COURS • 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

Chapitre 11 — Activités algébriques

◆ **Sommaire**

- 1. Expressions littérales – Valeur numérique
- 2. Développer et réduire
- 3. Identités remarquables
- 4. Factoriser
- 5. Égalité de deux expressions
- 6. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Traduire une situation par une expression littérale et calculer sa valeur numérique.
- Développer et réduire une expression (distributivité, identités remarquables).
- Factoriser une expression (facteur commun, identités remarquables).
- Montrer qu'une égalité est vraie pour tout réel, ou qu'elle est fausse grâce à un contre-exemple.

1 Expressions littérales – Valeur numérique

◆ **Définition**

Une **expression littérale** est une expression contenant une ou plusieurs lettres qui désignent des nombres.

Calculer la **valeur numérique** d'une expression, c'est remplacer chaque lettre par une valeur donnée et effectuer les calculs.

◆ **Exemple corrigé — traduire un programme de calcul**

On choisit un nombre b ; on le multiplie par 11 ; on ajoute 4 ; on multiplie le résultat par 9 ; on retranche le double du carré du nombre de départ.

Expression obtenue : $9(11b+4)-2b^2=-2b^2+99b+36$. Pour $b=0$ on obtient 36 ; pour $b=-1$ on obtient -65.

◆ **Exemple corrigé — pourcentage**

Une réduction de 15 % sur un prix p donne le nouveau prix $p-0{,}15\,p=0{,}85\,p$. Pour $p=25{,}728$ dinars : $0{,}85\times 25{,}728=21{,}8688$ dinars.

2 Développer et réduire

◆ **Définition**

Développer une expression, c'est transformer un produit en une somme. **Réduire**, c'est regrouper les termes semblables.

◆ **Propriété — distributivité — pour tous réels a, b, c, d, k**

$$k(a+b)=ka+kb \qquad (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

◆ **Exemple corrigé**

$G=(2x-3)(-x+2)-x(5-4x)=-2x^2+4x+3x-6-5x+4x^2=2x^2+2x-6.$

$D=a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=ab-ac+bc-ab+ac-bc=0.$

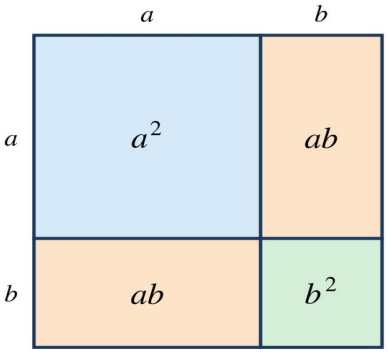
◆ **Attention — les signes devant une parenthèse**

Un signe « − » devant une parenthèse change **tous** les signes à l'intérieur : $-(x-5+2y)=-x+5-2y.$

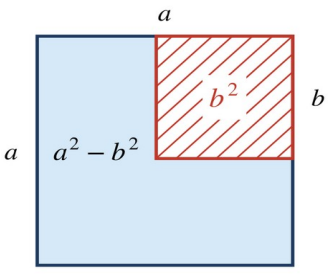
3 Identités remarquables

◆ **Propriété — pour tous réels a et b — carrés**

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \qquad (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$



$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$



$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

◆ **Propriété — pour tous réels a et b — cubes**

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

◆ **Attention — erreurs classiques**

- $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$: il manque le double produit $2ab$.
- $(a+b)^3 \neq a^3+b^3$.
- $(-a)^2 = a^2$ mais $(-a)^3 = -a^3$.

◆ **Exemple corrigé — calcul mental**

$101^2 = (100+1)^2 = 10\,000+200+1 = 10\,201$; $99^2 = (100-1)^2 = 9\,801$.

$9\,999 \times 10\,001 = (10\,000-1)(10\,000+1) = 10^8-1 = 99\,999\,999$;
$102^2-98^2 = (102-98)(102+98) = 800$.

◆ **Exemple corrigé — une application en arithmétique**

$1\,245^3-45^3 = (1\,245-45)(1\,245^2+1\,245\times 45+45^2) = 1\,200\times(\ldots)$. Comme $1\,200$ est divisible par 6, $1\,245^3-45^3$ **est divisible par** 6.

◆ **Démonstration — cube d'une somme et différence de deux cubes**

$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b$
.
$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3 = a^3-b^3$.

4 Factoriser

◆ **Définition**

Factoriser une expression, c'est transformer une somme (ou une différence) en un **produit**.

◆ **Méthode — les trois réflexes**

- 1. **Chercher un facteur commun** : $ka+kb = k(a+b)$. Ex. : $4x^5+2x^3-x^2 = x^2(4x^3+2x-1)$.
- 2. **Reconnaître une identité remarquable** : $25x^2-30x+9 = (5x-3)^2$;
  $25x^2-9 = (5x-3)(5x+3)$.
- 3. **Faire apparaître un facteur commun** caché :
  $3x-6+(x^2-4x+4) = 3(x-2)+(x-2)^2 = (x-2)(x+1)$.

◆ **Exemple corrigé — différence de deux carrés**

$(2x-1)^2-(1-x)^2 = [(2x-1)-(1-x)][(2x-1)+(1-x)] = (3x-2)\times x$.

◆ **Exemple corrigé — somme et différence de deux cubes**

$x^3-64 = x^3-4^3 = (x-4)(x^2+4x+16)$; $8+27x^3 = 2^3+(3x)^3 = (2+3x)(4-6x+9x^2)$.

◆ Méthode — utiliser une forme factorisée : un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul

$(3-x)(0{,}5x-3)=0$ équivaut à $3-x=0$ ou $0{,}5x-3=0$, c'est-à-dire $x=3$ ou $x=6$.

◆ Exemple corrigé

Factoriser $A=4x^2-9-(2x+3)(x-1)$ et $B=x^3-8$.

- $4x^2-9=(2x-3)(2x+3)$, donc $A=(2x+3)[(2x-3)-(x-1)]=(2x+3)(x-2)$.
- $B=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$.

5 Égalité de deux expressions

◆ Méthode — montrer qu'une égalité est vraie pour tout réel x

On développe et on réduit **chaque membre**, puis on compare. Exemple : pour tout réel x, $(x-2)^3+12x^2+16=(x+2)^3$ car les deux membres valent $x^3+6x^2+12x+8$.

Application : $(9\,998-2)^3+12\times 9\,998^2+16=(9\,998+2)^3=10^{12}$.

◆ Méthode — montrer qu'une égalité est fausse : un contre-exemple suffit

$A=x^3-x^2$ et $B=2x^2+6x-8$ sont égaux pour $x=1$, $x=-2$ et $x=4$. Mais pour $x=0$: $A=0$ et $B=-8$. Donc on **n'a pas** $A=B$ pour tout réel x.

◆ Exemple corrigé — une expression constante

$E=(3x-2)^2-(1-3x)^2+6x=(6x-3)(-1)+6x=3$: E vaut 3 pour tout réel x.

◆ Exemple corrigé — identité de Lagrange

Montrer que, pour tous réels a, b, c, d : $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$.

Solution. Le membre de gauche vaut $a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$. Celui de droite vaut $a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2$, c'est-à-dire la même expression.

Fiche mémo

L'essentiel à retenir

- Développer = produit → somme ; factoriser = somme → produit.
- $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$; $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.
- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$; $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
- Pour prouver une égalité « pour tout x » : développer les deux membres. Pour la réfuter : un contre-exemple.

Pour aller plus loin — un petit défi d'olympiade

Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs, augmenté de 1, est toujours un carré parfait.

Indication : $n(n+3)$ et $(n+1)(n+2)$ diffèrent de 2.