COURS • 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

Chapitre 13 — Équations et inéquations

◆ **Sommaire**

- 1. Équations du premier degré
- 2. Équations se ramenant au premier degré
- 3. Inéquations du premier degré
- 4. Signe de $ax+b$ et tableaux de signes
- 5. Mise en équation d'un problème
- 6. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Résoudre une équation du premier degré et s'y ramener (équation produit, $x^2=a$).
- Résoudre une inéquation du premier degré et écrire ses solutions sous forme d'intervalle.
- Étudier le signe de $ax+b$ et d'un produit ou d'un quotient à l'aide d'un tableau de signes.
- Mettre un problème en équation.

1 Équations du premier degré

◆ **Définition**

Résoudre une équation d'inconnue x dans $\mathbb{R}$, c'est trouver toutes les valeurs de x qui rendent l'égalité vraie : ce sont les **solutions**.

Deux équations sont **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions.

◆ **Propriété — transformations qui conservent les solutions**

- Ajouter (ou retrancher) un même nombre ou une même expression aux deux membres.
- Multiplier (ou diviser) les deux membres par un même nombre **non nul**.

◆ **Propriété — équation $ax+b=0$**

Si $a\neq 0$, l'équation $ax+b=0$ admet une **unique** solution : $x=-\dfrac{b}{a}$.

◆ **Exemple corrigé**

$4(2x-3)-2(3x-1)=5(x+1) \iff 8x-12-6x+2=5x+5 \iff 2x-10=5x+5 \iff -3x=15$
$\iff x=-5$. $S=\{-5\}$.

2 Équations se ramenant au premier degré

◆ Propriété — équation produit

Un produit de facteurs est nul **si et seulement si** l'un au moins des facteurs est nul : $A\times B=0 \iff A=0$ ou $B=0$.

◆ Méthode — on factorise, puis on applique la règle du produit nul

$(x-4)(x+7)-(2x+3)(x+7)=0 \iff (x+7)(x-4-2x-3)=0 \iff (x+7)(-x-7)=0 \iff x=-7$.

◆ Attention

Ne jamais diviser par une expression qui contient l'inconnue : dans $x+1=(x+1)^2$, diviser par $x+1$ ferait perdre la solution $x=-1$. On factorise : $(x+1)(1-x-1)=0$, d'où $S=\{-1;0\}$.

◆ Propriété — équation $x^2=a$

- Si $a>0$: deux solutions, $x=\sqrt{a}$ ou $x=-\sqrt{a}$.
- Si $a=0$: une solution, $x=0$.
- Si $a<0$: aucune solution.

◆ Exemple corrigé

$x^2-10x+25=49 \iff (x-5)^2=49 \iff x-5=7$ ou $x-5=-7 \iff x=12$ ou $x=-2$.

$|3x-2|=|x+1| \iff 3x-2=x+1$ ou $3x-2=-(x+1) \iff x=\frac{3}{2}$ ou $x=\frac{1}{4}$.

◆ Méthode — équation avec des quotients

On détermine d'abord l'**ensemble de définition** (les dénominateurs doivent être non nuls), puis on résout et on **vérifie** que les solutions trouvées appartiennent à cet ensemble.

3 Inéquations du premier degré

◆ Propriété — règles de calcul

- On peut ajouter un même nombre aux deux membres : le sens est conservé.
- On peut multiplier par un nombre **strictement positif** : le sens est conservé.
- Multiplier par un nombre **strictement négatif change le sens** de l'inégalité.

◆ Propriété — inéquation $ax+b<0$ (avec $a\neq 0$)

- Si $a>0$: $ax+b<0 \iff x<-\dfrac{b}{a}$, donc $S=]-\infty\,;-\dfrac{b}{a}[$.
- Si $a<0$: $ax+b<0 \iff x>-\dfrac{b}{a}$, donc $S=]-\dfrac{b}{a}\,;+\infty[$.

Même méthode avec >, ≤ ou ≥ (crochet fermé si l'inégalité est large).

◆ Exemple corrigé — une moyenne

Un élève a 12 au devoir de contrôle (coefficient 1). Quelle note s doit-il obtenir au devoir de synthèse (coefficient 2) pour avoir au moins 13 de moyenne ?

$\dfrac{12+2s}{3}\geq 13 \iff 12+2s\geq 39 \iff s\geq 13{,}5$.

◆ Démonstration — cas $a<0$

Si $a<0$: $ax+b<0$ équivaut à $ax<-b$. En divisant les deux membres par le réel **négatif** a, le sens de l'inégalité change : $x>-\dfrac{b}{a}$.

4 Signe de $ax+b$ et tableaux de signes

◆ Propriété — signe d'un binôme du premier degré ($a\neq 0$)

$ax+b$ s'annule en $-\dfrac{b}{a}$; il est du **signe de a à droite** de $-\dfrac{b}{a}$ et du **signe contraire** à gauche.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		signe de $-a$	0	signe de a	

◆ Méthode — signe d'un produit ou d'un quotient

On étudie le signe de chaque facteur dans un même tableau, puis on applique la règle des signes. Pour un quotient, la valeur qui annule le dénominateur est **interdite** (double barre ‖).

◆ Exemple corrigé — signe de $E(x)=(x-2)(3+x)$

Les facteurs s'annulent en 2 et en -3.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
Signe de $x-2$		−		−	0	+	
Signe de $3+x$		−	0	+		+	
Signe de $E(x)$		+	0	−	0	+	

Donc $E(x)\leq 0 \iff x\in[-3\,;2]$.

◆ **Exemple corrigé**

Résoudre dans IR l'inéquation $\dfrac{x-1}{x+2}\geq 0$.

Solution. Le quotient n'est défini que pour $x\neq -2$. $x-1$ s'annule en 1, $x+2$ en -2 ; un tableau de signes montre que le quotient est positif sur $]-\infty\,;-2[$, négatif sur $]-2\,;1[$, positif sur $]1\,;+\infty[$ et nul en 1.

L'ensemble des solutions est $S=]-\infty\,;-2[\cup[1\,;+\infty[$.

5 Mise en équation d'un problème

◆ **Méthode — quatre étapes**

- **Choisir l'inconnue** (et préciser son unité et les valeurs permises).
- **Traduire** l'énoncé par une équation ou une inéquation.
- **Résoudre**.
- **Conclure** en vérifiant que la solution convient au problème.

◆ **Exemple corrigé — les deux palmiers (problème d'un mathématicien arabe du XIème siècle)**

Deux palmiers de 30 et 20 aunes se font face sur les deux rives d'un fleuve, à 50 aunes l'un de l'autre. Deux oiseaux plongent en même temps à la même vitesse sur un poisson et l'atteignent ensemble. Soit x la distance du poisson au pied du grand palmier.

Pythagore : $30^2+x^2=20^2+(50-x)^2 \iff 900=400+2\,500-100\,x \iff x=20$. Le poisson est à 20 **aunes** du grand palmier.

★ Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir**

- $ax+b=0\ (a\neq 0) \iff x=-\dfrac{b}{a}$.
- $A\times B=0 \iff A=0$ ou $B=0$: toujours factoriser avant de résoudre.
- $x^2=a$: 2, 1 ou 0 solution selon que $a>0$, $a=0$ ou $a<0$.
- Inéquation : multiplier par un négatif change le sens.
- Signe de $ax+b$: signe de a à droite de la racine.

◆ Pour aller plus loin — un petit défi d'olympiade

Le lapin a déjà fait 77 sauts quand le kangourou part à sa poursuite. Pendant que le lapin fait 13 sauts, le kangourou en fait 9, et 3 sauts de kangourou valent 8 sauts de lapin. Combien de sauts fera le kangourou pour rattraper le lapin ?