COURS • 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

Chapitre 10 — Activités numériques II

◆ **Sommaire**

- 1. Règles de calcul sur les quotients
- 2. Puissances d'un réel
- 3. Racines carrées
- 4. Signe d'un produit et d'un quotient
- 5. Comparaison de réels
- 6. Intervalles et encadrements
- 7. Valeur absolue d'un réel
- 8. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Maîtriser les règles de calcul sur les quotients, les puissances et les racines carrées.
- Déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient.
- Comparer des réels et utiliser les règles de comparaison (somme, produit, carré, racine, inverse).
- Utiliser les intervalles et les encadrements.
- Utiliser la valeur absolue d'un réel.

1 Règles de calcul sur les quotients

◆ **Propriété — pour tous réels a, b, c, d, k avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$**

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ $\quad k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$ $\quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- Si de plus $a \neq 0$ et $c \neq 0$: $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ $\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

◆ **Exemple corrigé**

$$A=\frac{2}{3}-\frac{5}{6}+\frac{7}{4}=\frac{8}{12}-\frac{10}{12}+\frac{21}{12}=\frac{19}{12}$$

$$B=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

◆ **Attention**

On n'ajoute jamais les dénominateurs : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\neq\frac{2}{5}$. On réduit d'abord au même dénominateur : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

2 Puissances d'un réel

◆ **Définition**

Pour tout réel a et tout entier $n\geq 1$: $a^n=a\times a\times\ldots\times a$ (n facteurs). Pour $a\neq 0$: $a^0=1$ et $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

◆ **Propriété — pour tous réels non nuls a et b et tous entiers m et n**

Produit	Quotient	Puissance de puissance
$a^m\times a^n=a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	$(a^m)^n=a^{mn}$
$(a\times b)^n=a^n\times b^n$	$(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}$	$(\frac{1}{a})^n=a^{-n}$

◆ **Méthode — signe d'une puissance**

Si $a<0$: a^n est **positif** si n est pair et **négatif** si n est impair. Exemples : $(-2)^4=16$; $(-2)^5=-32$.

◆ **Attention**

$-2^4=-16$ mais $(-2)^4=16$: la puissance porte seulement sur ce qui est juste avant elle.

◆ **Exemple corrigé**

$$A=\frac{(2^3\times 3^{-2})^2\times 3^5}{2^4}=\frac{2^6\times 3^{-4}\times 3^5}{2^4}=2^{6-4}\times 3^{-4+5}=2^2\times 3=12$$

3 Racines carrées

◆ Définition

Soit a un réel **positif**. La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique réel **positif** dont le carré est égal à a.

Exemples : $\sqrt{49}=7$; $\sqrt{0{,}09}=0{,}3$; $\sqrt{-4}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

◆ Propriété — pour tous réels positifs a et b

- $(\sqrt{a})^2=a$ $\quad\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ $\quad$ pour $b\neq 0$: $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- Pour tout entier $n>0$: $\sqrt{a^n}=(\sqrt{a})^n$.
- Pour **tout réel** a (positif ou négatif) : $\sqrt{a^2}=|a|$. Exemple : $\sqrt{(-5)^2}=5$.

◆ Attention — pas de règle pour la somme

En général $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$: $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ alors que $\sqrt{9}+\sqrt{16}=7$.

◆ Méthode — simplifier une racine carrée

On fait apparaître un carré parfait : $\sqrt{54}=\sqrt{9\times 6}=3\sqrt{6}$; $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$; $\sqrt{150}=5\sqrt{6}$.

D'où $2\sqrt{54}-2\sqrt{24}-\sqrt{150}+\sqrt{6}=6\sqrt{6}-4\sqrt{6}-5\sqrt{6}+\sqrt{6}=-2\sqrt{6}$.

◆ Pour aller plus loin — rappel de 9ème année : identités remarquables

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $\quad(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $\quad(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Elles seront reprises en détail au chapitre « Activités algébriques ».

◆ Méthode — supprimer le radical d'un dénominateur (expression conjuguée)

On multiplie numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée, puis on utilise $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$:

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

◆ Démonstration — $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ pour $a\geq 0$ et $b\geq 0$

Le nombre $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ est positif et son carré vaut $\sqrt{a}^2\times\sqrt{b}^2=ab$. Or $\sqrt{ab}$ est l'unique réel positif dont le carré est ab : donc $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$.

◆ **Exemple corrigé**

Écrire $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ sans radical au dénominateur.

Solution. On multiplie par la quantité conjuguée : $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{5-4}=\sqrt{5}+2.$

4 Signe d'un produit et d'un quotient

◆ **Propriété — règle des signes**

- Le produit (ou le quotient) de deux réels non nuls est **positif** s'ils sont de **même signe**.
- Il est **négatif** s'ils sont de **signes contraires**.
- Un produit de plusieurs facteurs non nuls est positif si le nombre de facteurs négatifs est pair, négatif sinon.

◆ **Exemple corrigé — estimation d'un résultat**

$P=314{,}2\times 497\times(-94)$ contient un seul facteur négatif : $P<0$. Ordre de grandeur : $300\times 500\times 100=1{,}5\times 10^7$.

Parmi $14\,678\,795{,}6$; $-467\,879\,516$ et $-14\,678\,795{,}6$, seul $-14\,678\,795{,}6$ convient.

5 Comparaison de réels

◆ **Propriété — pour tous réels a, b et c**

- $a\le b$ équivaut à $a-b\le 0$. (méthode de la **différence**)
- Si $a\le b$ et $b\le c$ alors $a\le c$.
- Si $a\le b$ alors $a+c\le b+c$.
- Si $a\le b$ et $c>0$ alors $ac\le bc$; si $a\le b$ et $c<0$ alors $ac\ge bc$ (**on change le sens**).

◆ **Propriété — carrés, racines et inverses**

- Si a et b sont non nuls et de **même signe** et si $a\le b$, alors $\dfrac{1}{a}\ge\dfrac{1}{b}$.
- Si $a\ge 0$, $b\ge 0$ et $a\le b$, alors $a^2\le b^2$ et $\sqrt{a}\le\sqrt{b}$.

Si $0<a<1$: $a^2<a<\sqrt{a}<1<\frac{1}{a}$ (exemple $a=0{,}36$)



Si $a>1$: $\frac{1}{a}<1<\sqrt{a}<a<a^2$ (exemple $a=2{,}25$)



◆ Méthode — comparer deux nombres positifs avec radicaux

On compare leurs **carrés** : $(2\sqrt{3})^2=12$ et $(3\sqrt{2})^2=18$. Comme $12<18$ et ces nombres sont positifs : $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$.

◆ Démonstration — comparaison de a^2, a, $\sqrt{a}$ et $\frac{1}{a}$ lorsque $0<a<1$

- En multipliant $a<1$ par $a>0$: $a^2<a$.
- $0<\sqrt{a}<1$ (car $a<1$), donc $a=\sqrt{a}\times\sqrt{a}<\sqrt{a}$.
- En divisant $a<1$ par $a>0$: $1<\frac{1}{a}$. Bilan : $a^2<a<\sqrt{a}<1<\frac{1}{a}$.

6 Intervalles et encadrements

Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Les ensembles de réels x suivants sont des **intervalles** :

Intervalle	Inégalités	Représentation sur la droite réelle
$[a\,;\,b]$	$a\leq x\leq b$	
$]a\,;\,b[$	$a<x<b$	
$[a\,;\,b[$	$a\leq x<b$	
$]a\,;\,b]$	$a<x\leq b$	
$[a\,;\,+\infty[$	$x\geq a$	
$]a\,;\,+\infty[$	$x>a$	
$]-\infty\,;\,b]$	$x\leq b$	
$]-\infty\,;\,b[$	$x<b$	

Le crochet tourné vers l'intervalle signifie que la borne est incluse ; tourné vers l'extérieur, elle est exclue. Du côté de ∞, le crochet est toujours ouvert.

◆ Définition — encadrement

Écrire $3{,}1 \le x \le 3{,}2$, c'est donner un **encadrement** de x ; son **amplitude** est $3{,}2 - 3{,}1 = 0{,}1$.

◆ Méthode — encadrer une expression

On part de l'encadrement donné et on applique les règles de comparaison **étape par étape**. Avec $-2 \le a \le 3$:

- $a+4$: on ajoute 4 : $2 \le a+4 \le 7$.
- $-a$: on multiplie par -1 (on change le sens) : $-3 \le -a \le 2$.
- $-3a+5$: $-9 \le -3a \le 6$, puis $-4 \le -3a+5 \le 11$.

◆ Attention — on ne soustrait pas des encadrements

Pour encadrer $x - y$, on encadre d'abord $-y$, puis on **ajoute** : $x - y = x + (-y)$. Pour un quotient $\frac{x}{y}$ (nombres positifs), on encadre $\frac{1}{y}$ puis on **multiplie**.

7 Valeur absolue d'un réel

◆ Définition

La **valeur absolue** d'un réel a, notée $|a|$, est la **distance** entre le point d'abscisse a et l'origine O sur une droite graduée.

$$|a| = a \text{ si } a \ge 0 \text{ et } |a| = -a \text{ si } a \le 0$$

Exemples : $|7| = 7$; $|-7| = 7$; $|3 - \pi| = \pi - 3$ car $3 - \pi < 0$.

◆ Propriété

- $|a| \ge 0$; $|-a| = |a|$; $\sqrt{a^2} = |a|$.
- $|x - a|$ est la distance entre les points d'abscisses x et a.
- Pour $r > 0$: $|x| = r$ équivaut à $x = r$ ou $x = -r$; $|x| \le r$ équivaut à $-r \le x \le r$, c'est-à-dire $x \in [-r\,;r]$.

◆ Exemple corrigé

$|x - 1| = 3$: x est à la distance 3 de 1, donc $x = 4$ ou $x = -2$.

$|x| < 1{,}5$ équivaut à $-1{,}5 < x < 1{,}5$, soit $x \in]-1{,}5\,;1{,}5[$.

◆ **Exemple corrigé**

Résoudre $|x-2|\leq 3$.

Solution. $|x-2|$ est la distance entre x et 2 : $|x-2|\leq 3$ équivaut à $-3\leq x-2\leq 3$, soit $-1\leq x\leq 5$.
L'ensemble des solutions est $[-1\,;5]$.

★ Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir**

- Quotients : même dénominateur pour additionner ; diviser = multiplier par l'inverse.
- Puissances : $a^m a^n = a^{m+n}$; $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- Racines : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; $\sqrt{a^2} = |a|$; jamais de règle pour $\sqrt{a+b}$.
- Multiplier une inégalité par un **négatif** change son sens ; passer à l'inverse (même signe) aussi.
- Si $0<a<1$: $a^2 < a < \sqrt{a}$; si $a>1$: $\sqrt{a} < a < a^2$.
- $|a|$ = distance de a à 0 ; $|x|\leq r \iff -r\leq x\leq r$.

◆ **Pour aller plus loin — un petit défi d'olympiade**

Sans calculatrice, comparer $\sqrt{2026}+\sqrt{2024}$ et $2\sqrt{2025}$.

Indication : comparer les carrés et utiliser $2024\times 2026 = 2025^2 - 1$.