COURS • 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

Chapitre 1 — Angles

◆ **Sommaire**

- 1. Rappels : vocabulaire des angles
- 2. Angles et droites parallèles
- 3. Triangle rectangle et cercle
- 4. Angle inscrit et angle au centre
- 5. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Reconnaître des angles alternes-internes, correspondants, intérieurs d'un même côté.
- Utiliser ces angles pour calculer des mesures ou démontrer que deux droites sont parallèles.
- Caractériser le triangle rectangle par son cercle circonscrit.
- Utiliser la relation entre angle inscrit et angle au centre.

1 Rappels : vocabulaire des angles

Nom	Définition	Exemple
Angle aigu / obtus	mesure comprise entre $0°$ et $90°$ / entre $90°$ et $180°$	$35\,°$; $120\,°$
Angles complémentaires	leur somme est égale à $90°$	$30\,°$ et $60\,°$
Angles supplémentaires	leur somme est égale à $180°$	$70\,°$ et $110\,°$
Angles adjacents	même sommet, un côté commun, situés de part et d'autre de ce côté	—
Angles opposés par le sommet	même sommet, côtés dans le prolongement l'un de l'autre : ils sont égaux	—

◆ **Propriété — somme des angles d'un triangle**

Dans tout triangle ABC : $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180\,°$.

Conséquence : un **angle extérieur** d'un triangle est égal à la somme des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents. Si D est sur le prolongement de $[BC]$ au-delà de C : $\widehat{ACD}=\widehat{CAB}+\widehat{ABC}$.

◆ **Démonstration — somme des angles d'un triangle**

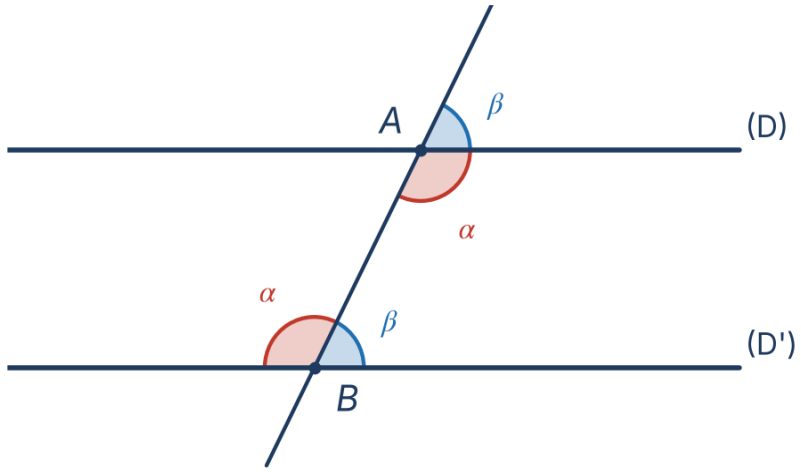
Par A, on mène la droite (Δ) parallèle à (BC) ; on y place E et F de part et d'autre de A, E du côté de B.

Les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont alternes-internes pour les parallèles (Δ) et (BC) coupées par (AB) : ils sont égaux. De même $\widehat{FAC} = \widehat{ACB}$.

Or $\widehat{EAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAF} = 180\,°$ (angle plat), donc $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180\,°$.

2 Angles et droites parallèles

Deux droites (D) et (D') coupées par une **sécante** forment des paires d'angles particulières :



en rouge : alternes-internes (égaux) • en bleu : correspondants (égaux)

◆ **Définition**

- **Alternes-internes** : situés de part et d'autre de la sécante, **entre** les deux droites.
- **Correspondants** : situés du même côté de la sécante, l'un entre les droites, l'autre à l'extérieur, « à la même place ».
- **Intérieurs d'un même côté** : situés du même côté de la sécante, **entre** les deux droites.

◆ **Propriété — si deux droites sont parallèles...**

Deux droites parallèles forment avec une sécante :

- des angles **alternes-internes égaux** ;
- des angles **correspondants égaux** ;
- des angles **intérieurs d'un même côté supplémentaires** (leur somme vaut 180°).

◆ **Propriété — réciproques : pour démontrer que deux droites sont parallèles**

Si deux droites forment avec une sécante deux angles alternes-internes égaux, **ou** deux angles correspondants égaux, **ou** deux angles intérieurs d'un même côté supplémentaires, **alors ces deux droites sont parallèles**.

◆ **Exemple corrigé**

Deux droites coupées par une sécante forment deux angles intérieurs d'un même côté de $131{,}2°$ et $48{,}8°$. Comme $131{,}2° + 48{,}8° = 180°$, ces angles sont supplémentaires : **les droites sont parallèles**.

◆ **Attention**

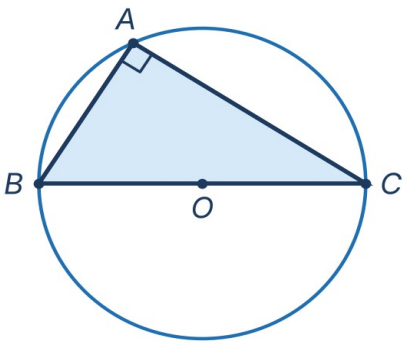
Les égalités d'angles n'ont lieu que si les droites sont **parallèles**. Ne jamais écrire que deux angles alternes-internes sont égaux sans l'avoir justifié par le parallélisme.

◆ **Exemple corrigé — les huit angles**

Deux droites parallèles (D) et (D') sont coupées par une sécante ; l'un des angles formés mesure $65°$. Donner la mesure des sept autres.

Solution. En chacun des deux points d'intersection, les angles opposés par le sommet sont égaux et les angles adjacents sont supplémentaires : on obtient $65°$ et $180° - 65° = 115°$. Les angles correspondants étant égaux (droites parallèles), les huit angles mesurent tous $65°$ ou $115°$: quatre de chaque.

3 Triangle rectangle et cercle



◆ **Propriété**

Si un triangle ABC est rectangle en A, alors son hypoténuse $[BC]$ est un **diamètre** de son cercle circonscrit : le centre est le milieu O de $[BC]$ et $OA = OB = OC = \dfrac{BC}{2}$.

Réciproquement, si le côté $[BC]$ d'un triangle ABC est un diamètre de son cercle circonscrit, alors ce triangle est **rectangle en** A.

◆ **Propriété — ensemble de points**

Soient A et B deux points distincts. L'ensemble des points P tels que $\widehat{APB} = 90°$ est le **cercle de diamètre** $[AB]$ **privé des points** A **et** B.

◆ **Exemple corrigé**

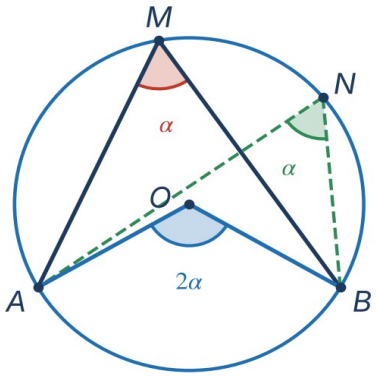
Un triangle EFG est rectangle en E et son hypoténuse mesure 6 cm. Son cercle circonscrit a pour diamètre 6 cm, donc pour périmètre $6\pi \approx 18{,}85$ cm.

◆ **Démonstration — triangle rectangle et cercle circonscrit**

Soit ABC rectangle en A et O le milieu de $[BC]$. Soit A' le symétrique de A par rapport à O. Les diagonales $[AA']$ et $[BC]$ du quadrilatère $ABA'C$ ont le même milieu O : c'est un parallélogramme. Il possède un angle droit en A : c'est un rectangle, donc ses diagonales ont la même longueur : $AA' = BC$, d'où $OA = \dfrac{BC}{2} = OB = OC$.

Réciproque. Si $OA = OB = OC$, les triangles OAB et OAC sont isocèles en O : $\widehat{OAB} = \hat{B}$ et $\widehat{OAC} = \hat{C}$. Donc $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$; avec $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\,°$, on obtient $2\,\hat{A} = 180\,°$, soit $\hat{A} = 90\,°$.

4 Angle inscrit et angle au centre



◆ **Définition**

Soit (C) un cercle de centre O. Un angle dont le sommet M est sur le cercle et dont les côtés recoupent le cercle en A et B est un **angle inscrit** ; il **intercepte** l'arc AB.

L'angle $\widehat{AOB}$ est l'**angle au centre associé** (il intercepte le même arc).

◆ **Propriété**

- Un angle inscrit est égal à la **moitié** de l'angle au centre qui intercepte le même arc : $\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$.
- Deux angles inscrits qui interceptent le **même arc** sont **égaux** : $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.

◆ **Exemple corrigé — triangle équilatéral inscrit**

Si ABC est équilatéral inscrit dans un cercle de centre O : $\widehat{ACB} = 60\,°$ intercepte l'arc AB, donc $\widehat{AOB} = 2 \times 60\,° = 120\,°$.

◆ **Pour aller plus loin — complément utile (manuel, exercices)**

Si A, B, C, D sont quatre points d'un même cercle formant un quadrilatère convexe $ABCD$, alors ses angles opposés sont **supplémentaires** : $\widehat{DAB}+\widehat{DCB}=180\,°$.

◆ **Démonstration — angle inscrit — cas où le centre est sur un côté**

Supposons que O appartienne au côté $[\,MB\,]$ de l'angle inscrit $\widehat{AMB}$. Le triangle OAM est isocèle en O ($OA=OM$), donc $\widehat{OAM}=\widehat{OMA}$.

L'angle $\widehat{AOB}$ est un angle extérieur du triangle OAM : $\widehat{AOB}=\widehat{OAM}+\widehat{OMA}=2\,\widehat{AMB}$.

Dans le cas général, on trace le diamètre $[\,MM'\,]$ et on ajoute (ou on soustrait) les deux égalités obtenues.

◆ **Exemple corrigé**

A, B, C sont trois points d'un cercle de centre O tels que $\widehat{AOB}=100\,°$. Calculer $\widehat{ACB}$ lorsque C est sur le grand arc AB.

Solution. $\widehat{ACB}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc AB ; l'angle au centre associé est $\widehat{AOB}$. Donc $\widehat{ACB}=\dfrac{100\,°}{2}=50\,°$.

★ Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir**

- Parallèles + sécante : alternes-internes égaux, correspondants égaux, intérieurs d'un même côté supplémentaires — et réciproquement.
- Somme des angles d'un triangle : $180\,°$; angle extérieur = somme des deux angles non adjacents.
- Triangle rectangle $\Longleftrightarrow$ hypoténuse = diamètre du cercle circonscrit.
- Angle inscrit = moitié de l'angle au centre associé ; deux angles inscrits interceptant le même arc sont égaux.

◆ **Pour aller plus loin — un petit défi d'olympiade**

$[\,MN\,]$ et $[\,PQ\,]$ sont deux cordes perpendiculaires d'un cercle, sécantes en I. Montrer que la hauteur issue de I du triangle IMQ passe par le milieu de $[\,PN\,]$.

Indication : comparer $\widehat{MQI}$ et $\widehat{MNP}$ (même arc), puis chercher un triangle isocèle.