EXERCICES • 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

Chapitre 10 — Activités numériques II

1 Quotients et puissances

Exercice 1

Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :

$$A=\frac{2}{3}-\frac{5}{6}+\frac{7}{4} \qquad B=\left(\frac{3}{5}\div\frac{9}{10}\right)\times 4 \qquad C=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}$$

Exercice 2

Écrire sous la forme d'un entier :

$$A=\frac{\left(2^3\times 3^{-2}\right)^2\times 3^5}{2^4} \qquad B=\frac{(-2)^5\times(-3)^2}{6^2} \qquad C=\frac{10^{-3}\times\left(10^2\right)^4}{10^5}$$

Exercice 3

Soient a un réel strictement positif et b un réel non nul. Quel est le signe de b dans chacun des cas suivants ?

a) $3a^7b^3$ est négatif. b) $-7a^8b^5$ est positif. c) $(-3)^3a^{12}b^{15}$ est négatif.

2 Racines carrées

Exercice 4

1) Simplifier : $\sqrt{75}$; $\sqrt{8}\times\sqrt{18}$; $\sqrt{\frac{5}{45}}$; $3\sqrt{12}-2\sqrt{27}+\sqrt{48}$.

2) Développer et réduire : $\left(2\sqrt{3}\right)^2$; $\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)$; $\left(1+\sqrt{2}\right)^2$.

Exercice 5

Écrire sans radical au dénominateur : $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$; $\frac{3}{\sqrt{7}+2}$; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

3 Comparaison et ordre

Exercice 6

Ranger dans l'ordre croissant :

a) $4{,}004$; $40{,}04$; 404×10^{-3} ; -4004.

b) -2×10^{-4} ; 32×10^{-5} ; $0{,}000025\times10^3$; $3{,}4\times10^{-4}$.

Exercice 7

1) Comparer $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$, puis $\sqrt{5}$ et $2{,}2$.

2) On pose $a=0{,}3$. Sans calculatrice, ranger a, a^2, $\sqrt{a}$ et $\dfrac{1}{a}$ dans l'ordre croissant. Justifier.

4 Intervalles et encadrements

Exercice 8

1) Écrire sous forme d'intervalle puis représenter sur une droite graduée : $2\le x\le 5$; $0\le x<3$; $-1<x<1$; $x\ge 2$; $x\le -5$.

2) Traduire par des inégalités : $x\in[-2;7[$; $x\in[-1;+\infty[$; $x\in]-\infty;10{,}7[$.

Exercice 9

1) Soit a un réel tel que $-2\le a\le 3$. Encadrer $a+4$; $2a$; $-a$; $-3a+5$.

2) Une pièce rectangulaire a une aire comprise entre $16{,}12$ m² et $16{,}96$ m², et une longueur comprise entre $5{,}2$ m et $5{,}3$ m. Donner un encadrement de sa largeur (arrondi à $0{,}01$ près).

5 Valeur absolue et ordre de grandeur

Exercice 10

1) Écrire sans valeur absolue : $|-3{,}5|$; $|\sqrt{2}-1|$; $|1-\sqrt{3}|$; $|3-\pi|$.

2) Résoudre : $|x-1|=3$; $|x|=-2$; $|x|<1{,}5$.

Exercice 11

Soit a un réel tel que $-1<2a-1<2$.

1) Donner un encadrement de a, puis de a^2-10.

2) Écrire $|a-2|$ sans valeur absolue et en donner un encadrement.

Exercice 12

L'angström est une unité de longueur : 1 Å = 10^{-10} m. Un proton a un diamètre de 10^{-5} Å. Combien de protons placerait-on côte à côte pour obtenir une longueur de 1 dm ?

Exercice 13

On considère les suites de nombres suivantes :

1) 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; ... Donner le 10ème terme.

2) 1 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10 ; 12 ; ... Donner le 9ème terme.

3) 1 ; $\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{5}{6}$; $\dfrac{11}{12}$; $\dfrac{23}{24}$; ... Donner les trois termes suivants.

Exercice 14

1) Calculer : $1+9\times 4-2\times 5+1$.

2) Simplifier : $2\sqrt{54}-2\sqrt{24}-\sqrt{150}+\sqrt{6}$.

3) Écrire sans valeur absolue : $|3-\pi|+|\frac{4}{\pi}-1|+|\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}|$.

Exercice 15

Soient x et y deux réels tels que $1<x<2$ et $-3<y<0$.

1) Encadrer $y+4$, puis $\frac{x}{y+4}$.

2) Vérifier que $\frac{x+2}{x+1}=1+\frac{1}{x+1}$, puis encadrer $\frac{x+2}{x+1}$.

3) Vérifier que $\frac{y+1}{y-1}=1+\frac{2}{y-1}$, puis encadrer $\frac{y+1}{y-1}$.

Exercice 16

1) $\frac{2}{11-2}=\frac{12}{111-3}=\frac{123}{1111-4}=\frac{1234}{11111-5}$

2) $\frac{1}{4}=\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\frac{1}{50}+\frac{1}{60}+\frac{1}{200}$

3) $20\,151\,121=(20+15+11+21)^4$

Exercice 17

1) Écrire sans radical au dénominateur les inverses de : $2-\sqrt{3}$; $\sqrt{7}-\sqrt{6}$; $2\sqrt{2}-\sqrt{7}$.

2) Soit n un entier naturel. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$.

3) En déduire que $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, puis simplifier :

$$S=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

Exercice 18

Étant donné un entier naturel n, on pose $p=n(n+3)$.

1) Exprimer le produit $(n+1)(n+2)$ en fonction de p.

2) Exprimer le produit $n(n+1)(n+2)(n+3)$ en fonction de p.

3) En déduire que, lorsqu'on augmente de 1 le produit de quatre entiers consécutifs, on obtient un carré parfait.

4) Application : de quel entier le nombre $24\times25\times26\times27+1$ est-il le carré ? Et $1996\times1997\times1998\times1999+1$?

Exercice 19

Soient trois réels positifs a, b et c tels que $a\leq b+c$.

1) Montrer que pour tous réels positifs u et v : si $u\leq v$ alors $\frac{u}{1+u}\leq\frac{v}{1+v}$. *(Indication : $\frac{u}{1+u}=1-\frac{1}{1+u}$.)*

2) En déduire que $\frac{a}{1+a}\leq\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$.

Exercice 20

1) Démontrer que pour tout réel $x \neq -1$: $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{1+x}$.

2) Démontrer que pour tout $x \in [-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}]$:

a) $0 \leq x^2 \leq \dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{2}{3} \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 2$ c) $0 \leq \dfrac{x^2}{1+x} \leq 2x^2$

3) En déduire que, pour tout $x \in [-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}]$, $1 - x$ est une valeur approchée par défaut de $\dfrac{1}{1+x}$ à $2x^2$ près.

4) Donner, par cette méthode, une valeur approchée de $\dfrac{1}{1{,}004}$; $\dfrac{1}{1{,}00001}$; $\dfrac{1}{0{,}9995}$, en indiquant la précision.

Exercice 21

Soit x un réel strictement positif. On pose $A = \sqrt{1+x}$; $B = 1 + \dfrac{x}{2}$ et $C = \dfrac{x^2}{8} + \sqrt{1+x}$.

1) Démontrer que A, B et C sont strictement supérieurs à 1.

2) Comparer A^2 et B^2. En déduire que $\sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2}$.

3) Démontrer que $C^2 - B^2 = \dfrac{x^2}{4}\left(\sqrt{1+x} + \dfrac{x^2}{16} - 1\right)$. Comparer C et B, puis en déduire que $1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} < \sqrt{1+x}$.

4) Donner un encadrement de $\sqrt{1{,}0002}$ et une valeur approchée de $\sqrt{1{,}0000001}$ à 10^{-14} près.

Exercice 22

1) Comparer $\sqrt{2026} + \sqrt{2024}$ et $2\sqrt{2025}$.

2) Plus généralement, montrer que pour tout entier $n \geq 1$: $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} < 2\sqrt{n}$.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Pour tout réel a, $\sqrt{a^2}=a$.	☐	☐
2. $\sqrt{16+9}=7$.	☐	☐
3. Si $a\leq b$ alors $-2a\geq -2b$.	☐	☐
4. Si $0<a<1$ alors $a^2<a$.	☐	☐
5. $(-3)^4=-81$.	☐	☐
6. $\lvert\pi-4\rvert=4-\pi$.	☐	☐