EXERCICES • 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

Chapitre 11 — Activités algébriques

1 Expressions littérales

Exercice 1

Soit $A=2(x-1)(12-3x)$.

1) Calculer la valeur exacte de A pour $x=1$, puis pour $x=\frac{1}{3}$.

2) Développer et réduire A.

3) Donner une valeur approchée de A à 10^{-3} près pour $x=\pi$.

Exercice 2

Une cuve a la forme d'un parallélépipède rectangle de base $2{,}5\ \text{m}\times 1{,}26\ \text{m}$. Elle contient de l'eau jusqu'à une hauteur de h cm.

1) Exprimer le volume d'eau V (en litres) en fonction de h.

2) Calculer V pour $h=30$ cm, puis trouver h lorsque $V=1\,300$ L.

2 Développer et réduire

Exercice 3

Développer et réduire :

$A=a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$ $\quad B=y(1-y)^2+2y(1-y)$ $\quad G=(2x-3)(-x+2)-x(5-4x)$

Exercice 4

Développer : $(2x+3)^2$; $(3x-2)^2$; $(2x-5)(2x+5)$; $(x+2)^3$; $(1-2x)^3$.

Exercice 5

Calculer mentalement : 101^2 ; 99^2 ; $9\,999\times 10\,001$; 102^2-98^2 ; $1\,001^2-999^2$.

Exercice 6

1) Développer $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ et $(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

2) En déduire que $1\,245^3-45^3$ est divisible par 6 et que $22\,513^3+487^3$ est divisible par $1\,000$.

3 Factoriser

Exercice 7

Factoriser :

$A=25x^2-9$ $\quad B=25x^2-30x+9$ $\quad C=(2x-1)^2-(1-x)^2$ $\quad D=3x^2+x$

$E=3x-6+(x^2-4x+4)$ $F=x^3-64$ $G=8+27x^3$

Exercice 8

Trouver les valeurs de x qui annulent : $(3-x)(0{,}5x-3)$; x^2-16 ; $(2x+1)^2-(x-3)^2$.

Exercice 9

a et b sont deux entiers naturels consécutifs ($a=b+1$).

1) Montrer que $a^2-b^2=a+b$.

2) Trouver a et b sachant que $a^2-b^2=11$.

3) Peut-on avoir $a^2-b^2=3\,334\,444$? Justifier.

4 Égalité de deux expressions

Exercice 10

1) Montrer que pour tout réel x : $(x-2)^3+12x^2+16=(x+2)^3$. En déduire $(9\,998-2)^3+12\times 9\,998^2+16$.

2) Soient $A=x^3-x^2$ et $B=2x^2+6x-8$. Vérifier que $A=B$ pour $x=1$, $x=-2$ et $x=4$. A-t-on $A=B$ pour tout réel x ?

3) Montrer que $E=(3x-2)^2-(1-3x)^2+6x$ est constante.

Exercice 11

1) Développer $(x+1)^3$. En déduire une façon rapide de calculer 101^3, puis $2{,}1^3$.

2) Développer $(a-b)^3$. En déduire une façon rapide de calculer 999^3.

3) Développer $(x+y+z)^2$.

4) En écrivant $101{,}01=10\,101\times 10^{-2}$, calculer $101{,}01^2$ sans calculatrice.

Exercice 12

On considère $E=\sqrt{3-\sqrt{5}}\times\sqrt{3+\sqrt{5}}$ et $F=\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

1) Montrer que E est un entier.

2) Calculer F^2 et en déduire la valeur de F.

Exercice 13

1) Calculer $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$ et $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2$. Que remarque-t-on ?

2) Le démontrer dans le cas général avec $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$ et $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$, où a est un rationnel strictement positif.

Exercice 14

On donne quatre réels a, b, c et d tels que $a^2+b^2=1$ et $c^2+d^2=1$.

1) Montrer que $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

2) En déduire que $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=1$.

Exercice 15

Soient trois réels non nuls a, b et c tels que $a+b+c\neq 0$ et $b+c-a\neq 0$. Montrer que :

$$\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{1}{b+c-a}\times\frac{b^2+c^2-(b-c)^2}{a+b+c}=1$$

Exercice 16

1) Montrer que pour tous réels x et a : $x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$.

2) Factoriser alors $A=x^2+4x+1$ et $B=x^2-3x+1$.

Exercice 17

1) Montrer que pour tout réel x : $(1-x)(1+x+x^2+x^3)=1-x^4$.

2) En déduire que pour tout réel $x\neq 1$: $1+x+x^2+x^3=\frac{1-x^4}{1-x}$, puis calculer $1+3+9+27$ et $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$.

3) Factoriser $1+x+x^2+x^3$.

Exercice 18

1) Calculer $\left(1+\sqrt{5}\right)^2$; en déduire une simplification de $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

2) Par une méthode analogue, simplifier : $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$; $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$.

3) En déduire $\sqrt{\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}$.

4) En remarquant que $2+\sqrt{3}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}$, simplifier $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Exercice 19

On considère l'équation (E) : $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$, avec $x\neq 0$.

1) Soit a une solution de (E). Calculer $A=a^2+\frac{1}{a^2}$ et $B=a^3+\frac{1}{a^3}$.

2) Montrer que le réel $r=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est une solution de (E).

3) En déduire la valeur de $C=\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^3+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$.

4) Montrer que si x est solution de (E), alors $\frac{1}{x}$ l'est aussi. En déduire une deuxième solution r' et vérifier que $r\times r'=1$.

Exercice 20

Soit l'expression $y=\frac{6x^5-9x^4}{4x^2-12x+9}$ avec $x\neq\frac{3}{2}$.

1) Factoriser $d=4x^2-12x+9$.

2) Calculer de deux manières d pour $x=\sqrt{7}$.

3) En déduire que $\sqrt{37-12\sqrt{7}}=2\sqrt{7}-3$, puis que $\sqrt{37+12\sqrt{7}}=2\sqrt{7}+3$.

4) Montrer que $\dfrac{1}{2\sqrt{7}-3}-\dfrac{1}{2\sqrt{7}+3}-\dfrac{6}{19}=0$.

5) Simplifier γ.

Exercice 21

1) Soit $x=0{,}99\ldots9$ ($1\,997$ chiffres égaux à 9 après la virgule). Quel est le $1\,997$ème chiffre après la virgule de x^2 ?

2) Comparer, sans calculatrice, $x=\dfrac{1}{(0{,}999999999997)^2}$ et $y=(1{,}000000000003)^2$.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Pour tout réel x : $(x+3)^2=x^2+9$.	☐	☐
2. $49x^2-1=(7x-1)(7x+1)$.	☐	☐
3. $(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$.	☐	☐
4. $x^2+6x+9=(x+3)^2$.	☐	☐
5. Si une égalité est vraie pour trois valeurs de x, elle est vraie pour tout x.	☐	☐
6. $a^3+b^3=(a+b)^3$.	☐	☐