COURS • 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

# Chapitre 12 — Fonctions linéaires

◆ **Sommaire**


- 1. Définition
- 2. Fonction linéaire et proportionnalité
- 3. Représentation graphique
- 4. Applications
- 5. Fiche mémo


◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Reconnaître une fonction linéaire et déterminer son coefficient.
- Calculer une image, un antécédent ; utiliser les propriétés de linéarité.
- Représenter graphiquement une fonction linéaire et lire son coefficient.
- Modéliser des situations de proportionnalité (pourcentages, échelles, vitesses).

## 1 Définition

◆ **Définition**

Soit $a$ un réel. En associant à chaque réel $x$ le réel $ax$, on définit une **fonction linéaire** $f$ de **coefficient** $a$. On note $f : x \mapsto ax$ ou $f(x) = ax$.

- $f(x)$ est l'**image** de $x$ par $f$ ;
- $x$ est un **antécédent** de $f(x)$.

◆ **Méthode — déterminer le coefficient**

Si on connaît l'image $y_0$ d'un réel $x_0 \neq 0$, alors $a = \dfrac{y_0}{x_0}$. Exemple : si $f(4) = 10$, alors $a = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$ et $f(x) = \dfrac{5}{2}x$.

◆ **Méthode — calculer un antécédent**

Si $a \neq 0$, l'antécédent de $y$ est la solution de $ax = y$, soit $x = \dfrac{y}{a}$. Avec $f(x) = \dfrac{5}{2}x$, l'antécédent de $15$ est $\dfrac{15}{\frac{5}{2}} = 6$.

◆ **Démonstration**

Si $f(x)=ax$, alors pour tous réels $x$, $x'$ et $k$ : $f(x+x')=a(x+x')=ax+ax'=f(x)+f(x')$ et $f(kx)=a(kx)=k(ax)=kf(x)$.

◆ **Exemple corrigé**

Déterminer la fonction linéaire $f$ telle que $f(3)=-6$, puis calculer $f(-5)$.

**Solution.** $f(x)=ax$ et $3a=-6$, donc $a=-2$ : $f(x)=-2x$ et $f(-5)=10$.

## 2 Fonction linéaire et proportionnalité

◆ **Propriété**

Un tableau de valeurs d'une fonction linéaire de coefficient $a$ est un **tableau de proportionnalité** de coefficient $a$ : on passe de la 1ère ligne à la 2ème en multipliant par $a$.

| $x$ | 2 | 5 | 6 | $-3$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)=3{,}5x$ | 7 | 17,5 | 21 | $-10{,}5$ |

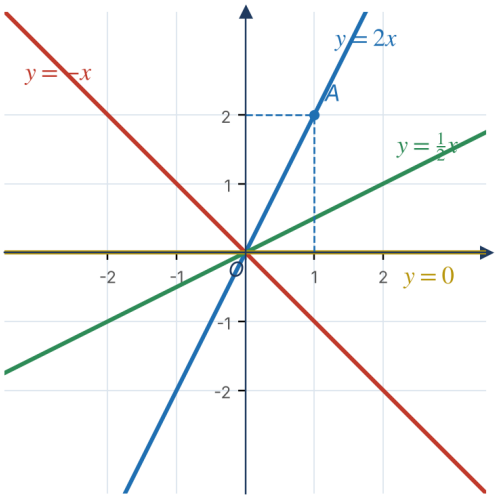
◆ **Propriété — propriétés de linéarité**

Pour tous réels $x$, $x'$ et $k$ :

$$f(x+x')=f(x)+f(x') \qquad f(kx)=kf(x)$$

Exemple : si $f(3)=-2$, alors $f(6)=2f(3)=-4$ et $f(9)=f(3)+f(6)=-6$.

## 3 Représentation graphique



**◆ Propriété**

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, la représentation graphique d'une fonction linéaire $f : x \mapsto ax$ est la **droite** passant par l'origine $O$ et par le point $A(1\,;a)$.

- Cette droite a pour **équation** $y = ax$ ; $a$ est son **coefficient directeur**.
- Si $a > 0$, elle « monte » ; si $a < 0$, elle « descend » ; si $a = 0$, c'est l'axe des abscisses.

**◆ Méthode — tracer la droite $y = ax$**

On place $O$ et un second point, par exemple $(1\,;a)$ ou $(2\,;2a)$ si cela évite les fractions, puis on trace la droite.

**◆ Méthode — lire le coefficient sur un graphique**

On repère un point $M(x_0\,;y_0)$ de la droite, avec $x_0 \neq 0$, et on calcule $a = \dfrac{y_0}{x_0}$. Si la droite passe par $A(-1\,;2)$ : $a = \dfrac{2}{-1} = -2$.

**◆ Propriété — signe de $f(x)$**

Si $a > 0$, $f(x)$ est du **même signe** que $x$ ; si $a < 0$, $f(x)$ est du **signe contraire** de $x$.

## 4 Applications

**◆ Propriété — pourcentages**

- Augmenter une quantité de $t$ %, c'est la multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$.
- Diminuer une quantité de $t$ %, c'est la multiplier par $1 - \dfrac{t}{100}$.

Ces opérations sont des fonctions linéaires. Exemple : une réduction de $15$ % sur un prix $p$ donne $0{,}85\,p$.

**◆ Attention — des pourcentages successifs ne s'ajoutent pas**

Une hausse de $15$ % suivie d'une baisse de $15$ % donne le coefficient $1{,}15 \times 0{,}85 = 0{,}9775$ : le prix final a **baissé** de $2{,}25$ %.

◆ **Exemple corrigé — échelle et vitesse**

- Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{50\,000}$, la distance réelle $d$ (en cm) est $d = 50\,000 \times c$ où $c$ est la distance sur la carte : $3$ cm représentent $150\,000$ cm, soit $1{,}5$ km.
- À vitesse constante de $90$ km/h, la distance parcourue est $d(t) = 90\,t$ : il faut $\frac{225}{90} = 2{,}5$ h pour parcourir $225$ km.

◆ **Exemple corrigé — pourcentages successifs**

Un prix augmente de $15$ %, puis baisse de $20$ %. Quelle est l'évolution globale ?

**Solution.** Une hausse de $15$ % correspond à la fonction linéaire $x \mapsto 1{,}15\,x$ et une baisse de $20$ % à $x \mapsto 0{,}8\,x$. Le prix final est $0{,}8 \times 1{,}15\,x = 0{,}92\,x$ : le prix a **baissé de $8$ %**.

## ★ Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir**

- $f(x) = ax$ ; coefficient $a = \frac{f(x)}{x}$ pour $x \neq 0$.
- $f(x+x') = f(x) + f(x')$ et $f(kx) = kf(x)$.
- Représentation : droite passant par $O$ et $A(1\,;a)$, d'équation $y = ax$.
- Hausse de $t$ % : $\times\left(1 + \frac{t}{100}\right)$ ; baisse de $t$ % : $\times\left(1 - \frac{t}{100}\right)$.

◆ **Pour aller plus loin — un petit défi d'olympiade**

Une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels $x$, $y$, et $f(1) = 3$. Calculer $f(0), f(2), f(-1)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$.