par $(0\,;b)$.
- Même coefficient $\Longleftrightarrow$ droites parallèles.

◆ Pour aller plus loin — un petit défi d'olympiade

Trouver toutes les fonctions affines f telles que, pour tout réel x, $f(f(x))=4x+3$.