COLLECTION ATOMATH

Préparation progressive aux Olympiades internationales de mathématiques

TOME IV

COMBINATOIRE

De la première formule de dénombrement au problème 3 de l'OIM

ÉDITION DÉTAILLÉE · TOUS LES THÉORÈMES DÉMONTRÉS

Ali AKIR

FORMATEUR OLYMPIQUE

Première édition

COLLECTION ATOMATH

ATOMATH

Préparation progressive aux Olympiades internationales de mathématiques

TOME IV

Combinatoire

De la première formule de dénombrement au problème 3 de l'OIM

Cours complet, méthodes, exemples résolus et exercices corrigés

Ali AKIR

Formateur olympique

Première édition

ATOMATH — Tome IV : Combinatoire

Collection ATOMATH, préparation aux Olympiades internationales de mathématiques.

Tous droits réservés. Toute reproduction, même partielle, par quelque procédé que ce soit, est interdite sans autorisation préalable, à l'exception des courtes citations dans le cadre d'un usage pédagogique, conformément aux dispositions légales en vigueur.

Table des matières

Introduction **1**

Mode d'emploi de ce tome **2**

À qui s'adresse ce tome 2
Structure d'un chapitre 2
Code de difficulté 2
Notations utilisées 2

PARTIE I — Compter **4**

1 Les principes fondamentaux du dénombrement **5**

1.1 Le principe de bijection 5
1.2 Principe additif et principe multiplicatif 6
1.3 Permutations, arrangements, combinaisons 7
1.4 Permutations avec répétitions ; coefficients multinomiaux 9
1.5 Combinaisons avec répétition : étoiles et barres 10
1.6 Récapitulatif 11
1.7 Exercices 11
1.8 Corrigés 12

2 Coefficients binomiaux **15**

2.1 Définition et symétries 15
2.2 La formule du binôme et ses conséquences 16
2.3 Estimations utiles 19
2.4 Propriétés arithmétiques 19
2.5 Exercices 21
2.6 Corrigés 22

3 Bijections, codages et nombres de Catalan **24**

3.1 Pourquoi les bijections ? 24
3.2 Le lemme de réflexion 25
3.3 Les nombres de Catalan 26
3.4 Le principe d'involution 28
3.5 Formule de Cayley et code de Prüfer 29
3.6 Exercices 30
3.7 Corrigés 30

4 Le principe d'inclusion–exclusion **32**

4.1 Le crible 32
4.2 Dérangements 33
4.3 Surjections et nombres de Stirling 34
4.4 Applications arithmétiques 35
4.5 Version « exactement m » et inégalités de Bonferroni 36
4.6 Exercices 37
4.7 Corrigés 37

5 Récurrences et fonctions génératrices 39
5.1 Mettre un problème en récurrence 39
5.2 Récurrences linéaires à coefficients constants 39
5.3 Séries formelles et fonctions génératrices 41
5.4 Le filtre par les racines de l'unité 42
5.5 Exercices 43
5.6 Corrigés 44

PARTIE II — Les grands principes 46

6 Le principe des tiroirs 47
6.1 Les trois énoncés 47
6.2 Applications classiques 48
6.3 Le principe de la valeur moyenne 50
6.4 Le principe des tiroirs infini 51
6.5 Exercices 51
6.6 Corrigés 52

7 Double comptage et principe de Fubini 54
7.1 Le principe 54
7.2 Du comptage à l'inégalité 56
7.3 Exercices 59
7.4 Corrigés 60

8 Invariants, monovariants et coloriages 62
8.1 L'idée d'invariant 62
8.2 Coloriages 64
8.3 Monovariants 67
8.4 Exercices 69
8.5 Corrigés 70

9 Principe de l'extremum, descente et récurrence 72
9.1 Le principe de l'extremum 72
9.2 La descente infinie 74
9.3 Construire par récurrence 75
9.4 Exercices 76
9.5 Corrigés 76

PARTIE III — Structures combinatoires 79

10 Théorie des graphes 80
10.1 Vocabulaire 80
10.2 Connexité et arbres 81
10.3 Graphes eulériens 82
10.4 Graphes bipartis et couplages 84
10.5 Graphes planaires 85
10.6 Coloration 86
10.7 Exercices 88
10.8 Corrigés 88

11 Combinatoire extrémale 91
11.1 Le problème de Turán 91
11.2 Théorie de Ramsey 92
11.3 Familles d'ensembles 93
11.4 Exercices 96
11.5 Corrigés 97

12 Jeux mathématiques 99
12.1 Le cadre 99
12.2 La stratégie de symétrie 100
12.3 Le vol de stratégie 102
12.4 Le jeu de Nim 103
12.5 Sprague–Grundy 103
12.6 Exercices 104
12.7 Corrigés 105

13 Méthodes probabiliste et algébrique 108
13.1 Estimer par convexité 108
13.2 La méthode probabiliste 109
13.3 La méthode algébrique 112
13.4 La méthode du polynôme 113
13.5 Exercices 115
13.6 Corrigés 115

PARTIE IV — Objectif OIM 117

14 Chercher et rédiger : la méthode de travail 118
14.1 Ce qui rend la combinatoire différente 118
14.2 Le protocole des vingt premières minutes 118
14.3 Le catalogue des réflexes 119
14.4 Les quatre architectures de solution 120
14.5 Travailler les petits cas avec méthode 121
14.6 Rédiger une solution qui vaut 7 points 121
14.7 Gérer une épreuve de 4 h 30 122
14.8 S'entraîner efficacement 123

15 Problèmes d'OIM intégralement corrigés 124
15.1 Problème 1 — OIM 1987, problème 1 124
15.2 Problème 2 — OIM 1989, problème 6 124
15.3 Problème 3 — OIM 1998, problème 2 126
15.4 Problème 4 — OIM 2003, problème 1 127
15.5 Banque de problèmes d'OIM à chercher 128

PARTIE V — Annexes 130

A Formulaire de combinatoire 131
A.1 Dénombrement élémentaire 131
A.2 Coefficients binomiaux 132
A.3 Les grands principes 132

A.4 Graphes 133
A.5 Familles d'ensembles et méthodes algébriques 133
A.6 Jeux combinatoires 134
B Mémento : quel outil pour quel énoncé ? 135
C Plan d'entraînement en vingt semaines 136
D Bibliographie et ressources 137
D.1 Ouvrages de référence 137
D.2 Ressources en ligne 137
D.3 Correspondance avec les chapitres de Mathraining 137
À propos de l'auteur 138

Introduction

La collection ATOMATH propose un parcours complet de préparation aux Olympiades internationales de mathématiques, organisé en quatre tomes indépendants mais complémentaires : Algèbre, Géométrie, Arithmétique et Combinatoire. Chaque tome couvre, de façon autonome, l'un des quatre grands domaines abordés lors des compétitions internationales.

Ce quatrième et dernier tome est consacré à la **combinatoire olympique**. Il ne suppose aucun prérequis autre qu'une bonne maîtrise du calcul algébrique élémentaire et du raisonnement par récurrence. Il conduit, chapitre après chapitre, jusqu'au niveau exigé par les problèmes de combinatoire posés à l'Olympiade internationale de mathématiques.

La combinatoire est, de toutes les branches olympiques, celle qui récompense le moins la connaissance et le plus l'ingéniosité. On ne résout pas un problème de combinatoire en appliquant un théorème : on le résout en trouvant le bon point de vue. Ce cours a donc un double objectif :

1. constituer une boîte à outils solide — les techniques classiques, démontrées et illustrées ;
2. développer un réflexe de recherche — savoir quelle question se poser devant un énoncé que l'on ne comprend pas encore.

Le cours est divisé en quatre parties.

- **Partie I — Compter.** Les techniques de dénombrement : principes fondamentaux, coefficients binomiaux, bijections, inclusion-exclusion, récurrences et fonctions génératrices.
- **Partie II — Les grands principes.** Les quatre principes qui structurent la combinatoire olympique : tiroirs, double comptage, invariance, extremum.
- **Partie III — Structures combinatoires.** Théorie des graphes, combinatoire extrémale, jeux mathématiques, méthodes algébriques et probabilistes.
- **Partie IV — Objectif OIM.** Stratégie de recherche, rédaction et une sélection de problèmes d'OIM intégralement corrigés.

Chaque chapitre suit la même architecture : le cours, avec toutes les définitions et tous les théorèmes démontrés ; des encadrés « Méthode » qui résument la stratégie à retenir ; des exemples résolus, rédigés comme on attendrait qu'ils le soient en compétition ; une série d'exercices gradués, tous corrigés en fin de chapitre.

À retenir (Conseil d'utilisation)

Ne lisez pas les solutions. C'est le seul conseil qui compte vraiment. Un problème sur lequel vous avez séché deux heures avant de lire la correction vous apprendra dix fois plus qu'un problème dont vous avez lu la solution après cinq minutes. Fixez-vous une règle stricte : quarante-cinq minutes de recherche effective au minimum avant d'ouvrir la correction, et notez systématiquement, dans un carnet, l'idée clé que vous n'avez pas trouvée. Ce carnet vaudra, au bout d'un an, plus que ce cours.

Bon travail, et bonne route vers l'IMO.

Mode d'emploi de ce tome

À qui s'adresse ce tome

Ce tome est un cours complet de combinatoire olympique. Il ne suppose aucun prérequis autre qu'une bonne maîtrise du calcul algébrique élémentaire et du raisonnement par récurrence, et conduit jusqu'au niveau exigé par les problèmes de combinatoire posés à l'IMO.

Structure d'un chapitre

Chaque chapitre suit la même architecture :

1. le **cours**, avec toutes les définitions et tous les théorèmes démontrés ;
2. des encadrés **Méthode** qui résument la stratégie à retenir ;
3. des **exemples résolus**, rédigés comme on attendrait qu'ils le soient en compétition ;
4. une série d'**exercices** gradués, tous corrigés en fin de chapitre.

Code de difficulté

- ★ application directe du cours.
- ★★ niveau olympiade nationale (premier tour).
- ★★★ niveau olympiade nationale (finale), *shortlist* facile.
- ★★★★ niveau OIM / *shortlist*.

Notations utilisées

Notation	Signification
$[\![1, n]\!]$	intervalle d'entiers $\{1,2, \dots, n\}$
$\lvert E\rvert$ ou $\mathrm{Card}(E)$	cardinal (nombre d'éléments) de l'ensemble fini E
$\mathcal{P}(E)$	ensemble des parties de E
$n!$	factorielle : $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$, avec $0! = 1$
$\binom{n}{k}$	coefficient binomial, nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments
A_n^k	nombre d'arrangements de k éléments parmi n : $\frac{n!}{(n-k)!}$
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	entiers naturels, relatifs, rationnels, réels, complexes
$\lfloor x \rfloor$	partie entière de x
$f : E \to F$	application de E vers F ; injective, surjective, bijective au sens usuel
$G = (V, E)$	graphe de sommets V et d'arêtes E
$\deg(v)$	degré du sommet v dans un graphe

Les problèmes sont étiquetés par leur origine lorsqu'elle est connue : (OIM 1987, problème 1) désigne le problème 1 de l'OIM 1987, (ISL) un problème de la liste courte (*shortlist*) de l'OIM, (USAMO), (Iran TST), etc. Un problème sans étiquette est un exercice d'entraînement classique.

À retenir (Comment travailler)

1. Lire le cours avec un crayon et refaire chaque démonstration sur une feuille blanche, cours fermé.
2. Chercher chaque exercice au moins 45 minutes avant de regarder la solution. En combinatoire plus qu'ailleurs, c'est la recherche — pas la lecture — qui construit le réflexe.
3. Après avoir lu une solution, la réécrire seul le lendemain, sans notes.
4. Tenir un carnet d'idées : pour chaque problème raté, noter en une phrase l'idée clé qui manquait (le bon découpage, l'invariant, la bijection). Ce carnet est le meilleur outil de progression en combinatoire.
5. Travailler systématiquement les petits cas ($n = 1,2,3,4$) avant de chercher une preuve générale : c'est souvent là que la conjecture — et parfois l'idée de preuve — apparaît.

Attention.

La combinatoire ne pardonne pas les arguments approximatifs : « il y a environ » ou « on peut montrer que » ne sont pas des preuves. Une construction doit être explicite et vérifiable ; une majoration doit être justifiée à chaque étape. Le manque de rigueur est, avec la mauvaise gestion du temps, la première cause de perte de points en combinatoire.

PARTIE I — Compter

CHAPITRE 1

1 Les principes fondamentaux du dénombrement

Objectifs du chapitre. Savoir découper un problème de comptage en une somme et un produit ; connaître et savoir redémontrer les formules de permutations, arrangements et combinaisons ; maîtriser la méthode des étoiles et des barres ; comprendre que toute formule de dénombrement est, au fond, une bijection.

1.1 Le principe de bijection

Tout le dénombrement repose sur une idée d'une simplicité désarmante : compter, c'est mettre en bijection avec $[\![1, n]\!]$.

Définition 1.1.1 (Cardinal d'un ensemble fini)

Un ensemble E est dit fini de cardinal n s'il existe une bijection de E sur $[\![1, n]\!] = \{1, 2, \dots, n\}$. Cet entier n est alors unique ; on le note $|E|$ ou $\mathrm{Card}(E)$. Par convention $|\varnothing| = 0$.

Unicité du cardinal.

L'unicité de n provient du **lemme des tiroirs élémentaire** : *pour $m < n$, il n'existe pas d'injection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, m]\!]$.* Par récurrence sur m : pour $m = 0$, l'ensemble d'arrivée est vide. Si $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$ est injective avec $m < n$, quitte à composer par la transposition échangeant $f(n)$ et m, on peut supposer $f(n) = m$; alors f envoie injectivement $[\![1, n-1]\!]$ dans $[\![1, m-1]\!]$ (aucun $i < n$ n'a pour image m), avec $m - 1 < n - 1$: contradiction avec l'hypothèse de récurrence. Si E était en bijection avec $[\![1, n]\!]$ et $[\![1, m]\!]$, $m < n$, la composée fournirait une telle injection.

Théorème 1.1.2 (Principe de bijection)

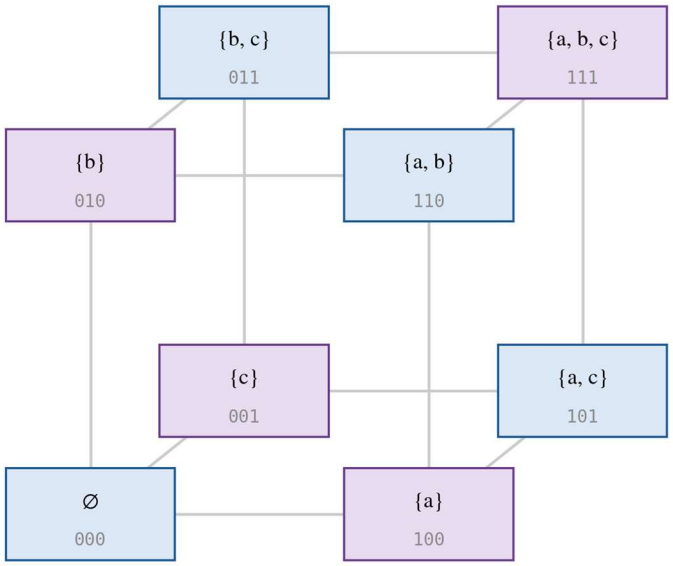
Soient E et F deux ensembles finis. S'il existe une bijection $f : E \to F$, alors $|E| = |F|$.

Démonstration. Soit $g : F \to [\![1, m]\!]$ une bijection, où $m = |F|$. Alors $g \circ f : E \to [\![1, m]\!]$ est une bijection (composée de bijections), donc $|E| = m$ par définition et unicité du cardinal. ∎

Ce théorème est le plus puissant du chapitre, précisément parce qu'il ne dit rien de quantitatif : il permet de remplacer un ensemble compliqué par un ensemble simple. Nous lui consacrerons entièrement le chapitre 3.

Exemple 1.1.3 (Nombre de parties d'un ensemble). *Montrer qu'un ensemble E à n éléments possède exactement 2^n parties.*

Solution. Notons $E = \{x_1, \dots, x_n\}$. À toute partie $A \subseteq E$ associons le mot binaire $\varphi(A) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$, où $\varepsilon_i = 1$ si $x_i \in A$, 0 sinon. L'application $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^n$ est bijective : sa réciproque associe au mot (ε_i) la partie $\{x_i : \varepsilon_i = 1\}$. Or $|\{0,1\}^n| = 2^n$ (principe multiplicatif ci-dessous). Donc $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.



Les 8 parties de E = {a, b, c} et leurs mots binaires : la partie A est codée par (1 si a ∈ A, 1 si b ∈ A, 1 si c ∈ A). Les parties forment les sommets d'un cube, deux sommets voisins différant d'un seul élément.

1.2 Principe additif et principe multiplicatif

Théorème 1.2.1 (Principe additif)

Si $A_1, \dots, A_k$ sont des ensembles finis deux à deux disjoints, alors $\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$.

Démonstration. Par récurrence sur k, il suffit de traiter $k = 2$ (on écrit $A_1 \cup \cdots \cup A_k = (A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}) \cup A_k$, réunion de deux ensembles disjoints). Soient $f : A \to [\![1, a]\!]$ et $g : B \to [\![1, b]\!]$ des bijections, $A \cap B = \varnothing$. L'application h définie sur $A \cup B$ par $h(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $h(x) = a + g(x)$ si $x \in B$ est bien définie (les ensembles sont disjoints) et c'est une bijection de $A \cup B$ sur $[\![1, a + b]\!]$: sa réciproque envoie $i \leq a$ sur $f^{-1}(i)$ et $i > a$ sur $g^{-1}(i - a)$. Donc $|A \cup B| = a + b$. ■

À retenir

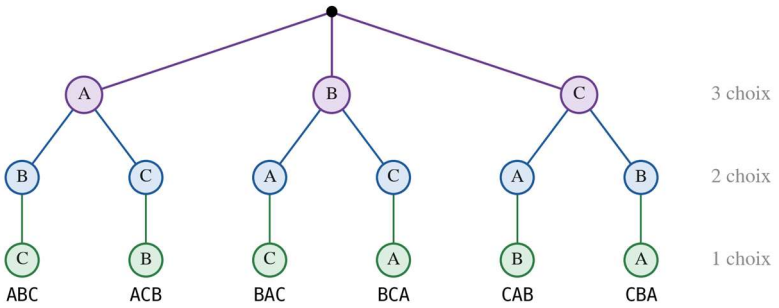
Traduction stratégique : si les objets à compter se répartissent en catégories disjointes, comptez chaque catégorie séparément. La difficulté est toujours de choisir un découpage à la fois exhaustif et sans recouvrement. Si le découpage se recouvre, il faudra le principe d'inclusion–exclusion (chapitre 4).

Théorème 1.2.2 (Principe multiplicatif)

Si $E_1, \dots, E_k$ sont des ensembles finis, alors $|E_1 \times \cdots \times E_k| = |E_1| \cdots |E_k|$.

Démonstration. Par récurrence sur k, il suffit de traiter $E \times F$ (car $E_1 \times \cdots \times E_k$ est en bijection avec $(E_1 \times \cdots \times E_{k-1}) \times E_k$). Or $E \times F = \bigsqcup_{x \in E} \{x\} \times F$, réunion disjointe de $|E|$ ensembles, chacun en bijection avec F par $(x, y) \mapsto y$. Le principe additif donne $|E \times F| = |E| \cdot |F|$.

Version « choix successifs ». Récurrence sur k : les objets se répartissent, selon le résultat du premier choix, en n_1 classes disjointes ; dans chacune, il reste $k - 1$ choix offrant $n_2, \dots, n_k$ possibilités, soit $n_2 \cdots n_k$ objets par hypothèse de récurrence. Le principe additif donne $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$. ■



L'arbre des choix successifs pour ranger trois personnes A, B, C sur trois chaises : 3 branches, puis 2, puis 1 ; les feuilles sont les $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ rangements.

Plus utile en pratique : si un objet se construit par k choix successifs, le i-ième choix offrant n_i possibilités quelles que soient les décisions déjà prises, alors le nombre d'objets est $n_1 n_2 \cdots n_k$.

Attention.

La clause « quelles que soient les décisions déjà prises » est essentielle : c'est le *nombre* de possibilités qui doit être constant, pas l'ensemble des possibilités. Ainsi, pour ranger 3 personnes sur 3 chaises, le deuxième choix offre toujours 2 possibilités, même si ces possibilités dépendent du premier choix : le produit $3 \cdot 2 \cdot 1$ est licite.

Exemple 1.2.3 (Nombre d'applications). *Soient E et F finis avec $|E| = n$, $|F| = m$. Alors le nombre d'applications de E dans F vaut m^n.*

Solution. Écrivons $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Se donner f revient à choisir $f(x_1)$, puis $f(x_2)$, …, puis $f(x_n)$: n choix successifs indépendants, chacun parmi m possibilités. D'où m^n.

Exemple 1.2.4 (Un compte à double découpage). *Combien y a-t-il de nombres de 4 chiffres (sans zéro initial) dont le produit des chiffres est pair ?*

Solution. Le total de nombres à 4 chiffres est $9 \cdot 10^3 = 9000$. Le produit des chiffres est impair si et seulement si les quatre chiffres sont impairs ; il y a $5^4 = 625$ tels nombres (le premier chiffre impair est automatiquement non nul). Par le principe additif appliqué au découpage « produit pair » ⊔ « produit impair », la réponse est $9000 - 625 = 8375$.

À retenir (Le passage au complémentaire)

Lorsqu'une condition contient « au moins un », « il existe », « pas tous », comptez plutôt le complémentaire. La négation de « au moins un est pair » est « tous sont impairs », condition qui se traite par le principe multiplicatif.

1.3 Permutations, arrangements, combinaisons

Définition 1.3.1 (Factorielle)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, avec $0! = 1$.

Théorème 1.3.2 (Nombre de permutations)

Le nombre de façons d'ordonner n objets distincts (c'est-à-dire le nombre de bijections de $[\![1, n]\!]$ sur lui-même) vaut $n!$.

Démonstration. Construisons l'ordre de gauche à droite : n choix pour la première place, $n-1$ pour la deuxième (un objet est déjà utilisé), …, 1 pour la dernière. Le principe multiplicatif donne $n(n-1)\cdots 1 = n!$. ■

Proposition 1.3.3 (Arrangements)

Un k-arrangement de n objets est une suite ordonnée de k objets distincts choisis parmi n. Leur nombre est

$$A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Démonstration. On choisit successivement le premier objet (n possibilités), le deuxième parmi les $n-1$ restants, …, le k-ième parmi les $n-k+1$ restants. Le nombre de possibilités à chaque étape ne dépend pas des choix précédents ; le principe multiplicatif donne $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, et l'on multiplie et divise par $(n-k)!$. Pour $k = n$, on retrouve le théorème 1.3.2. ■

Proposition 1.3.4 (Combinaisons)

Une k-combinaison de n objets est une partie à k éléments d'un ensemble à n éléments. Leur nombre est le coefficient binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad 0 \le k \le n,$$

et $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$.

Démonstration de la formule. Comptons de deux façons les k-arrangements. D'une part il y en a A_n^k. D'autre part, un k-arrangement s'obtient en choisissant d'abord son support (une k-combinaison : $\binom{n}{k}$ choix), puis en ordonnant ce support ($k!$ choix). Donc $A_n^k = \binom{n}{k} k!$, d'où la formule. ■

Méthode 1.3.5 — Le réflexe fondamental

L'ordre compte-t-il ? Cette unique question tranche entre A_n^k et $\binom{n}{k}$. Si vous hésitez, comptez à la main le cas $n = 3$, $k = 2$: il y a 6 arrangements $(12,21,13,31,23,32)$ et 3 combinaisons ($\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$).

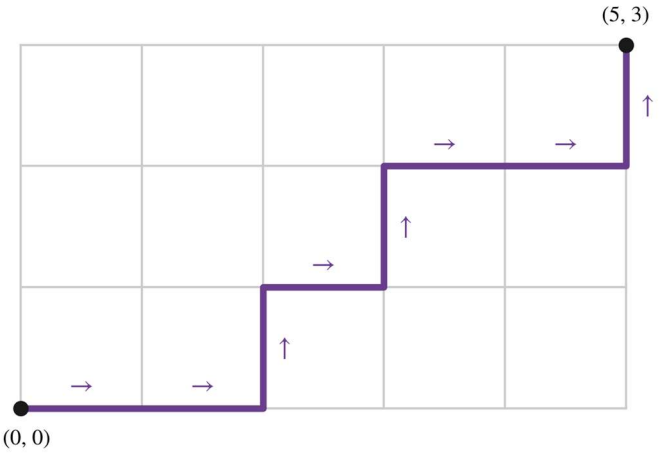
Exemple 1.3.6 (Comité avec contrainte). *Une classe compte 12 filles et 10 garçons. Combien de délégations de 5 élèves comportant au moins 2 filles et au moins 1 garçon peut-on former ?*

Solution. Découpons selon le nombre f de filles : $f \in \{2,3,4\}$ (car $f \le 4$ pour garantir un garçon). La réponse est

$$\begin{aligned}\binom{12}{2}\binom{10}{3} + \binom{12}{3}\binom{10}{2} + \binom{12}{4}\binom{10}{1} &= 66 \cdot 120 + 220 \cdot 45 + 495 \cdot 10 \\ &= 7920 + 9900 + 4950 = 22\,770.\end{aligned}$$

Exemple 1.3.7 (Chemins dans une grille). *Combien existe-t-il de chemins de $(0,0)$ à (m,n) dans le réseau $\mathbb{Z}^2$, en ne faisant que des pas → (droite) et ↑ (haut) ?*

Solution. Un tel chemin comporte exactement m pas → et n pas ↑, et il est entièrement déterminé par la donnée du mot correspondant. Le chemin est donc caractérisé par le choix des positions des m pas → parmi les $m+n$ pas : il y en a $\binom{m+n}{m}$.



Un chemin de (0, 0) à (5, 3) codé par le mot →→↑→↑→→↑ : il suffit de choisir les positions des 3 pas ↑ parmi les 8 pas, soit C(8, 3) = 56 chemins.

Remarque.
Ce dernier exemple est à retenir : il fournira au chapitre 3 un modèle géométrique pour une foule d'identités.

1.4 Permutations avec répétitions ; coefficients multinomiaux

Théorème 1.4.1 (Anagrammes et coefficients multinomiaux)

Soit un mot formé de n lettres, dont n_1 exemplaires d'une première lettre, n_2 d'une deuxième, …, n_r d'une r-ième, avec $n_1 + \cdots + n_r = n$. Le nombre d'anagrammes distinctes vaut

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}.$$

Démonstration. Rendons d'abord toutes les lettres distinctes en les indiçant : il y a $n!$ mots. Chaque anagramme réelle est obtenue exactement $n_1!\, n_2! \cdots n_r!$ fois, une fois pour chaque manière de permuter les indices à l'intérieur de chaque groupe de lettres identiques. On divise donc $n!$ par ce nombre.

Autre démonstration : on choisit les n_1 positions de la première lettre ($\binom{n}{n_1}$ façons), puis les n_2 positions de la deuxième parmi les $n - n_1$ restantes, etc. ; le produit se télescope en $\frac{n!}{n_1! \cdots n_r!}$. ∎

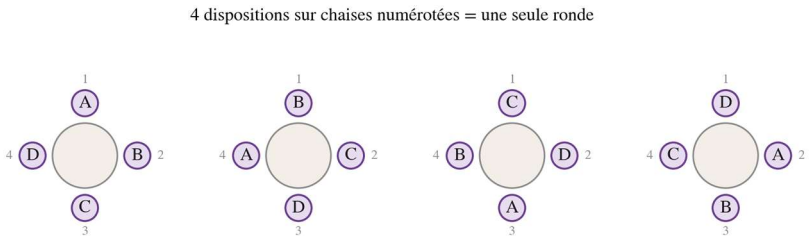
À retenir (Compter puis diviser par la symétrie)

Lorsque les objets à compter sont les classes d'équivalence d'un ensemble X sous une relation, et que toutes les classes ont la même taille d, alors le nombre de classes vaut $|X|/d$. C'est le

principe du berger : pour compter les moutons, comptez les pattes et divisez par quatre. Attention : la règle tombe en défaut si les classes n'ont pas toutes la même taille ; il faut alors le lemme de Burnside, hors de ce cours, ou un découpage préalable.

Exemple 1.4.2 (Rondes). *De combien de façons peut-on asseoir n personnes autour d'une table ronde, deux dispositions étant identifiées si l'une se déduit de l'autre par rotation ?*

Solution. L'ensemble X des dispositions sur n chaises numérotées a $n!$ éléments, et le groupe des n rotations agit en formant des classes de taille exactement n (aucune rotation non triviale ne fixe une disposition puisque les personnes sont distinctes). La réponse est $n!/n = (n-1)!$.



Rondes pour n = 4 : les 4 rotations d'une disposition sont identifiées ; les 4! = 24 dispositions sur chaises numérotées se regroupent en 3! = 6 rondes.

1.5 Combinaisons avec répétition : étoiles et barres

Théorème 1.5.1 (Étoiles et barres)

Le nombre de solutions en entiers positifs ou nuls de l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ vaut

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}.$$

Démonstration. À une solution $(x_1, \ldots, x_k)$, associons le mot formé de n étoiles et $k-1$ barres :

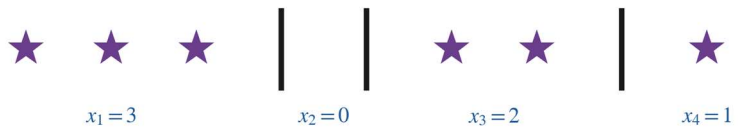
$$\underbrace{\star \cdots \star}_{x_1} \,|\, \underbrace{\star \cdots \star}_{x_2} \,|\, \cdots \,|\, \underbrace{\star \cdots \star}_{x_k}.$$

C'est une bijection entre l'ensemble des solutions et l'ensemble des mots à $n+k-1$ symboles dont $k-1$ barres ; ce dernier a $\binom{n+k-1}{k-1}$ éléments. ∎

Corollaire 1.5.2 (Solutions strictement positives)

Le nombre de solutions en entiers strictement positifs de $x_1 + \cdots + x_k = n$ vaut $\binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration. Posons $y_i = x_i - 1 \geq 0$; alors $y_1 + \cdots + y_k = n - k$, d'où $\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ solutions. ∎



Étoiles et barres : la solution (3, 0, 2, 1) de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ correspond au mot ★★★||★★|★ formé de 6 étoiles et 3 barres ; une case vide entre deux barres code un x_i nul.

À retenir (Changement de variable affine)

Toute contrainte du type $x_i \geq a_i$ se ramène au cas ≥ 0 par $y_i = x_i - a_i$. Les contraintes de type majoration $x_i \leq b_i$, en revanche, ne se ramènent pas ainsi : elles relèvent de l'inclusion–exclusion (chapitre 4).

Exemple 1.5.3 (Avec majorations). *Combien de solutions entières ≥ 0 possède $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ avec $x_1 \leq 6$?*

Solution. Sans contrainte : $\binom{17}{2} = 136$. Les solutions violant la contrainte vérifient $x_1 \geq 7$; en posant $x_1' = x_1 - 7 \geq 0$, on obtient $x_1' + x_2 + x_3 = 8$, soit $\binom{10}{2} = 45$ solutions. Réponse : $136 - 45 = 91$.

1.6 Récapitulatif

On tire k objets parmi n ; le tableau donne le nombre de résultats possibles.

	avec ordre	sans ordre
sans répétition	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
avec répétition	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Méthode 1.6.1 — Comment ne jamais se tromper de case

Posez-vous les deux questions dans cet ordre : (1) deux tirages qui diffèrent seulement par l'ordre sont-ils comptés une ou deux fois ? (2) peut-on tirer deux fois le même objet ? Puis vérifiez votre formule sur un micro-cas ($n = 3$, $k = 2$) que vous énumérez à la main. Ce contrôle coûte trente secondes et sauve des points.

1.7 Exercices

Exercice 1.1 ★. Combien de mots de 5 lettres (suites de 5 lettres de l'alphabet latin à 26 lettres, ayant un sens ou non) commencent et finissent par une consonne ? On compte 6 voyelles.

Exercice 1.2 ★. Combien de diagonales possède un polygone convexe à n côtés ?

Exercice 1.3 ★★. Combien y a-t-il de parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant aucune paire d'entiers consécutifs ?

Exercice 1.4 ★★. De combien de façons peut-on distribuer 20 bonbons identiques à 4 enfants de sorte que chacun reçoive au moins 2 bonbons et qu'Ali (l'un des quatre) en reçoive au plus 8 ?

Exercice 1.5 ★★. On choisit k entiers $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$ deux à deux non consécutifs (c'est-à-dire $a_{i+1} \geq a_i + 2$). Montrer que le nombre de tels choix est $\binom{n-k+1}{k}$.

Exercice 1.6 ★★. Combien de nombres entre 1 et 10^6 ont la somme de leurs chiffres égale à 9 ?

Exercice 1.7 ★★★. Sur un cercle on place n points. On trace toutes les cordes les joignant et on suppose qu'aucun point intérieur au disque n'appartient à trois cordes. Combien y a-t-il de points d'intersection à l'intérieur du disque ? En combien de régions le disque est-il découpé ?

Exercice 1.8 ★★★. Soit $n \geq 1$. Déterminer le nombre de suites $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1,2\}^n$ telles que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ soit pair.

Exercice 1.9 ★★★. Soient n et k des entiers naturels. Combien de fonctions strictement croissantes $f : [\![1, k]\!] \to [\![1, n]\!]$ vérifient $f(i) \geq 2i$ pour tout i ?

Exercice 1.10 ★★★★. Soit $n \geq 2$. Déterminer le nombre de permutations σ de $[\![1, n]\!]$ telles que $|\sigma(i) - i| \leq 1$ pour tout i.

1.8 Corrigés

Solution de l'exercice 1.1. Il y a 20 consonnes. Première et dernière lettre : 20 choix chacune ; les trois lettres du milieu : 26 choix chacune. Total : $20^2 \cdot 26^3 = 400 \cdot 17\,576 = 7\,030\,400$.

Solution de l'exercice 1.2. Un segment joignant deux sommets est soit un côté, soit une diagonale. Il y a $\binom{n}{2}$ segments et n côtés, donc $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

Solution de l'exercice 1.3. Comptons celles à k éléments. Si $a_1 < \cdots < a_k$ sont ces éléments, posons $b_i = a_i - (i-1)$. La condition $a_{i+1} \geq a_i + 2$ équivaut à $b_{i+1} > b_i$, et $1 \leq b_1 < \cdots < b_k \leq n - k + 1$. C'est une bijection avec les k-parties de $[\![1, n-k+1]\!]$, d'où $\binom{n-k+1}{k}$ parties. Au total

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2},$$

le $(n+2)$-ième nombre de Fibonacci (avec $F_1 = F_2 = 1$). On peut aussi le voir directement : si u_n est le nombre cherché, on distingue selon que n appartient ou non à la partie, ce qui donne $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, avec $u_1 = 2$, $u_2 = 3$.

Solution de l'exercice 1.4. Posons $y_i = x_i - 2 \geq 0$; alors $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 12$, soit $\binom{15}{3} = 455$ solutions. Retranchons celles où Ali reçoit au moins 9 bonbons, c'est-à-dire $y_1 \geq 7$: en posant $z = y_1 - 7$, on a $z + y_2 + y_3 + y_4 = 5$, soit $\binom{8}{3} = 56$ solutions. Réponse : $455 - 56 = 399$.

Solution de l'exercice 1.5. C'est la bijection déjà utilisée dans la solution de l'exercice 1.3 : $b_i = a_i - (i-1)$ envoie bijectivement les k-uplets non consécutifs de $[\![1, n]\!]$ sur les k-parties quelconques de $[\![1, n-k+1]\!]$. D'où $\binom{n-k+1}{k}$.

Solution de l'exercice 1.6. Écrivons chaque entier de 1 à $10^6 - 1$ avec exactement 6 chiffres, quitte à compléter par des zéros à gauche ; l'entier 10^6 a pour somme de chiffres 1, il ne compte pas. On cherche donc le nombre de solutions de $c_1 + \cdots + c_6 = 9$ avec $0 \leq c_i \leq 9$. La contrainte $c_i \leq 9$ est automatique puisque la somme vaut 9. Réponse : $\binom{9+5}{5} = \binom{14}{5} = 2002$.

Solution de l'exercice 1.7. *Points d'intersection.* Deux cordes $[AB]$ et $[CD]$ se coupent à l'intérieur si et seulement si les quatre points A, B, C, D sont distincts et « entrelacés » sur le cercle. Réciproquement, tout choix de 4 points parmi les n détermine exactement un point d'intersection intérieur (celui des deux diagonales du quadrilatère convexe formé). D'où $\binom{n}{4}$ points.

Régions. Utilisons la formule d'Euler $S - A + F = 2$ pour le graphe planaire dessiné. Les sommets sont les n points du cercle et les $\binom{n}{4}$ intersections : $S = n + \binom{n}{4}$. Chaque intersection intérieure est de degré 4 et transforme deux cordes en quatre morceaux, donc ajoute 2 arêtes ; les $\binom{n}{2}$ cordes et les n arcs de cercle donnent $A = n + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4}$. Ainsi

$$F = 2 - S + A = 2 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4},$$

et en retirant la face extérieure, le disque est découpé en $\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$ régions.

Solution de l'exercice 1.8. Soit p_n (resp. i_n) le nombre de suites de somme paire (resp. impaire) ; $p_n + i_n = 3^n$. En ajoutant un terme $x_{n+1} \in \{0,1,2\}$: la parité est conservée si $x_{n+1} \in \{0,2\}$ et changée si $x_{n+1} = 1$. Donc $p_{n+1} = 2p_n + i_n$ et $i_{n+1} = p_n + 2i_n$, d'où $p_{n+1} - i_{n+1} = p_n - i_n$. Comme $p_1 - i_1 = 2 - 1 = 1$, on a $p_n - i_n = 1$ pour tout n, et

$$p_n = \frac{3^n + 1}{2}.$$

Solution de l'exercice 1.9. Réponse : $\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}$ si $2k \leq n$, et 0 si $2k > n$.

Si $2k > n$, aucune fonction ne convient, puisqu'il faudrait $f(k) \geq 2k > n$. Supposons désormais $2k \leq n$.

Représentons chaque fonction admissible par un chemin de $(0,0)$ à $(n-k, k)$ formé de n pas unitaires, droite (R) ou haut (U) : le pas numéro j est U si j est une valeur atteinte par f (c'est-à-dire $j \in \{f(1), \ldots, f(k)\}$), et R sinon. Comme f est strictement croissante, ses k valeurs sont exactement les positions des pas U, lues dans l'ordre : le pas U numéro i (correspondant à $f(i)$) est précédé d'exactement $f(i) - i$ pas R.

La condition $f(i) \geq 2i$ équivaut donc à : juste avant le i-ième pas U, le chemin a fait au moins i pas R, c'est-à-dire que son abscisse est au moins égale à l'ordonnée i atteinte après ce pas ; en d'autres termes, le chemin reste toujours à une abscisse supérieure ou égale à son ordonnée (il ne passe jamais strictement au-dessus de la diagonale $y = x$).

Le nombre total de chemins de $(0,0)$ à $(n-k, k)$, sans contrainte, est $\binom{n}{k}$ (choisir les positions des k pas U parmi les n pas). Parmi eux, un chemin est *mauvais* s'il touche la droite $y = x + 1$ à un moment donné. Par le principe de réflexion : réfléchissons la portion du chemin allant de $(0,0)$ jusqu'au premier contact avec $y = x + 1$, par rapport à cette droite. Le point de départ $(0,0)$ a pour symétrique $(-1,1)$ par rapport à $y = x + 1$ (la symétrie envoie (a, b) sur $(b - 1, a + 1)$). Comme le point d'arrivée $(n-k, k)$ est situé sous la droite $y = x + 1$ (car $k \leq n - k$), tout chemin de $(-1,1)$ à $(n-k, k)$ coupe cette droite, et cette réflexion établit une bijection entre les chemins mauvais de $(0,0)$ à $(n-k, k)$ et *tous* les chemins de $(-1,1)$ à $(n-k, k)$.

Un chemin de $(-1,1)$ à $(n-k, k)$ comporte $(n-k) - (-1) = n - k + 1$ pas R et $k - 1$ pas U, soit n pas au total ; il y en a $\binom{n}{k-1}$.

Donc le nombre de chemins admissibles (bons) est

$$\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}.$$

Remarque.

Ce type d'argument — coder un problème de sous-ensembles ordonnés comme un chemin, puis réfléchir la partie fautive — est le *principe de réflexion*, développé systématiquement au chapitre 3 à propos des nombres de Catalan.

Solution de l'exercice 1.10. Une telle permutation est un produit de transpositions disjointes d'éléments voisins. Soit a_n leur nombre. Si $\sigma(n) = n$, il reste une permutation du même type sur $[\![1, n-1]\!]$: a_{n-1} possibilités. Sinon $\sigma(n) = n-1$, ce qui force $\sigma(n-1) = n$, et il reste a_{n-2} possibilités. Donc $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ avec $a_1 = 1$, $a_2 = 2$: c'est la suite de Fibonacci, $a_n = F_{n+1}$.

CHAPITRE 2

2 Coefficients binomiaux

Objectifs du chapitre. Connaître les identités binomiales fondamentales et surtout savoir les démontrer combinatoirement ; manier le triangle de Pascal ; disposer d'encadrements utilisables de $\binom{n}{k}$; connaître les propriétés arithmétiques élémentaires (divisibilité, théorème de Lucas).

2.1 Définition et symétries

Rappelons que $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments, et vaut $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Proposition 2.1.1 (Symétrie)

Pour $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Démonstration. L'application $A \mapsto E \backslash A$ est une bijection entre les k-parties et les $(n-k)$-parties de E. ■

Proposition 2.1.2 (Formule du pion)

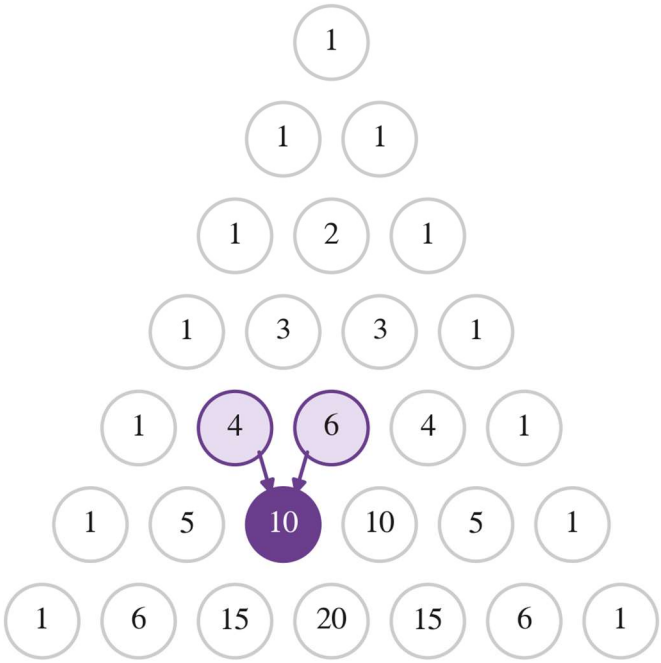
Pour $1 \leq k \leq n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration. Comptons de deux façons les couples (A, x) où A est une k-partie de E et $x \in A$ (« un comité de k personnes muni d'un président »). En choisissant d'abord A puis x : $\binom{n}{k} \cdot k$. En choisissant d'abord le président x parmi n, puis les $k-1$ autres membres parmi les $n-1$ restants : $n\binom{n-1}{k-1}$. ■

Théorème 2.1.3 (Formule de Pascal)

Pour $1 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Démonstration. Fixons $x_0 \in E$. Les k-parties de E se répartissent en deux catégories disjointes : celles qui contiennent x_0 (il faut alors choisir $k-1$ éléments parmi les $n-1$ autres : $\binom{n-1}{k-1}$) et celles qui ne le contiennent pas ($\binom{n-1}{k}$). ■



Le triangle de Pascal : chaque coefficient est la somme des deux coefficients situés au-dessus de lui ; en couleur, 10 = 4 + 6, c'est-à-dire C(5, 2) = C(4, 1) + C(4, 2).

Méthode 2.1.4 — La méthode de l'élément distingué

Beaucoup d'identités binomiales se démontrent en isolant un élément (ou une position, ou une couleur) et en découpant le comptage selon son statut. C'est le procédé le plus rentable du chapitre : essayez-le systématiquement avant tout calcul algébrique.

Le triangle de Pascal : valeurs de $\binom{n}{k}$ pour $0 \le k \le n \le 6$.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

2.2 La formule du binôme et ses conséquences

Théorème 2.2.1 (Formule du binôme de Newton)

Pour tous a, b dans un anneau commutatif et $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. Développons le produit $(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ (n facteurs) sans réordonner : on obtient la somme de tous les mots de longueur n sur l'alphabet $\{a,b\}$. Un mot contenant k fois la lettre a vaut $a^k b^{n-k}$, et il y a $\binom{n}{k}$ tels mots. ∎

Corollaire 2.2.2 (Somme et somme alternée)

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0 \ \text{ pour } n\geq 1.$$

Démonstration. On applique la formule du binôme avec $a=b=1$, puis avec $a=-1$, $b=1$: $(1+1)^n=2^n$ et $(-1+1)^n=0$ pour $n\geq 1$.

Preuve bijective de la seconde identité. Fixons $x_0\in E$ et posons $\sigma(A)=A\,\triangle\,\{x_0\}$ (on ajoute x_0 s'il est absent, on le retire s'il est présent). On a $\sigma\circ\sigma=\mathrm{id}$, donc σ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur lui-même, et $|\sigma(A)|=|A|\pm 1$ change de parité. Elle échange donc les parties de cardinal pair et celles de cardinal impair, qui sont ainsi en nombre égal : $\sum_{k\text{ pair}}\binom{n}{k}=\sum_{k\text{ impair}}\binom{n}{k}$. ∎

La première identité redit qu'un ensemble à n éléments a 2^n parties. La seconde dit qu'un ensemble non vide possède autant de parties de cardinal pair que de cardinal impair ; la bijection explicite est $A\mapsto A\,\triangle\,\{x_0\}$ pour x_0 fixé.

Exemple 2.2.3 (Sommes pondérées). *Calculer $S=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$ puis $T=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$.*

Par la formule du pion, $S=\sum_{k\geq 1}n\binom{n-1}{k-1}=n2^{n-1}$. Interprétation : S compte les couples (comité, président) ; on peut aussi choisir d'abord le président (n façons) puis une partie quelconque des $n-1$ autres (2^{n-1}).

Pour T, comptons les triplets (A,x,y) avec $x,y\in A$. Si $x=y$: $n2^{n-1}$ comme ci-dessus. Si $x\neq y$: on choisit le couple ordonné (x,y) ($n(n-1)$ façons) puis une partie quelconque des $n-2$ éléments restants. Donc, pour $n\geq 2$,

$$T=n2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}=n(n+1)2^{n-2}.$$

Théorème 2.2.4 (Identité de Vandermonde)

Pour $m,n,r\in\mathbb{N}$, $\binom{m+n}{r}=\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$.

Démonstration. On dispose de m garçons et n filles et l'on forme un comité de r personnes ; on découpe selon le nombre k de garçons choisis. ∎

Corollaire 2.2.5 (Somme des carrés)

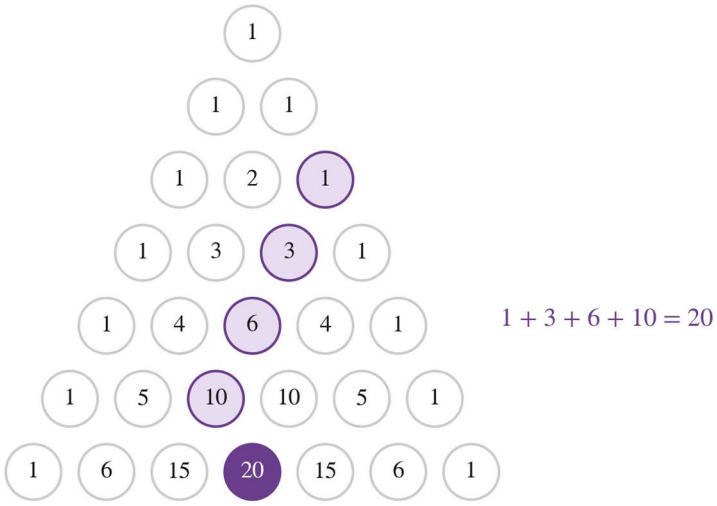
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$$

Démonstration. Vandermonde avec $m=n=r$ donne $\binom{2n}{n}=\sum_k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$, et $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ par symétrie. ∎

Proposition 2.2.6 (Formule de la crosse de hockey)

Pour $0\leq r\leq n$, $\sum_{i=r}^{n}\binom{i}{r}=\binom{n+1}{r+1}$.

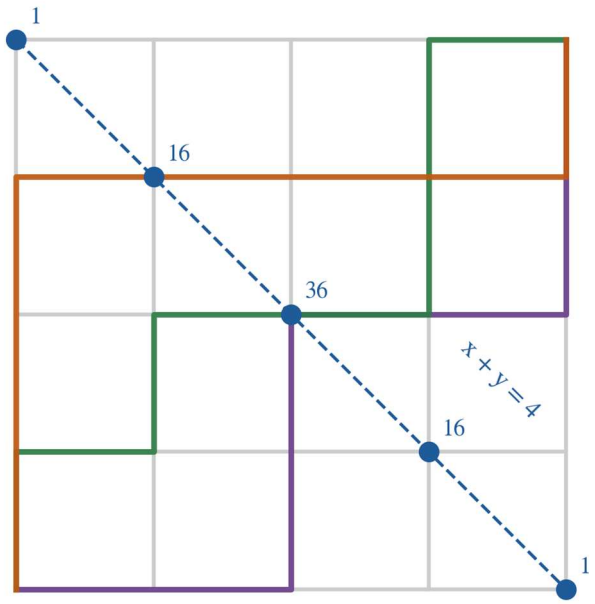
Démonstration. Comptons les $(r+1)$-parties de $[\![1, n+1]\!]$ selon leur plus grand élément. Si celui-ci vaut $i+1$, les r autres éléments sont dans $[\![1, i]\!]$: $\binom{i}{r}$ possibilités. ■



La crosse de hockey : C(2, 2) + C(3, 2) + C(4, 2) + C(5, 2) = 1 + 3 + 6 + 10 = 20 = C(6, 3). Les coefficients sommés forment le manche, le résultat forme la lame.

Exemple 2.2.7 (Vandermonde vu comme un problème de chemins). *Redémontrer* $\sum_k \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ *à l'aide des chemins de la grille.*

$\binom{2n}{n}$ compte les chemins de $(0,0)$ à (n,n) à pas → et ↑. Tout tel chemin rencontre la droite $x+y=n$ en exactement un point, de coordonnées $(k, n-k)$. Le nombre de chemins de $(0,0)$ à $(k,n-k)$ vaut $\binom{n}{k}$, et celui des chemins de $(k,n-k)$ à (n,n) vaut $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$. On somme sur k.



Chemins de (0, 0) à (4, 4) : chacun traverse la diagonale x + y = 4 en un unique point (k, 4 − k). Il y a C(4, k)² chemins passant par ce point, d'où Σ C(4, k)² = C(8, 4) = 70.

2.3 Estimations utiles

En compétition, on a rarement besoin de la valeur exacte de $\binom{n}{k}$, mais très souvent d'un encadrement.

Théorème 2.3.1 (Encadrements des coefficients binomiaux)

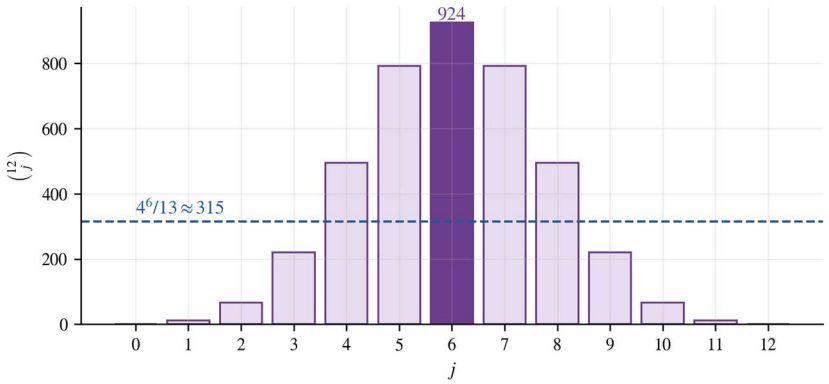
Pour $1 \le k \le n$,

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le \frac{n^k}{k!} \le \left(\frac{en}{k}\right)^k \qquad \text{et} \qquad \frac{4^n}{2n+1} \le \binom{2n}{n} \le 4^n.$$

Démonstration. On a $\binom{n}{k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i}$, et chaque facteur est $\ge n/k$ car

$$\frac{n-i}{k-i} \ge \frac{n}{k} \Leftrightarrow k(n-i) \ge n(k-i) \Leftrightarrow i(n-k) \ge 0;$$

d'où la minoration. La majoration $\binom{n}{k} \le n^k/k!$ est immédiate, et $k! \ge (k/e)^k$ découle de $e^k = \sum_{j\ge 0} k^j/j! \ge k^k/k!$. Enfin $\binom{2n}{n} \le \sum_j \binom{2n}{j} = 4^n$. De plus $\binom{2n}{j} / \binom{2n}{j-1} = \frac{2n-j+1}{j} \ge 1$ si, et seulement si, $j \le n$: les coefficients croissent jusqu'à $j = n$ puis décroissent. Ainsi $\binom{2n}{n}$ est le plus grand des $2n+1$ termes de cette somme, et il en vaut au moins la moyenne $4^n/(2n+1)$. ■



Les coefficients C(12, j), 0 ≤ j ≤ 12 : ils croissent puis décroissent, le maximum C(12, 6) = 924 étant atteint au centre ; la moyenne $4^6/13 \approx 315$ (en pointillés) est un minorant du maximum.

2.4 Propriétés arithmétiques

Proposition 2.4.1 (Coefficients binomiaux d'indice premier)

Si p est premier et $1 \le k \le p-1$, alors $p \mid \binom{p}{k}$.

Démonstration. De $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$ on tire $p \mid k\binom{p}{k}$; comme $\gcd(p,k) = 1$, le lemme de Gauss donne $p \mid \binom{p}{k}$. ■

Corollaire 2.4.2 (Morphisme de Frobenius)

Dans $\mathbb{F}_p$, $(a+b)^p = a^p + b^p$; en particulier $a^p \equiv a \pmod p$ (petit théorème de Fermat, par récurrence sur a).

Démonstration. Par la formule du binôme, $(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k} a^k b^{p-k}$, et chaque terme de la somme est nul dans $\mathbb{F}_p$ par la proposition 2.4.1. Pour Fermat : $0^p = 0$ et, si $a^p \equiv a$, alors $(a+1)^p \equiv a^p + 1 \equiv a + 1 \pmod p$; on conclut par récurrence pour $a \geq 0$, et pour $a < 0$ en remplaçant a par un représentant positif de sa classe. ■

Théorème 2.4.3 (Théorème de Lucas)

Soit p premier. Écrivons $n = \sum_i n_i\, p^i$ et $k = \sum_i k_i\, p^i$ en base p. Alors

$$\binom{n}{k} \equiv \prod_i \binom{n_i}{k_i} \pmod p.$$

Démonstration. Dans $\mathbb{F}_p[X]$, l'identité de Frobenius (corollaire 2.4.2, dont la preuve vaut pour des polynômes) donne $(1+X)^p = 1 + X^p$, puis par récurrence sur i, $(1+X)^{p^i} = \left(1 + X^{p^{i-1}}\right)^p = 1 + X^{p^i}$. Donc

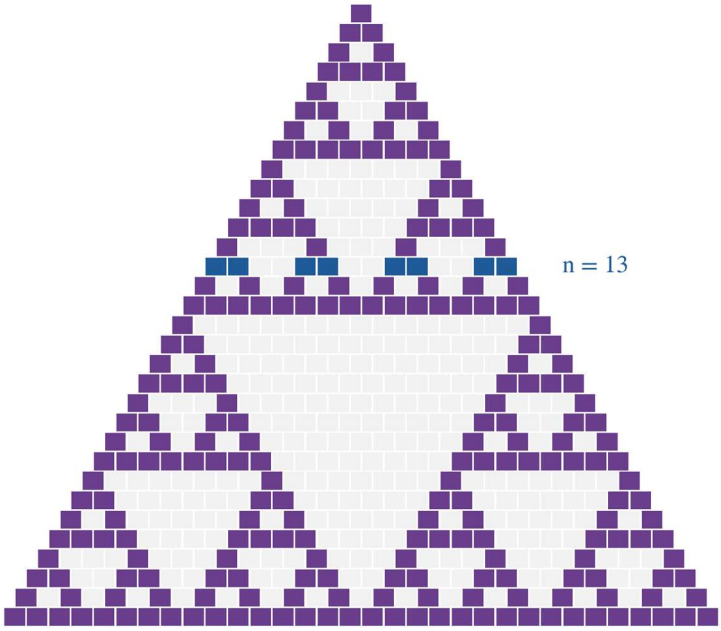
$$(1+X)^n = \prod_i \left((1+X)^{p^i}\right)^{n_i} = \prod_i \left(1 + X^{p^i}\right)^{n_i}.$$

En développant, on obtient la somme des termes $\prod_i \binom{n_i}{j_i} X^{\sum_i j_i p^i}$ avec $0 \leq j_i \leq n_i \leq p-1$. Par unicité de l'écriture en base p, l'exposant vaut k si, et seulement si, $j_i = k_i$ pour tout i ; ce choix n'existe que si $k_i \leq n_i$ pour tout i. Le coefficient de X^k vaut donc $\prod_i \binom{n_i}{k_i}$ (avec la convention $\binom{a}{b} = 0$ si $b > a$), et il est égal, modulo p, au coefficient $\binom{n}{k}$ de X^k dans $(1+X)^n$. ■

Corollaire 2.4.4 (Parité des coefficients binomiaux)

$\binom{n}{k}$ est impair si et seulement si l'écriture binaire de k est « incluse » dans celle de n. Le nombre de $k \in [\![0, n]\!]$ tels que $\binom{n}{k}$ soit impair vaut donc $2^{s(n)}$, où $s(n)$ est le nombre de chiffres 1 de n en base 2.

Démonstration. Avec $p = 2$, chaque facteur $\binom{n_i}{k_i}$ avec $n_i, k_i \in \{0,1\}$ vaut 0 exactement quand $(n_i, k_i) = (0,1)$, et 1 sinon. Donc $\binom{n}{k}$ est impair si, et seulement si, $k_i \leq n_i$ pour tout i, c'est-à-dire si les chiffres 1 de k sont à des positions où n a un 1. Pour construire un tel k, on choisit librement $k_i \in \{0,1\}$ aux $s(n)$ positions où $n_i = 1$, et $k_i = 0$ ailleurs : il y a $2^{s(n)}$ choix, tous dans $[\![0, n]\!]$. ■



Le triangle de Pascal modulo 2 sur 32 lignes : les coefficients impairs (en couleur) dessinent le triangle de Sierpiński. La ligne n = 13 = $(1101)_2$ contient $2^3 = 8$ coefficients impairs.

Exemple 2.4.5 (Les nombres de Catalan sont entiers). *Montrer que $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ est un entier.*

Puisque $\binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!} = \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}$, on obtient

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Différence de deux entiers, C_n est entier. Nous en donnerons une interprétation combinatoire au chapitre 3.

2.5 Exercices

Exercice 2.1 ★. Démontrer combinatoirement que $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$ pour $0 \leq j \leq k \leq n$.

Exercice 2.2 ★★. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 2.3 ★★. Montrer que $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} k^m = 0$ pour tout $0 \leq m < n$, et que cette somme vaut $(-1)^n n!$ pour $m = n$.

Exercice 2.4 ★★. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1} = \binom{2n}{n-1}$.

Exercice 2.5 ★★★. Soit p un nombre premier. Montrer que $\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^2}$.

Exercice 2.6 ★★★. Soit $n \geq 1$. Montrer que $\operatorname{ppcm}\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}\right) = \frac{\operatorname{ppcm}(1,2,\ldots,n+1)}{n+1}$.

Exercice 2.7 ★★★. En déduire que $\operatorname{ppcm}(1,2,\ldots,2n+1) \geq 4^n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2.8 ★★★★ (OIM 1974, problème 3). Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, le nombre $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$ n'est pas divisible par 5.

2.6 Corrigés

Solution de l'exercice 2.1. Comptons les couples (B, C) avec $C \subseteq B \subseteq E$, $|B| = k$, $|C| = j$. En choisissant B puis C : $\binom{n}{k}\binom{k}{j}$. En choisissant C d'abord, puis les $k-j$ éléments de $B \backslash C$ parmi les $n-j$ éléments de $E \backslash C$: $\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$.

Solution de l'exercice 2.2. Comme $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$, la somme vaut

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

On peut aussi intégrer $(1+x)^n$ entre 0 et 1.

Solution de l'exercice 2.3. Notons Δ l'opérateur de différence finie, $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x)$. Une récurrence immédiate donne $(\Delta^n f)(0) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k} f(k)$, c'est-à-dire

$$\sum_{k}(-1)^k\binom{n}{k} f(k) = (-1)^n(\Delta^n f)(0).$$

Or Δ abaisse strictement le degré d'un polynôme non constant et annule les constantes, donc Δ^n annule tout polynôme de degré $< n$: la somme est nulle pour $m < n$. Pour $m = n$, Δ multiplie le coefficient dominant par le degré (qui diminue de 1), donc $\Delta^n(x^n)$ est la constante $n!$, d'où la valeur $(-1)^n n!$.

> **Remarque.**
> La somme $\sum_k (-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m$, qui est celle de l'exercice multipliée par $(-1)^n$, compte, par inclusion–exclusion, les surjections de $[\![1, m]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$ (chapitre 4) : ce nombre est nul si $m < n$ et égal à $n!$ si $m = n$.

Solution de l'exercice 2.4. Par symétrie, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, donc la somme s'écrit $\sum_k \binom{n}{n-k}\binom{n}{k+1}$. Les deux indices du bas ont pour somme $n+1$: c'est exactement le développement de Vandermonde de $\binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n-1}$.

Solution de l'exercice 2.5. Vandermonde avec $m = n = p$, $r = p$ donne

$$\binom{2p}{p} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}^2 = 2 + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}^2.$$

Or, pour $1 \le k \le p-1$, on a $p \mid \binom{p}{k}$, donc $p^2 \mid \binom{p}{k}^2$. La somme centrale est divisible par p^2, d'où $\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^2}$.

Solution de l'exercice 2.6. Posons $L = \operatorname{ppcm}(1, 2, \dots, n+1)$ et $M = \operatorname{ppcm}_{0 \le k \le n}\binom{n}{k}$.

(i) $(n+1)M \mid L$. L'intégrale d'Euler donne, pour $0 \le k \le n$,

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dx = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}.$$

En développant $(1-x)^{n-k}$ par la formule du binôme et en intégrant terme à terme,

$$\frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} = \sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j\binom{n-k}{j}\frac{1}{k+j+1},$$

combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de $\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{n+1}$. En multipliant par L, on obtient un entier, donc $(n+1)\binom{n}{k} \mid L$ pour tout k, puis $\operatorname{ppcm}_k\left((n+1)\binom{n}{k}\right) = (n+1)M \mid L$.

(ii) $L \mid (n+1)M$. Pour $1 \le m \le n+1$, la formule du pion donne $m\binom{n+1}{m} = (n+1)\binom{n}{m-1}$, donc $m \mid (n+1)\binom{n}{m-1}$, qui divise $(n+1)M$. Ainsi tout $m \le n+1$ divise $(n+1)M$, d'où $L \mid (n+1)M$.

Les deux divisibilités donnent $L = (n+1)M$, c'est-à-dire $M = L/(n+1)$.

Solution de l'exercice 2.7. Appliquons l'exercice précédent à $2n$: $\operatorname{ppcm}(1, \dots, 2n+1) = (2n+1)\operatorname{ppcm}_k\binom{2n}{k}$. Or $\operatorname{ppcm}_k\binom{2n}{k} \ge \binom{2n}{n} \ge \frac{4^n}{2n+1}$. Donc

$$\operatorname{ppcm}(1, \dots, 2n+1) \ge (2n+1) \cdot \frac{4^n}{2n+1} = 4^n.$$

Solution de l'exercice 2.8. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1} 8^k$. Travaillons dans $\mathbb{F}_{25} = \mathbb{F}_5[\theta]$ où $\theta^2 = 3$; c'est bien un corps car 3 n'est pas un carré modulo 5 (les carrés non nuls sont 1 et 4). Comme $8 \equiv 3 = \theta^2$, la formule du binôme donne dans $\mathbb{F}_{25}$

$$(1+\theta)^{2n+1} = A_n + \theta S_n, \qquad (1-\theta)^{2n+1} = A_n - \theta S_n,$$

où $A_n = \sum_k \binom{2n+1}{2k} 8^k$. Posons $\alpha = 1+\theta$ et $\beta = 1-\theta$.

Le morphisme de Frobenius $x \mapsto x^5$ de $\mathbb{F}_{25}$ vérifie $\theta^5 = (\theta^2)^2\theta = 9\theta = 4\theta = -\theta$, donc $\alpha^5 = 1 + \theta^5 = \beta$. Par ailleurs $\alpha\beta = 1 - \theta^2 = 1 - 3 = -2 = 3$, donc $\alpha^6 = \alpha \cdot \alpha^5 = \alpha\beta = 3$.

L'ordre de 3 dans $\mathbb{F}_5^\times$ est 4 (les puissances successives de 3 sont $3,4,2,1$), donc l'ordre d de α dans le groupe cyclique $\mathbb{F}_{25}^\times$ (d'ordre 24) vérifie $d/\operatorname{pgcd}(d, 6) = 4$: les seuls diviseurs de 24 compatibles avec cette contrainte sont $d = 8$ et $d = 24$. Or $\alpha^2 = (1+\theta)^2 = 1 + 2\theta + 3 = 4 + 2\theta$, donc $\alpha^8 = \alpha^6 \cdot \alpha^2 = 3(4+2\theta) = 12 + 6\theta = 2 + \theta \neq 1$: $d \neq 8$, donc $d = 24$.

Supposons maintenant $5 \mid S_n$. Alors $\alpha^{2n+1} = \beta^{2n+1}$ dans $\mathbb{F}_{25}$, et comme $\beta = \alpha^5$ est inversible, $\alpha^{-4(2n+1)} = (\alpha/\beta)^{2n+1} = 1$. L'ordre de α étant 24, il vient $24 \mid 4(2n+1)$, soit $6 \mid 2n+1$, ce qui est impossible pour un nombre impair. Donc $5 \nmid S_n$ pour tout $n \ge 0$.

CHAPITRE 3

3 Bijections, codages et nombres de Catalan

Objectifs du chapitre. Savoir remplacer un ensemble compliqué par un ensemble simple ; connaître les codages standards (mots binaires, chemins, compositions, arbres) ; maîtriser les nombres de Catalan et la méthode de réflexion ; savoir construire une involution pour démontrer une identité avec signes.

3.1 Pourquoi les bijections ?

Une formule de dénombrement obtenue par un calcul algébrique est vraie ; une formule obtenue par une bijection est comprise. En olympiade, la différence est décisive : la bijection se généralise, se modifie, s'adapte à la variante de l'énoncé, alors que le calcul ne survit pas au premier changement d'hypothèse.

Méthode 3.1.1 — Construire une bijection : la check-list

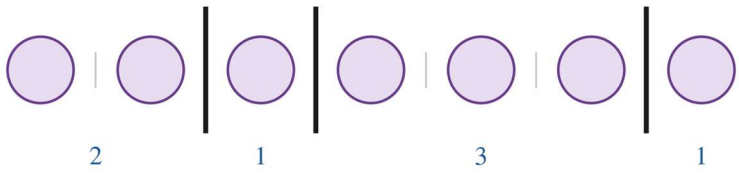
Pour prouver $|A| = |B|$:

1. définir explicitement $f : A \to B$ (donner la construction, pas seulement l'idée) ;
2. vérifier que $f(a)$ appartient bien à B (c'est l'étape que l'on oublie) ;
3. construire explicitement $g : B \to A$ et vérifier $g \circ f = \mathrm{id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Une bijection dont on ne sait pas décrire la réciproque est presque toujours fausse.

Exemple 3.1.2 (Compositions d'un entier). *Une composition de n est une écriture $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ avec $a_i \geq 1$, où l'ordre des termes compte. Montrer que n possède exactement 2^{n-1} compositions.*

Alignons n jetons. Il y a $n-1$ intervalles entre jetons consécutifs ; une composition correspond exactement au choix d'un sous-ensemble de ces intervalles où l'on « coupe » : à la composition $(a_1, \ldots, a_k)$ on associe l'ensemble des coupures $\{a_1,\ a_1 + a_2,\ \ldots,\ a_1 + \cdots + a_{k-1}\} \subseteq [\![1, n-1 rbracket$, et réciproquement un ensemble de coupures $c_1 < \cdots < c_{k-1}$ redonne $a_i = c_i - c_{i-1}$ (avec $c_0 = 0$, $c_k = n$). D'où 2^{n-1}.

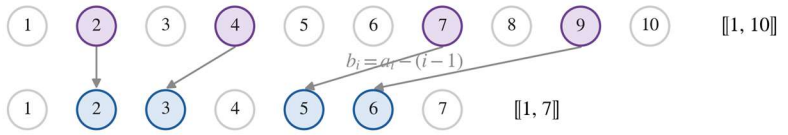


Compositions de n = 7 : on aligne 7 jetons et l'on choisit où couper parmi les 6 intervalles ; les coupures après le 2e, le 3e et le 6e jeton donnent 7 = 2 + 1 + 3 + 1.

Exemple 3.1.3 (Sous-ensembles sans deux éléments consécutifs). *Montrer que le nombre de k-parties de $[\![1, n]\!]$ sans deux entiers consécutifs vaut $\binom{n-k+1}{k}$.*

Si $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ est une telle partie, posons $b_i = a_i - (i-1)$. Alors $b_{i+1} - b_i = a_{i+1} - a_i - 1 \geq 1$, donc $b_1 < b_2 < \cdots < b_k$, avec $1 \leq b_1$ et $b_k \leq n - k + 1$. Réciproquement, à toute k-partie $\{b_1 <$

$\cdots < b_k\}$ de $[\![1, n-k+1]\!]$ on associe $a_i = b_i + (i-1)$, qui est sans deux entiers consécutifs. Les deux applications sont réciproques l'une de l'autre.



« Rapprocher » les éléments : la partie {2, 4, 7, 9} de ⟦1, 10⟧, sans éléments consécutifs, devient {2, 3, 5, 6} ⊂ ⟦1, 7⟧ en retirant i − 1 au i-ième élément ; l'opération inverse « écarte » les éléments.

À retenir (Un slogan)

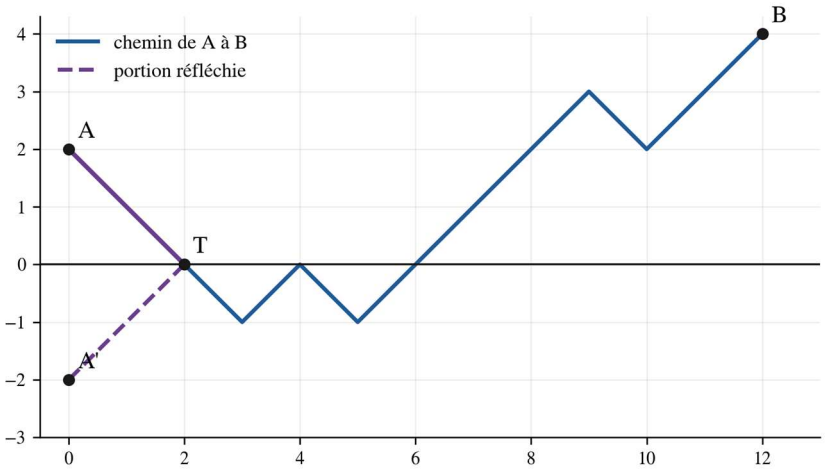
« Écarter les éléments » et « les rapprocher » sont deux bijections réciproques. Elles servent constamment : contraintes de type $a_{i+1} \geq a_i + d$, points d'un cercle non adjacents, jetons non voisins, etc.

3.2 Le lemme de réflexion

Théorème 3.2.1 (Lemme de réflexion)

Soient $A = (0, a)$ et $B = (n, b)$ deux points du plan avec $a, b > 0$, et considérons les chemins allant de A à B par pas $(+1, +1)$ et $(+1, -1)$. Le nombre de ces chemins qui touchent l'axe des abscisses est égal au nombre total de chemins de $A' = (0, -a)$ à B.

Démonstration. Soit γ un chemin de A à B touchant l'axe ; soit T le premier instant où γ atteint l'axe. Réfléchissons la portion de γ située avant T par rapport à l'axe : on obtient un chemin de A' à B, qui touche l'axe pour la première fois au même instant T (la réflexion laisse l'axe fixe). Réciproquement, tout chemin de A' à B doit traverser l'axe (car $-a < 0 < b$) ; en réfléchissant sa portion initiale jusqu'au premier contact, on retrouve un chemin de A à B touchant l'axe. Les deux constructions sont réciproques : elles ne modifient pas l'instant du premier contact, et réfléchir deux fois la même portion redonne le chemin initial. ■



Le lemme de réflexion : la portion du chemin de A à B située avant le premier contact T avec l'axe (en couleur) est réfléchie ; on obtient un chemin de A' à B, et inversement.

Exemple 3.2.2 (Problème du scrutin, Bertrand 1887). *Deux candidats X et Y recueillent respectivement p et q voix, avec $p > q$. On dépouille les bulletins un à un dans un ordre aléatoire. Montrer que le nombre d'ordres de dépouillement où X est strictement en tête du début à la fin vaut $\frac{p-q}{p+q}\binom{p+q}{p}$.*

Codons le dépouillement par un chemin partant de $(0,0)$, montant de 1 à chaque voix pour X, descendant de 1 à chaque voix pour Y ; il aboutit en $(p+q, p-q)$. La condition « X strictement en tête » signifie que le chemin reste strictement au-dessus de l'axe après le premier pas. Le premier pas doit donc être une montée, et il reste à compter les chemins de $(1,1)$ à $(p+q, p-q)$ ne touchant pas l'axe.

Le nombre total de chemins de $(1,1)$ à $(p+q, p-q)$ est $\binom{p+q-1}{p-1}$; par réflexion, ceux qui touchent l'axe sont en bijection avec les chemins de $(1,-1)$ à $(p+q, p-q)$, au nombre de $\binom{p+q-1}{p}$. La réponse est donc

$$\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p} = \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!\,q!} - \frac{(p+q-1)!}{p!\,(q-1)!} = \frac{p-q}{p+q}\binom{p+q}{p}.$$

3.3 Les nombres de Catalan

Définition 3.3.1 (Nombres de Catalan)

Pour $n \geq 0$, on pose $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Les premières valeurs sont $1,1,2,5,14,42,132,429,1430,4862,\ldots$

À retenir (Interprétations équivalentes)

C_n compte chacun des ensembles suivants :

1. les mots de Dyck de longueur $2n$: mots sur $\{(,)\}$ à n parenthèses ouvrantes et n fermantes, tout préfixe contenant au moins autant d'ouvrantes que de fermantes ;
2. les chemins de $(0,0)$ à (n,n) à pas $\rightarrow, \uparrow$ ne passant jamais strictement au-dessus de la diagonale ;
3. les triangulations d'un polygone convexe à $n+2$ sommets ;
4. les arbres binaires à n nœuds internes ;
5. les façons de parenthéser un produit de $n+1$ facteurs.

Démonstration de la formule pour les mots de Dyck. Un mot à n ouvrantes et n fermantes est un chemin de $(0,0)$ à $(2n,0)$ à pas ± 1 ; il y en a $\binom{2n}{n}$. Ceux qui ne sont pas de Dyck descendent au niveau -1 ; par réflexion (par rapport à la droite $y=-1$, de la portion initiale jusqu'au premier contact), ils sont en bijection avec les chemins de $(0,-2)$ à $(2n,0)$, au nombre de $\binom{2n}{n-1}$. D'où

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n. \quad \blacksquare$$



Les $C_3 = 5$ chemins de Dyck de longueur 6, avec leurs mots de parenthèses : ((())), (()()), (())(), ()(()), ()()().

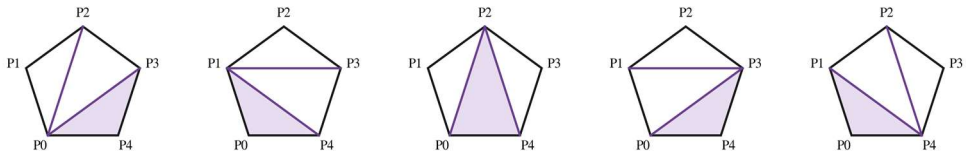
Proposition 3.3.2 (Récurrence de Segner)

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k\, C_{n-k}, \qquad \text{avec } C_0 = 1.$$

Démonstration. *Pour les mots de Dyck.* Soit w un mot de Dyck de longueur $2n+2$ et $2k+2$ la première position où le nombre de fermantes égale le nombre d'ouvrantes (premier retour du chemin à l'axe). On écrit $w = (u)v$: le mot u, de longueur $2k$, est de Dyck (ses préfixes, précédés de « (», restent strictement positifs avant la position $2k+2$) et v, de longueur $2(n-k)$, est de Dyck (on part du niveau 0). Réciproquement, pour tous u, v de Dyck, $(u)v$ est de Dyck et son premier retour a lieu en position $2k+2$. Cette bijection donne $\sum_k C_k\, C_{n-k}$ pour la suite définie par la formule de la définition 3.3.1 et interprétée comme nombre de mots de Dyck (démonstration précédente).

Les interprétations 2 à 5. Notons D_n le nombre d'objets de chacune de ces familles de « taille » n. Pour chacune, $D_0 = 1$ et $D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} D_k\, D_{n-k}$; comme cette récurrence détermine la suite, $D_n = C_n$ pour tout n.

2. *Chemins sous la diagonale.* Lire → comme « (» et ↑ comme «) » : rester sous la diagonale ($y \le x$) signifie exactement que tout préfixe contient au moins autant de « (» que de «) ». C'est une bijection avec les mots de Dyck.
3. *Triangulations.* Soit un polygone convexe $P_0P_1\cdots P_{n+2}$ à $n+3$ sommets. Dans une triangulation, le côté $[P_0P_{n+2}]$ appartient à un unique triangle $P_0P_{k+1}P_{n+2}$, $0 \le k \le n$; il reste à trianguler les polygones $P_0\cdots P_{k+1}$ ($k+2$ sommets) et $P_{k+1}\cdots P_{n+2}$ ($n-k+2$ sommets), de façon indépendante (avec la convention qu'un « polygone » à 2 sommets a une triangulation vide). D'où $D_{n+1} = \sum_k D_k\, D_{n-k}$, et $D_0 = 1$.
4. *Arbres binaires.* Un arbre binaire à $n+1$ nœuds internes est formé d'une racine et de deux sous-arbres binaires, gauche et droit, ayant k et $n-k$ nœuds internes ; l'arbre réduit à une feuille a 0 nœud interne.
5. *Parenthésages.* Dans un produit de $n+2$ facteurs complètement parenthésé, la dernière multiplication effectuée coupe le produit en un bloc des $k+1$ premiers facteurs et un bloc des $n-k+1$ derniers, chacun parenthésé indépendamment. ■

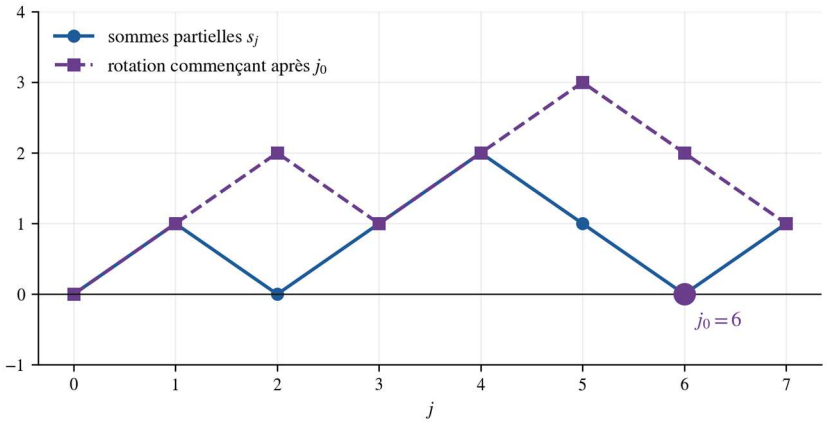


Les $C_3 = 5$ triangulations d'un pentagone convexe ; le triangle posé sur le côté $[P_0P_4]$ (en couleur) détermine la décomposition utilisée dans la récurrence de Segner.

Exemple 3.3.3 (Lemme du cycle, Dvoretzky–Motzkin). *Soient $a_1, \ldots, a_m$ des entiers ≤ 1 de somme 1. Montrer qu'il existe exactement une permutation cyclique $(a_{i+1}, \ldots, a_m, a_1, \ldots, a_i)$ dont toutes les sommes partielles sont > 0.*

Posons $s_0 = 0$ et $s_j = a_1 + \cdots + a_j$; on a $s_m = 1$. Prolongeons la suite par m-périodicité décalée : $s_{j+m} = s_j + 1$. Les sommes partielles de la permutation cyclique commençant par a_{i+1} sont les $s_{i+t} - s_i$, $1 \le t \le m$. Soit j_0 le dernier indice de $[\![0, m-1]\!]$ où s atteint son minimum μ sur $[\![0, m-1]\!]$. Pour $i = j_0$, toutes ces sommes sont > 0 : si $j_0 < j \le m-1$, on a $s_j > \mu$ par choix de j_0, et si $m \le j \le m + j_0$, on a $s_j = s_{j-m} + 1 > \mu$. Pour $i \ne j_0$ dans $[\![0, m-1]\!]$, l'une des sommes est ≤ 0 : si $s_i = \mu$, alors $i < j_0$ et la somme d'indice $t = j_0 - i$ est nulle ; si $s_i > \mu$, alors ou bien $i < j_0$ et la somme d'indice

$t = j_0 - i$ vaut $\mu - s_i < 0$, ou bien $i > j_0$, et alors, comme $s_i \geq \mu + 1$ (les s_j sont entiers), la somme d'indice $t = j_0 + m - i \in [\![1, m-1]\!]$ vaut $\mu + 1 - s_i \leq 0$. Le décalage commençant en j_0 est donc le seul dont les sommes partielles restent strictement positives.



Lemme du cycle pour (1, −1, 1, 1, −1, −1, 1) : les sommes partielles atteignent leur minimum pour la dernière fois en $j_0 = 6$; la permutation cyclique commençant juste après j_0 a toutes ses sommes partielles strictement positives.

Remarque (Application).

Le lemme du cycle redonne instantanément la formule des nombres de Catalan et celle du scrutin : parmi les $\binom{2n+1}{n}$ mots à n descentes et $n+1$ montées, exactement une rotation sur $2n+1$ convient (ces $2n+1$ rotations sont distinctes, puisque exactement une d'entre elles convient), et les mots qui conviennent sont les mots de Dyck de longueur $2n$ précédés d'une montée ; d'où $C_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$.

3.4 Le principe d'involution

Définition 3.4.1 (Involution)

Une involution d'un ensemble X est une application $\iota : X \to X$ telle que $\iota \circ \iota = \mathrm{id}$.

Théorème 3.4.2 (Principe d'involution)

Soit X un ensemble fini muni d'une application $\mathrm{sgn} : X \to \{+1, -1\}$ et d'une involution ι dont l'ensemble des points fixes est F et qui change le signe de tout point non fixe. Alors $\sum_{x \in X} \mathrm{sgn}\,(x) = \sum_{x \in F} \mathrm{sgn}\,(x)$.

En effet, les points non fixes s'apparient en couples $\{x, \iota(x)\}$ de signes opposés, dont les contributions s'annulent.

Exemple 3.4.3 (Somme alternée des binomiaux). *Redémontrer $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ pour $n \geq 1$ par une involution.*

Prenons $X = \mathcal{P}([\![1, n]\!])$ et $\mathrm{sgn}(A) = (-1)^{|A|}$. L'involution $\iota(A) = A \triangle \{1\}$ change la parité du cardinal et n'a aucun point fixe. La somme est donc nulle.

3.5 Formule de Cayley et code de Prüfer

Théorème 3.5.1 (Formule de Cayley)

Le nombre d'arbres dont l'ensemble des sommets est $[\![1, n]\!]$ vaut n^{n-2} (pour $n \geq 2$).

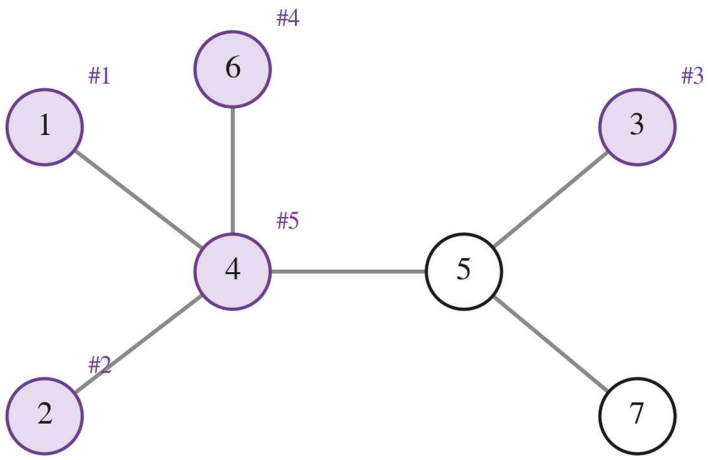
Démonstration par le code de Prüfer. *Rappels.* Un arbre est un graphe connexe sans cycle ; un arbre à n sommets a $n-1$ arêtes, et tout arbre à $n \geq 2$ sommets possède au moins deux feuilles (sommets de degré 1) ; en retirant une feuille on obtient un arbre à $n-1$ sommets (chapitre 10).

Le codage. À un arbre T sur un ensemble S de $n \geq 2$ entiers, on associe une suite de $n-2$ éléments de S : tant qu'il reste plus de deux sommets, on supprime la feuille de plus petite étiquette et l'on écrit l'étiquette de son unique voisin.

Lemme : chaque sommet i apparaît exactement $\deg_T(i) - 1$ fois dans le code. Par récurrence sur n. Pour $n = 2$, le code est vide et les deux sommets sont de degré 1. Pour $n \geq 3$, soit f la plus petite feuille et v son voisin : le code de T est v suivi du code de $T' = T - f$. Dans T', le degré de v a diminué de 1 et les autres degrés (hors f) sont inchangés ; par hypothèse de récurrence, v apparaît $(\deg_T v - 2) + 1$ fois, chaque autre sommet $i \neq f$ apparaît $\deg_T i - 1$ fois, et f n'apparaît pas ($\deg_T f - 1 = 0$). En particulier, **les feuilles de T sont exactement les sommets absents du code.**

Bijectivité. Montrons par récurrence sur $n \geq 2$ que, pour tout ensemble S de n entiers et toute suite $(c_1, \ldots, c_{n-2}) \in S^{n-2}$, il existe un unique arbre sur S ayant ce code. Pour $n = 2$, l'unique arbre est l'arête joignant les deux sommets. Pour $n \geq 3$: si T a pour code $(c_1, \ldots, c_{n-2})$, la première feuille supprimée f est, par le lemme, le plus petit élément de S absent du code, et son voisin est c_1 ; puis $T - f$ est un arbre sur $S \backslash \{f\}$ de code $(c_2, \ldots, c_{n-2})$, unique par hypothèse de récurrence : d'où l'unicité. Pour l'existence, définissons f comme le plus petit élément de S absent de la suite ; soit T' l'arbre sur $S \backslash \{f\}$ de code $(c_2, \ldots, c_{n-2})$ (les c_i, $i \geq 2$, sont bien dans $S \backslash \{f\}$), et $T = T' + \{f, c_1\}$. C'est un arbre (f est une nouvelle feuille). Ses feuilles sont celles de T' qui ne valent pas c_1, plus f ; par le lemme appliqué à T', ce sont les éléments de S absents de $(c_1, \ldots, c_{n-2})$, dont f est le plus petit. Le codage de T supprime donc d'abord f, écrit c_1, puis code T' : le code de T est bien la suite donnée.

Le codage est donc une bijection entre les arbres sur $[\![1, n]\!]$ et $[\![1, n]\!]^{n-2}$, qui a n^{n-2} éléments. ■



code : (4, 4, 5, 4, 5)

Un arbre sur $[\![1, 7]\!]$ et son code de Prüfer (4, 4, 5, 4, 5) : on supprime successivement les feuilles 1, 2, 3, 6, 4, en notant chaque fois le voisin ; le sommet 4, de degré 4, apparaît 3 fois.

Exemple 3.5.2 (Arbres à degrés imposés). *Soient $d_1, \dots, d_n \geq 1$ des entiers de somme $2n-2$. Montrer que le nombre d'arbres sur $[\![1,n]\!]$ dont le sommet i est de degré d_i vaut $\binom{n-2}{d_1-1,\dots,d_n-1}$.*

Dans le code de Prüfer, chaque sommet i apparaît exactement $d_i - 1$ fois (lemme de la démonstration du théorème 3.5.1) ; réciproquement, l'arbre associé à une suite où i apparaît $d_i - 1$ fois a, par le même lemme, $\deg i = d_i$. Le nombre cherché est donc le nombre de mots de longueur $n-2$ contenant $d_i - 1$ fois la lettre i, c'est-à-dire le coefficient multinomial annoncé.

3.6 Exercices

Exercice 3.1 ★. Montrer que le nombre de mots de longueur n sur $\{0,1\}$ sans deux 1 consécutifs vaut F_{n+2} (Fibonacci).

Exercice 3.2 ★★. Démontrer bijectivement que le nombre de parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal pair est égal au nombre de parties de cardinal impair ($n \geq 1$).

Exercice 3.3 ★★. On dispose de n pièces de 1 dinar et de n pièces de 2 dinars, et l'on veut les ranger en file de sorte qu'en lisant de gauche à droite, le nombre de pièces de 1 dinar rencontrées ne soit jamais inférieur au nombre de pièces de 2 dinars. Combien y a-t-il de rangements ?

Exercice 3.4 ★★. Montrer que le nombre de suites $0 = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$ d'entiers avec $x_n \leq m$ vaut $\binom{m+n}{n}$.

Exercice 3.5 ★★★. Montrer que le nombre de façons de découper un polygone convexe à $n+2$ sommets en triangles par des diagonales ne se coupant pas vaut C_n.

Exercice 3.6 ★★★. Une suite $(a_1, \dots, a_n)$ d'entiers vérifie $a_1 = 1$ et $a_{i+1} \leq a_i + 1$ pour tout i, avec $a_i \geq 1$. Montrer que le nombre de telles suites est C_n.

Exercice 3.7 ★★★. Soit $n \geq 1$. Montrer que le nombre de chemins de $(0,0)$ à (n,n) à pas $\rightarrow, \uparrow$ qui touchent la diagonale $y = x$ uniquement en leurs extrémités vaut $2C_{n-1}$.

Exercice 3.8 ★★★★ (OIM 2002, problème 1). Soit n un entier ≥ 1 et T l'ensemble des points (x,y) à coordonnées entières ≥ 0 avec $x + y < n$. Chaque point de T est colorié en rouge ou en bleu, de sorte que si (x,y) est rouge, alors tout $(x',y') \in T$ avec $x' \leq x$ et $y' \leq y$ est rouge. Un ensemble de type X est un ensemble de n points bleus d'abscisses deux à deux distinctes ; un ensemble de type Y est un ensemble de n points bleus d'ordonnées deux à deux distinctes. Montrer qu'il y a autant d'ensembles de type X que d'ensembles de type Y.

3.7 Corrigés

Solution de l'exercice 3.1. Soit u_n le nombre cherché. Si le mot commence par 0, il reste un mot valide de longueur $n-1$; s'il commence par 1, la lettre suivante est 0 et il reste un mot valide de longueur $n-2$. Donc $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ avec $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, d'où $u_n = F_{n+2}$.

Solution de l'exercice 3.2. L'application $A \mapsto A \triangle \{1\}$ est une involution sans point fixe qui échange les parties de cardinal pair et celles de cardinal impair.

Solution de l'exercice 3.3. En codant « 1 dinar » par un pas ↑ et « 2 dinars » par un pas →, on compte exactement les chemins de $(0,0)$ à (n,n) restant du bon côté de la diagonale : la réponse est $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Solution de l'exercice 3.4. Posons $y_i = x_i - x_{i-1} \geq 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $y_{n+1} = m - x_n \geq 0$. Alors $y_1 + \cdots + y_{n+1} = m$, et la correspondance est bijective. Par étoiles et barres, le nombre de solutions est $\binom{m+n}{n}$.

Solution de l'exercice 3.5. Notons T_k le nombre de triangulations d'un polygone convexe $A_0A_1 \ldots A_{k+1}$ à $k+2$ sommets, avec $T_0 = 1$. Fixons le côté $[A_0A_{k+1}]$; dans toute triangulation, il appartient à un unique triangle $A_0A_jA_{k+1}$ ($1 \leq j \leq k$). Ce triangle sépare le polygone en un polygone à $j+1$ sommets et un polygone à $k+2-j$ sommets, triangulés indépendamment. D'où $T_k = \sum_{j=1}^{k} T_{j-1}\,T_{k-j}$, c'est-à-dire la récurrence de Segner. Comme $T_0 = C_0$, on conclut $T_k = C_k$.

Solution de l'exercice 3.6. Associons à $(a_1, \ldots, a_n)$ le chemin formé, pour $i = 1, \ldots, n$, d'une montée suivie de $a_i - a_{i+1} + 1$ descentes (avec la convention $a_{n+1} = 1$). La condition $a_{i+1} \leq a_i + 1$ garantit que ces nombres de descentes sont ≥ 0. Par récurrence, le chemin atteint la hauteur a_i à la fin de la i-ième montée (car $a_1 = 1$), puis redescend à la hauteur $a_{i+1} - 1 \geq 0$; il ne passe donc jamais sous l'axe, et il se termine à la hauteur $a_{n+1} - 1 = 0$ après n montées et $\sum_i (a_i - a_{i+1} + 1) = n$ descentes. C'est un chemin de Dyck de longueur $2n$. La réciproque s'obtient par lecture des hauteurs atteintes à la fin de chaque montée : pour un chemin de Dyck, ces hauteurs vérifient $a_1 = 1$, $a_i \geq 1$ et $a_{i+1} \leq a_i + 1$. D'où C_n.

Solution de l'exercice 3.7. Un tel chemin reste entièrement d'un seul côté de la diagonale (sinon, par continuité discrète, il la retoucherait). Supposons-le sous la diagonale : son premier pas est nécessairement → et son dernier pas ↑. En les retirant, il reste un chemin de $(1,0)$ à $(n, n-1)$ restant au sens large sous la droite $y = x - 1$, c'est-à-dire, après translation, un chemin de Dyck de longueur $2(n-1)$: il y en a C_{n-1}. Par symétrie, autant de chemins passent au-dessus. D'où $2C_{n-1}$.

Solution de l'exercice 3.8. Pour $0 \leq i \leq n-1$, notons b_i le nombre de points bleus d'abscisse i et c_i le nombre de points bleus d'ordonnée i. Comme un point bleu d'abscisse i est toujours plus haut que tous les points rouges de cette colonne, les points bleus de la colonne i forment un segment terminal ; ils sont au nombre de b_i, et l'on doit en choisir exactement un par colonne (il y a n colonnes et n points d'abscisses distinctes). Le nombre d'ensembles de type X vaut donc $\prod_{i=0}^{n-1} b_i$, et de même celui de type Y vaut $\prod_{i=0}^{n-1} c_i$.

Montrons par récurrence sur le nombre de points bleus que les multi-ensembles $\{b_0, \ldots, b_{n-1}\}$ et $\{c_0, \ldots, c_{n-1}\}$ coïncident, ce qui donnera l'égalité des produits. S'il n'y a aucun point bleu, tous les b_i et c_i sont nuls. Sinon, soit (u, v) un point bleu minimal pour l'ordre produit. Colorions-le en rouge : la configuration reste admissible (tous les points situés en dessous et à gauche de (u, v) sont rouges, par minimalité), et par hypothèse de récurrence les multi-ensembles associés, à savoir $\{b_0, \ldots, b_u - 1, \ldots\}$ et $\{c_0, \ldots, c_v - 1, \ldots\}$, coïncident. Or la minimalité de (u, v) entraîne que les points bleus de la colonne u sont exactement $(u, v), (u, v+1), \ldots, (u, n-1-u)$, et ceux de la ligne v exactement $(u, v), (u+1, v), \ldots, (n-1-v, v)$: ainsi $b_u = c_v = n - u - v$. Les deux multi-ensembles initiaux s'obtiennent donc en remplaçant une même valeur $n - u - v - 1$ par $n - u - v$ dans deux multi-ensembles égaux : ils coïncident également.

CHAPITRE 4

4 Le principe d'inclusion–exclusion

Objectifs du chapitre. Énoncer et démontrer le crible ; savoir l'appliquer aux dérangements, aux surjections, aux problèmes arithmétiques ; connaître la version « exactement m propriétés » et les inégalités de Bonferroni.

4.1 Le crible

Théorème 4.1.1 (Formule du crible de Poincaré)

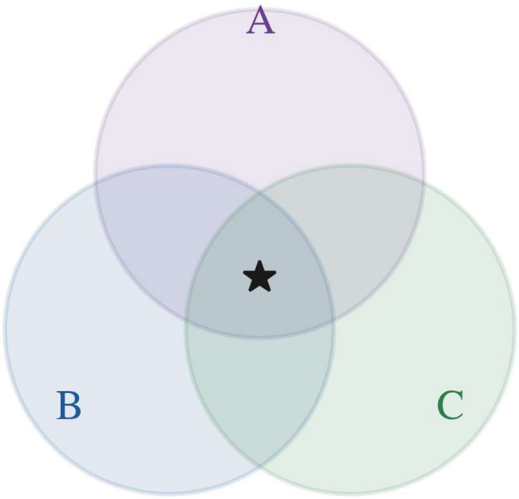
Soient $A_1, \dots, A_n$ des parties finies d'un ensemble. Alors

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\varnothing \neq I \subseteq [\![1,n]\!]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \sum_{i} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n+1} \left|\bigcap_{i} A_i\right|.$$

Démonstration (par les fonctions indicatrices). Soit x appartenant à exactement $k \geq 1$ des ensembles A_i. Sa contribution au membre de droite vaut

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} = 1 - \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j} \binom{k}{j} = 1 - 0 = 1,$$

car il y a $\binom{k}{j}$ parties I de taille j contenues dans l'ensemble des indices « touchés » par x. Un point n'appartenant à aucun A_i contribue 0 des deux côtés. ∎



Le crible pour trois ensembles : un élément de A ∩ B ∩ C (au centre) est compté 3 fois dans Σ|Aᵢ|, retiré 3 fois dans Σ|Aᵢ ∩ Aⱼ|, puis rajouté une fois : 3 − 3 + 1 = 1.

Corollaire 4.1.2 (Crible complémentaire)

Si $A_1, \dots, A_n$ sont des parties d'un ensemble fini E, alors

$$\left|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right| = \sum_{I \subseteq [\![1,n]\!]} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|,$$

avec la convention $\bigcap_{i \in \varnothing} A_i = E$.

Démonstration. $\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$ est le complémentaire de $\bigcup_i A_i$ dans E, donc son cardinal vaut $|E| - |\bigcup_i A_i|$; on remplace $|\bigcup_i A_i|$ par la formule du crible, et le terme $|E|$ correspond à $I = \varnothing$. ■

À retenir (Quand penser au crible ?)

Dès qu'un énoncé demande de compter des objets vérifiant *aucune* d'une liste de propriétés (« aucun point fixe », « aucune lettre à sa place », « pas de facteur premier dans cette liste », « chaque couleur utilisée »), le crible est la traduction automatique de la négation. La difficulté n'est jamais dans la formule mais dans le calcul des $|\bigcap_{i \in I} A_i|$, qui doit ne dépendre que de $|I|$ pour que la somme se simplifie.

4.2 Dérangements

Définition 4.2.1 (Dérangement)

Un dérangement de $[\![1, n]\!]$ est une permutation sans point fixe. On note D_n leur nombre.

Théorème 4.2.2 (Nombre de dérangements)

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad D_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad (n \geq 1).$$

Démonstration. Soit A_i l'ensemble des permutations σ telles que $\sigma(i) = i$. Pour $I \subseteq [\![1, n]\!]$ de cardinal k, $|\bigcap_{i \in I} A_i| = (n-k)!$ (les k points sont fixés, le reste est libre). Le crible complémentaire donne

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

La seconde expression vient de ce que, le reste d'une série alternée dont les termes décroissent strictement en valeur absolue étant strictement majoré par son premier terme,

$\left|D_n - \frac{n!}{e}\right| = n! \left|\sum_{k>n} \frac{(-1)^k}{k!}\right| < \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$. ■

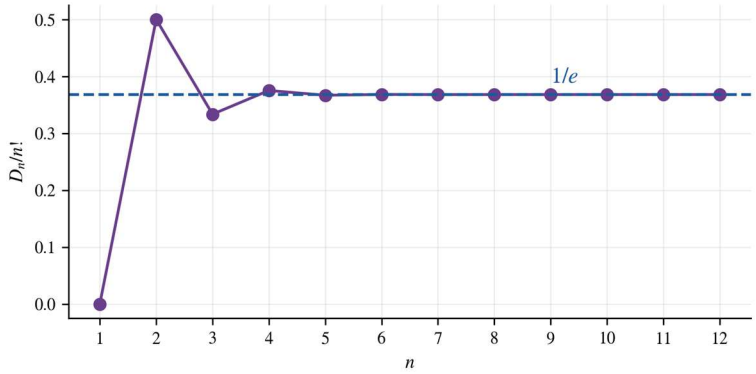
Proposition 4.2.3 (Récurrences des dérangements)

$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ et $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

Démonstration. Pour la première : dans un dérangement σ, il y a $n-1$ choix pour $\sigma(n) = j$. Si $\sigma(j) = n$, les $n-2$ éléments restants forment un dérangement : D_{n-2} cas. Sinon, soit $i = \sigma^{-1}(n)$; on a $i \neq j$ (car $\sigma(j) \neq n$) et $i \neq n$. Définissons τ sur $[\![1, n-1]\!]$ par $\tau(i) = j$ et $\tau(k) = \sigma(k)$ pour $k \neq i$: on

« court-circuite » n dans le cycle $i \mapsto n \mapsto j$. C'est une permutation de $[\![1, n-1]\!]$ sans point fixe ($\tau(i) = j \neq i$). Réciproquement, pour j fixé et τ dérangement de $[\![1, n-1]\!]$, on reconstruit σ en posant $i = \tau^{-1}(j)$, $\sigma(i) = n$, $\sigma(n) = j$, $\sigma(k) = \tau(k)$ sinon ; alors $\sigma(j) = \tau(j) \neq n$. D'où D_{n-1} cas, et au total $(n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$.

Pour la seconde, posons $u_n = D_n - nD_{n-1}$. La première relation s'écrit $D_n - nD_{n-1} = -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2})$, soit $u_n = -u_{n-1}$; avec $D_0 = 1$, $D_1 = 0$, $u_1 = -1$, donc $u_n = (-1)^n$. ■



La proportion de dérangements $D_n/n!$ en fonction de n : elle oscille autour de 1/e ≈ 0,368 (en pointillés) et s'en rapproche extrêmement vite.

Exemple 4.2.4 (Le problème des chapeaux). *n personnes déposent leur chapeau au vestiaire ; on le leur rend au hasard. Quelle est la probabilité qu'aucune ne récupère le sien ? Que devient-elle quand $n \to \infty$?*

Solution. Elle vaut $D_n/n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k/k! \to e^{-1} \approx 0{,}3679$. Fait remarquable : cette probabilité est essentiellement indépendante de n dès $n = 4$ (son écart à e^{-1} est inférieur à $\frac{1}{(n+1)!}$, soit moins de $0{,}01$ dès $n = 4$).

4.3 Surjections et nombres de Stirling

Théorème 4.3.1 (Nombre de surjections)

Le nombre de surjections d'un ensemble à m éléments sur un ensemble à n éléments vaut

$$S(m, n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

Démonstration. Soit A_i l'ensemble des applications dont l'image évite le i-ième élément du but ; on a $|\bigcap_{i \in I} A_i| = (n - |I|)^m$. Le crible complémentaire conclut. ■

Corollaire 4.3.2

Pour $m < n$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m = 0$, et pour $m = n$ la somme vaut $n!$. (Comparer à l'exercice 2.3.)

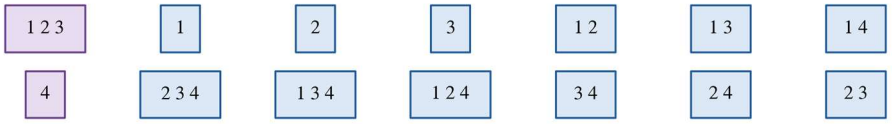
Démonstration. Si $m < n$, une application d'un ensemble à m éléments ne peut atteindre n valeurs : il n'y a aucune surjection, et $S(m, n) = 0$. Si $m = n$, les surjections entre ensembles de même cardinal sont les bijections (une surjection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$ est injective, sinon son image aurait au plus $n - 1$ éléments), au nombre de $n!$. ■

À retenir (Nombres de Stirling de deuxième espèce)

$\left\{ {m \atop n} \right\}$ désigne le nombre de partitions d'un ensemble à m éléments en n parties non vides ; on a $S(m,n) = n!\left\{ {m \atop n} \right\}$ et la récurrence $\left\{ {m \atop n} \right\} = n\left\{ {m-1 \atop n} \right\} + \left\{ {m-1 \atop n-1} \right\}$.

Démonstration. *Relation avec les surjections.* À une surjection $f : [\![1,m]\!] \to [\![1,n]\!]$ on associe la partition de $[\![1,m]\!]$ en ses n fibres $f^{-1}(1), \dots, f^{-1}(n)$, non vides. Réciproquement, une partition en n blocs et une numérotation des blocs (une bijection des blocs vers $[\![1,n]\!]$, $n!$ choix) déterminent une surjection. Donc $S(m,n) = n!\left\{ {m \atop n} \right\}$.

Récurrence. Dans une partition de $[\![1,m]\!]$ en n blocs, ou bien m est seul dans son bloc — en le retirant, il reste une partition de $[\![1,m-1]\!]$ en $n-1$ blocs —, ou bien il est avec d'autres éléments — en le retirant, on obtient une partition de $[\![1,m-1]\!]$ en n blocs, et l'on retrouve la partition initiale en indiquant dans lequel des n blocs se trouvait m (n choix). ■



Les S(4, 2) = 7 partitions de {1, 2, 3, 4} en deux blocs non vides ; 4 est seul dans 1 d'entre elles (S(3, 1) = 1) et accompagné dans les 6 autres (2 · S(3, 2) = 2 · 3).

4.4 Applications arithmétiques

Exemple 4.4.1 (Indicatrice d'Euler). *Soit $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$. Montrer que $\varphi(n) = n\prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.*

Solution. Soit A_i l'ensemble des entiers de $[\![1,n]\!]$ divisibles par p_i ; on a $|\cap_{i\in I} A_i| = n/\prod_{i\in I} p_i$. Le crible complémentaire donne

$$\varphi(n) = \sum_{I \subseteq [\![1,r]\!]} (-1)^{|I|} \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i} = n\prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right),$$

la dernière égalité s'obtenant en développant le produit : chaque terme du développement correspond au choix, pour chaque i, du 1 ou du $-\frac{1}{p_i}$, c'est-à-dire à une partie I. On a utilisé que les multiples communs aux p_i, $i \in I$, sont les multiples de leur produit (premiers distincts), au nombre de $n/\prod_{i\in I} p_i$ dans $[\![1,n]\!]$.

Exemple 4.4.2 (Comptage avec bornes supérieures). *Combien de solutions entières ≥ 0 possède $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ avec $x_i \leq 8$ pour tout i ?*

Solution. Sans contrainte : $\binom{23}{3} = 1771$. Soit A_i l'événement « $x_i \geq 9$ » ; en posant $x_i' = x_i - 9$, $|A_i| = \binom{14}{3} = 364$. Pour $i < j$, $|A_i \cap A_j|$ correspond à une somme égale à 2, soit $\binom{5}{3} = 10$. Trois contraintes simultanées sont impossibles. Donc

$$1771 - 4 \cdot 364 + 6 \cdot 10 = 1771 - 1456 + 60 = 375.$$

4.5 Version « exactement m » et inégalités de Bonferroni

Théorème 4.5.1 (Éléments appartenant à exactement m ensembles)

Notons E_m le nombre d'éléments appartenant à exactement m des ensembles $A_1, \dots, A_n$, et $S_j = \sum_{|I|=j} |\bigcap_{i\in I} A_i|$. Alors

$$E_m = \sum_{j=m}^{n} (-1)^{j-m} \binom{j}{m} S_j.$$

Démonstration. Un élément appartenant à exactement k ensembles est compté $\binom{k}{j}$ fois dans S_j ; sa contribution au membre de droite vaut $\sum_{j\geq m} (-1)^{j-m} \binom{j}{m}\binom{k}{j}$. En utilisant $\binom{j}{m}\binom{k}{j} = \binom{k}{m}\binom{k-m}{j-m}$, cette contribution vaut $\binom{k}{m}\sum_{t\geq 0}(-1)^t \binom{k-m}{t}$, qui est nulle sauf si $k = m$, auquel cas elle vaut 1. ■

Théorème 4.5.2 (Inégalités de Bonferroni)

Pour tout $r \geq 0$,

$$\sum_{j=1}^{2r+1} (-1)^{j+1} S_j \;\geq\; \Big|\bigcup_i A_i\Big| \;\geq\; \sum_{j=1}^{2r} (-1)^{j+1} S_j.$$

Autrement dit, les sommes partielles du crible encadrent alternativement la valeur cherchée.

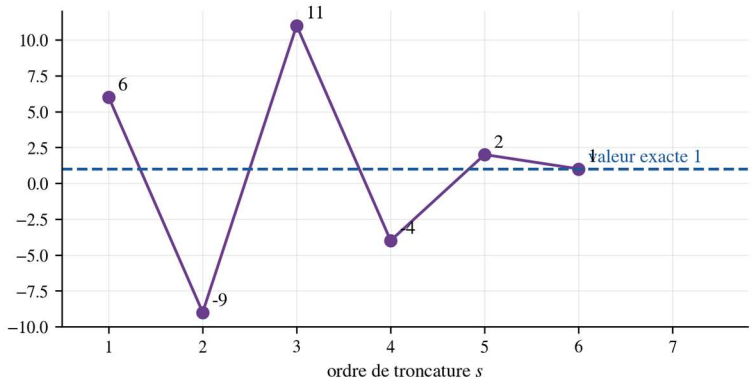
Démonstration. *Identité préliminaire : pour $k \geq 1$ et $s \geq 0$, $\sum_{j=0}^{s}(-1)^j \binom{k}{j} = (-1)^s\binom{k-1}{s}$.* Par la formule de Pascal $\binom{k}{j} = \binom{k-1}{j} + \binom{k-1}{j-1}$, la somme est télescopique :

$$\sum_{j=0}^{s}(-1)^j \binom{k-1}{j} + \sum_{j=0}^{s}(-1)^j \binom{k-1}{j-1} = \sum_{j=0}^{s}(-1)^j \binom{k-1}{j} - \sum_{j=0}^{s-1}(-1)^j \binom{k-1}{j} = (-1)^s \binom{k-1}{s}.$$

Conclusion. Un élément n'appartenant à aucun A_i contribue 0 à tous les membres. Un élément appartenant à exactement $k \geq 1$ ensembles contribue 1 à $|\cup A_i|$ et, à la somme tronquée $\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1} S_j$,

$$\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}\binom{k}{j} = 1 - \sum_{j=0}^{s}(-1)^j \binom{k}{j} = 1 - (-1)^s \binom{k-1}{s}.$$

Pour s impair, c'est ≥ 1 ; pour s pair, c'est ≤ 1. En sommant sur tous les éléments, on obtient les deux inégalités. ■



Inégalités de Bonferroni : pour un élément appartenant à k = 6 ensembles, les sommes tronquées 1 − (−1)ˢ C(5, s) encadrent alternativement la valeur exacte 1 (au-dessus pour s impair, au-dessous pour s pair).

À retenir (Pourquoi c'est utile)

En olympiade, on ne peut souvent pas calculer tous les S_j, mais les deux premiers suffisent à obtenir un encadrement décisif :

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| \;\le\; |\bigcup A_i| \;\le\; \sum_i |A_i|.$$

La minoration s'appelle inégalité de Bonferroni ou parfois borne de l'union inversée.

4.6 Exercices

Exercice 4.1 ★. Combien d'entiers de 1 à 1000 ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5 ?

Exercice 4.2 ★★. Combien de permutations de $[\![1, n]\!]$ ont exactement k points fixes ? En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = n!$.

Exercice 4.3 ★★. De combien de façons peut-on placer 8 tours sur un échiquier 8×8 sans qu'aucune ne puisse en prendre une autre et sans qu'aucune ne se trouve sur la grande diagonale ?

Exercice 4.4 ★★. Combien de mots de longueur n sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ contiennent au moins une fois chacune des trois lettres ?

Exercice 4.5 ★★★. Soit $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers $\le x$. Utiliser le crible d'Ératosthène pour montrer que le nombre d'entiers de $[\![1, N]\!]$ sans facteur premier $\le z$ vaut $\sum_{d \mid P(z)} \mu(d) \left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor$, où $P(z) = \prod_{p \le z} p$ et μ est la fonction de Möbius.

Exercice 4.6 ★★★ (problème des ménages). n couples participent à un dîner et s'assoient autour d'une table ronde de $2n$ places, de sorte que les places alternent homme–femme. Combien y a-t-il de dispositions où aucun couple n'est assis côte à côte ?

Exercice 4.7 ★★★★. Soient $A_1, \dots, A_n$ des parties d'un ensemble fini E telles que chaque élément de E appartienne à au moins un A_i. Montrer que $\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| \le |E|$.

4.7 Corrigés

Solution de l'exercice 4.1.

$$1000 - (500 + 333 + 200) + (166 + 100 + 66) - 33 = 1000 - 1033 + 332 - 33 = 266.$$

Solution de l'exercice 4.2. On choisit les k points fixes ($\binom{n}{k}$ façons) puis un dérangement des $n-k$ autres : $\binom{n}{k} D_{n-k}$. En sommant sur k on obtient toutes les permutations, d'où $\sum_k \binom{n}{k} D_{n-k} = n!$.

Solution de l'exercice 4.3. Une configuration de 8 tours non attaquantes est une permutation σ de $[\![1,8]\!]$; la condition « aucune sur la diagonale » signifie $\sigma(i) \neq i$. La réponse est donc $D_8 = 14\,833$.

Solution de l'exercice 4.4. $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$ (crible sur les trois lettres manquantes).

Solution de l'exercice 4.5. Soit A_p l'ensemble des multiples de p dans $[\![1, N]\!]$, pour $p \leq z$ premier. Alors $\left|\bigcap_{p \in I} A_p\right| = \left\lfloor N / \prod_{p \in I} p \right\rfloor$. Le crible complémentaire donne la somme annoncée, où d parcourt les diviseurs sans facteur carré de $P(z)$ et $\mu(d) = (-1)^{\omega(d)}$.

Solution de l'exercice 4.6. Plaçons d'abord les n femmes en alternance : $2 \cdot n!$ façons (deux choix pour la parité des places, puis $n!$ ordres). Les femmes étant placées, il reste à placer les hommes sur les n places libres en évitant, pour chaque homme, les deux places voisines de son épouse. C'est un problème de permanent : le crible donne, pour le nombre U_n de placements convenables des hommes,

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!,$$

le facteur $\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$ comptant les façons de choisir k des $2n$ interdits deux à deux non adjacents sur un cycle de longueur $2n$: d'après l'exemple 3.1.3, selon que le premier interdit est choisi ou non, on obtient $\binom{2n-k-1}{k-1} + \binom{2n-k}{k} = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$. Le nombre de dispositions cherché est donc $2 \cdot n! \cdot U_n$ (à diviser par $2n$ si l'on identifie deux dispositions qui se déduisent l'une de l'autre par rotation). Les premières valeurs de U_n sont $U_3 = 1$, $U_4 = 2$, $U_5 = 13$, $U_6 = 80$.

Solution de l'exercice 4.7. Fixons $x \in E$ et notons $k \geq 1$ le nombre d'indices i tels que $x \in A_i$. La contribution de x au membre de gauche vaut $k - \binom{k}{2}$, qui est ≤ 1 pour tout $k \geq 1$: en effet $k - \binom{k}{2} \leq 1 \Leftrightarrow k^2 - 3k + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (k-1)(k-2) \geq 0$, vrai pour tout entier k. Sa contribution au membre de droite vaut 1. En sommant sur $x \in E$ on obtient l'inégalité. C'est le cas $r = 1$ des inégalités de Bonferroni.

CHAPITRE 5

5 Récurrences et fonctions génératrices

Objectifs du chapitre. Savoir traduire un problème de comptage en relation de récurrence ; résoudre une récurrence linéaire à coefficients constants ; manipuler les séries formelles ; utiliser le filtre par les racines de l'unité.

5.1 Mettre un problème en récurrence

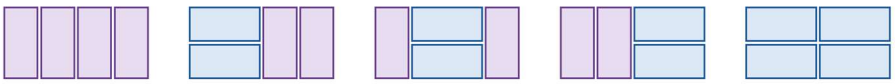
Méthode 5.1.1 — Les trois questions

Pour trouver une récurrence sur u_n :

1. **Où est le « dernier » objet ?** Découpez selon le statut du n-ième élément (présent/absent, position, couleur…).
2. **Où est la première rupture ?** Pour les mots et les chemins, découpez selon le premier retour à un état particulier ; cela produit typiquement une récurrence de convolution $u_n = \sum_k u_k\, u_{n-1-k}$.
3. **Puis-je enrichir l'état ?** Si une seule suite ne suffit pas, introduisez plusieurs suites couplées (u_n, v_n) ; c'est souvent la clé.

Exemple 5.1.2 (Pavages d'un rectangle 2 × n). *De combien de façons peut-on paver un rectangle* $2 \times n$ *avec des dominos* 1×2 *?*

Solution. Soit t_n ce nombre. Regardons la colonne de droite : soit elle est couverte par un domino vertical (reste un $2 \times (n-1)$), soit par deux dominos horizontaux, qui occupent alors les deux dernières colonnes (reste un $2 \times (n-2)$). Donc $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$, avec $t_1 = 1$, $t_2 = 2$: $t_n = F_{n+1}$.



Les $t_4 = 5$ pavages d'un rectangle 2 × 4 par des dominos : ceux dont la dernière colonne est un domino vertical ($3 = t_3$) et ceux qui se terminent par deux dominos horizontaux ($2 = t_2$).

Exemple 5.1.3 (Suites binaires sans motif). *Soit* a_n *le nombre de mots de longueur* n *sur* $\{0,1\}$ *ne contenant pas le facteur* 11*. Trouver une récurrence, puis* a_n*.*

Solution. Introduisons b_n (mots valides finissant par 0) et c_n (finissant par 1). Un mot valide finissant par 0 s'obtient à partir de n'importe quel mot valide de longueur $n-1$; un mot valide finissant par 1 ne peut venir que d'un mot finissant par 0. Donc $b_n = a_{n-1}$ et $c_n = b_{n-1} = a_{n-2}$, d'où $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, et $a_n = F_{n+2}$.

5.2 Récurrences linéaires à coefficients constants

Méthode 5.2.1 — Résolution

Soit (u_n) vérifiant $u_n = c_1 u_{n-1} + \cdots + c_d u_{n-d}$ pour $n \geq d$, et soit $\chi(X) = X^d - c_1 X^{d-1} - \cdots - c_d$ son polynôme caractéristique. Si χ a pour racines $r_1, \ldots, r_s$ de multiplicités $m_1, \ldots, m_s$, alors il existe des polynômes P_i de degré $< m_i$ tels que

$$u_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n) r_i^n \qquad (n \geq 0),$$

et les coefficients de ces polynômes sont déterminés par les d valeurs initiales.

Théorème (Solution des récurrences linéaires)

Avec les notations de la méthode 5.2.1 et $c_d \neq 0$, toute suite vérifiant la récurrence s'écrit $u_n = \sum_i P_i(n) r_i^n$ avec $\deg P_i < m_i$.

Démonstration. Posons $U(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$ et $Q(x) = 1 - c_1 x - \cdots - c_d x^d = x^d \chi(1/x) = \prod_i (1 - r_i x)^{m_i}$ (les r_i sont non nuls car $c_d \neq 0$). Le coefficient de x^n dans $Q(x)U(x)$ vaut $u_n - c_1 u_{n-1} - \cdots - c_d u_{n-d} = 0$ pour $n \geq d$; donc $Q(x)U(x) = R(x)$ est un polynôme de degré $< d$. Par décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle R/Q (résultat d'algèbre sur $\mathbb{C}$, $\deg R < \deg Q$),

$$U(x) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{i,k}}{(1 - r_i x)^k}.$$

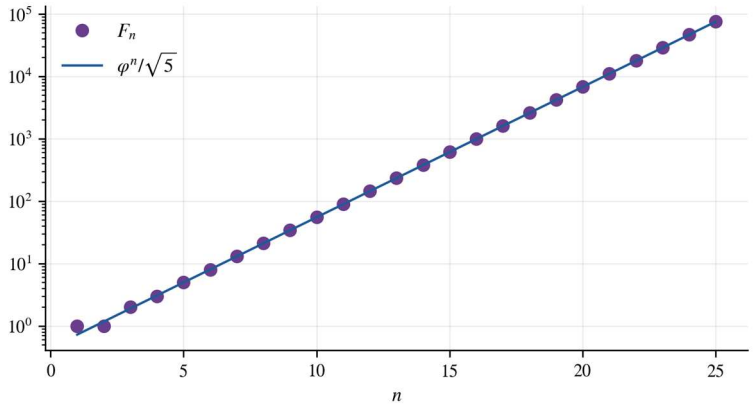
Or $\frac{1}{(1-rx)^k} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+k-1}{k-1} r^n x^n$ (voir le tableau ci-dessous), et $\binom{n+k-1}{k-1}$ est un polynôme en n de degré $k-1$. En identifiant les coefficients, $u_n = \sum_i P_i(n) r_i^n$ avec $P_i(n) = \sum_{k\leq m_i} a_{i,k} \binom{n+k-1}{k-1}$, de degré $< m_i$. L'unicité de la décomposition en éléments simples montre que les P_i sont déterminés par U, c'est-à-dire par les valeurs initiales. ■

Exemple 5.2.2 (Formule de Binet). *Résoudre* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_1 = F_2 = 1$.

Solution. $\chi(X) = X^2 - X - 1$, de racines $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Donc $F_n = \alpha\varphi^n + \beta\bar{\varphi}^n$, et les conditions initiales donnent

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \bar{\varphi}^n).$$

On en déduit $F_n = \left\lfloor \varphi^n/\sqrt{5} + \frac{1}{2} \right\rfloor$, car $\left|\bar{\varphi}^n/\sqrt{5}\right| < \frac{1}{2}$ (puisque $|\bar{\varphi}| < 1$ et $\sqrt{5} > 2$).



Formule de Binet : en échelle logarithmique, les nombres de Fibonacci F_n (points) suivent la droite $\varphi^n/\sqrt{5}$; l'écart $|\varphi^n/\sqrt{5}|$ tend vers 0.

À retenir (Cas non homogène)

Pour $u_n = c_1 u_{n-1} + \cdots + c_d u_{n-d} + f(n)$ avec f polynomiale (resp. $f(n) = \lambda^n \times$ polynôme), on cherche une solution particulière polynomiale (resp. de la forme $\lambda^n \times$ polynôme), en augmentant le degré du polynôme cherché de la multiplicité de 1 (resp. de λ) comme racine de χ. La solution générale est la somme de la solution particulière et de la solution homogène.

5.3 Séries formelles et fonctions génératrices

Définition 5.3.1 (Série génératrice)

À une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ on associe la série formelle $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n\, x^n$. On travaille dans l'anneau $\mathbb{R}[\![x]\!]$ des séries formelles : aucune question de convergence ne se pose, seule compte l'égalité coefficient par coefficient.

Justification du tableau.

Dans $\mathbb{R}[\![x]\!]$, $(1-\lambda x)\sum_n \lambda^n x^n = 1$ (le produit télescope), d'où les deux premières lignes. Le coefficient de x^n dans $\left(\sum_j x^j\right)^k$ est le nombre de solutions de $j_1 + \cdots + j_k = n$ en entiers ≥ 0, soit $\binom{n+k-1}{k-1}$ (étoiles et barres, théorème 1.5.1). La quatrième ligne est la formule du binôme. Enfin, si $F(x) = \sum F_n x^n$ (avec $F_0 = 0$), alors $(1-x-x^2)F(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x + \sum_{n\geq 2}(F_n - F_{n-1} - F_{n-2})\,x^n = x$.

Suite	Série génératrice
$a_n = 1$	$\dfrac{1}{1-x}$
$a_n = \lambda^n$	$\dfrac{1}{1-\lambda x}$
$a_n = \binom{n+k-1}{k-1}$	$\dfrac{1}{(1-x)^k}$
$a_n = \binom{m}{n}$	$(1+x)^m$
$a_n = F_n$	$\dfrac{x}{1-x-x^2}$

Proposition 5.3.2 (Produit de Cauchy)

Si $A(x) = \sum a_n x^n$ et $B(x) = \sum b_n x^n$, alors $A(x)B(x) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right) x^n$.

Démonstration. C'est la définition du produit dans $\mathbb{R}[\![x]\!]$: en développant $\left(\sum_k a_k\, x^k\right)\left(\sum_\ell b_\ell\, x^\ell\right)$, le monôme x^n provient des couples (k,ℓ) avec $k+\ell = n$. ■

C'est la raison d'être des fonctions génératrices : le produit de séries traduit la convolution, donc la construction d'un objet composé à partir de deux objets indépendants.

Exemple 5.3.3 (Fonction génératrice de Catalan). *Retrouver $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ à partir de la récurrence de Segner.*

Solution. Posons $C(x) = \sum_{n\geq 0} C_n\, x^n$. La récurrence $C_{n+1} = \sum_k C_k\, C_{n-k}$ se traduit, par le produit de Cauchy, par $C(x) = 1 + xC(x)^2$ (le coefficient de x^{n+1} de $xC(x)^2$ est $\sum_k C_k\, C_{n-k}$). On en déduit $\big(1 - 2xC(x)\big)^2 = 1 - 4x(C(x) - xC(x)^2) = 1 - 4x$. Or une série formelle S de terme constant 1 vérifiant $S^2 = 1 - 4x$ est unique (ses coefficients se calculent de proche en proche : le coefficient de x^n dans S^2 est $2s_n +$ des termes en $s_1, \ldots, s_{n-1}$) ; c'est donc la série $\sqrt{1-4x} = \sum_n \binom{1/2}{n} (-4x)^n$ du binôme généralisé. Ainsi $2xC(x) = 1 - \sqrt{1-4x}$, soit

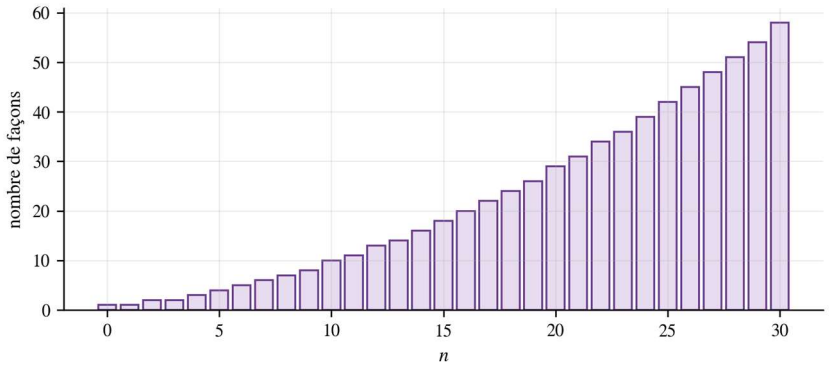
$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Calculons, pour $n \geq 1$: $\binom{1/2}{n}(-4)^n = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}-n\right)}{n!}(-4)^n = -\frac{2^n \cdot 1\cdot 3\cdots(2n-3)}{n!} = -\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$, en utilisant $1\cdot 3\cdots(2n-3) = \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}$. Donc

$$[x^n]C(x) = -\frac{1}{2}[x^{n+1}]\sqrt{1-4x} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Exemple 5.3.4 (Un problème de monnaie). *De combien de façons peut-on payer n millimes avec des pièces de 1, 2 et 5 millimes, l'ordre n'important pas ?*

Solution. La série génératrice est $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$, le facteur $\frac{1}{1-x^k} = 1 + x^k + x^{2k} + \cdots$ codant le nombre de pièces de valeur k utilisées. Le nombre cherché est le coefficient de x^n.



Nombre de façons de payer n millimes avec des pièces de 1, 2 et 5 millimes, pour 0 ≤ n ≤ 30 : ce sont les coefficients de 1/((1 − x)(1 − x²)(1 − x⁵)).

À retenir (Le dictionnaire)

- « choisir un objet parmi A ou parmi B » → $A(x) + B(x)$;
- « choisir un objet de A et un objet de B » → $A(x)B(x)$;
- « une suite finie d'objets de A » → $\frac{1}{1-A(x)}$ (si $A(0) = 0$) ;
- décalage : $x^k A(x)$; dérivation : $\sum n a_n x^{n-1}$; somme partielle : $\frac{A(x)}{1-x}$.

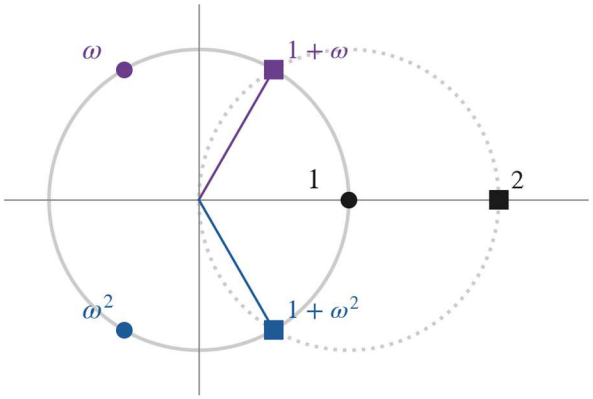
5.4 Le filtre par les racines de l'unité

Théorème 5.4.1 (Filtre par les racines de l'unité)

Soit $P(x) = \sum_n a_n\, x^n$ un polynôme et $m \geq 1$. Si $\omega = e^{2i\pi/m}$, alors pour tout r,

$$\sum_{n \equiv r \pmod m} a_n = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \omega^{-jr} P(\omega^j).$$

Démonstration. En échangeant les sommes, le membre de droite vaut $\sum_n a_n \cdot \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} \omega^{j(n-r)}$. Posons $z = \omega^{n-r}$. Si $m \mid n-r$, alors $z = 1$ et la somme intérieure vaut m. Sinon $z \neq 1$ et $z^m = 1$, donc $\sum_{j=0}^{m-1} z^j = \frac{z^m - 1}{z-1} = 0$. Seuls les a_n avec $n \equiv r \pmod m$ subsistent, chacun avec le coefficient 1. ∎



Le filtre par les racines cubiques de l'unité : les points 1 + ω^j (j = 0, 1, 2), dont les puissances n-ièmes se somment ; 1 + ω et 1 + ω² sont de module 1 et d'argument ±π/3.

Exemple 5.4.2. *Calculer* $\sum_{k \equiv 0 \pmod 3} \binom{n}{k}$.

Solution. Avec $P(x) = (1+x)^n$ et $\omega = e^{2i\pi/3}$:

$$\sum_{3 \mid k} \binom{n}{k} = \frac{2^n + (1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n}{3} = \frac{2^n + 2\cos(n\pi/3)}{3},$$

car $1 + \omega = -\omega^2 = e^{i\pi/3}$ et $1 + \omega^2 = e^{-i\pi/3}$.

5.5 Exercices

Exercice 5.1 ★. Résoudre $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ avec $u_0 = 1$, $u_1 = 0$.

Exercice 5.2 ★★. Combien de mots de longueur n sur $\{a, b, c\}$ ne contiennent jamais deux a consécutifs ?

Exercice 5.3 ★★. Soit u_n le nombre de façons de paver un rectangle $3 \times 2n$ par des dominos. Montrer que $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$ et calculer u_4.

Exercice 5.4 ★★. Calculer $\sum_{k \equiv 1 \pmod 4} \binom{n}{k}$.

Exercice 5.5 ★★★ (théorème d'Euler). Soit p_n le nombre de partitions de l'entier n en parts impaires, et q_n le nombre de partitions de n en parts deux à deux distinctes. Montrer que $p_n = q_n$.

Exercice 5.6 ★★★. On considère les suites $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ dont toutes les sommes partielles $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k$ sont ≥ 0. Montrer que leur nombre vaut $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Exercice 5.7 ★★★★ (OIM 1979, adapté). Soit a_n le nombre de mots de longueur n sur $\{0,1\}$ tels que tout bloc de 1 soit de longueur paire. Trouver la série génératrice de (a_n) et une formule close.

5.6 Corrigés

Solution de l'exercice 5.1. $\chi(X) = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$, donc $u_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$. Avec $u_0 = 1$, $u_1 = 0$: $\alpha + \beta = 1$, $2\alpha + 3\beta = 0$, d'où $\alpha = 3$, $\beta = -2$ et $u_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$.

Solution de l'exercice 5.2. Soit x_n le nombre de mots valides finissant par a et y_n les autres. Alors $x_n = y_{n-1}$ et $y_n = 2(x_{n-1} + y_{n-1})$. Donc $u_n = x_n + y_n$ vérifie $u_n = 2u_{n-1} + 2u_{n-2}$, avec $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ (et $u_2 = 8$). Les racines de $X^2 - 2X - 2$ sont $1 \pm \sqrt{3}$, d'où

$$u_n = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\left(1+\sqrt{3}\right)^n - \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\left(1-\sqrt{3}\right)^n.$$

Solution de l'exercice 5.3. Notons u_n le nombre de pavages de $3 \times 2n$ et v_n celui de $3 \times (2n+1)$ privé d'un coin. Un découpage selon les colonnes de droite donne $u_n = u_{n-1} + 2v_{n-1}$ et $v_n = u_n + v_{n-1}$, avec $u_0 = v_0 = 1$. En éliminant v : $2v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$ et $2(v_{n-1} - v_{n-2}) = 2u_{n-1}$, d'où $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$, avec $u_0 = 1$, $u_1 = 3$. Donc $u_2 = 11$, $u_3 = 41$, $u_4 = 153$.

Solution de l'exercice 5.4. Appliquons le filtre à $P(x) = (1+x)^n$, $m = 4$, $\omega = i$, $r = 1$:

$$\sum_{k \equiv 1\,(4)} \binom{n}{k} = \frac{1}{4}\left[2^n + (-i)(1+i)^n + (-1)\cdot 0^n + i(1-i)^n\right].$$

Comme $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ et $1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$,

$$(-i)(1+i)^n + i(1-i)^n = 2^{n/2}(-i)\left(e^{in\pi/4} - e^{-in\pi/4}\right) = 2^{n/2} \cdot 2\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Donc, pour $n \geq 1$,

$$\sum_{k \equiv 1\,(4)} \binom{n}{k} = \frac{2^n + 2^{\frac{n}{2}+1}\sin(n\pi/4)}{4}.$$

Solution de l'exercice 5.5. Les séries génératrices sont $\prod_{k \text{ impair}} \frac{1}{1-x^k}$ et $\prod_{k \geq 1}\left(1 + x^k\right)$. Or $1 + x^k = \frac{1-x^{2k}}{1-x^k}$, donc

$$\prod_{k \geq 1}\left(1+x^k\right) = \prod_{k \geq 1} \frac{1-x^{2k}}{1-x^k} = \frac{\prod_{k \text{ pair}}\left(1-x^k\right)}{\prod_{k \geq 1}\left(1-x^k\right)} = \prod_{k \text{ impair}} \frac{1}{1-x^k}.$$

Les deux séries coïncident, donc $p_n = q_n$ pour tout n.

Solution de l'exercice 5.6. Ce sont les chemins de n pas ± 1 restant ≥ 0. Comptons-les par le principe de réflexion : le nombre de chemins de n pas partant de 0 et restant ≥ 0 vaut $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. En effet, notons N_h le nombre de tels chemins d'arrivée h ; par réflexion par rapport à la droite $y = -1$,

$$N_h = \binom{n}{\frac{n+h}{2}} - \binom{n}{\frac{n+h}{2}+1},$$

somme télescopique dont le total sur h vaut $\binom{n}{\lceil n/2 \rceil} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Solution de l'exercice 5.7. Un mot dont tous les blocs de 1 sont de longueur paire s'écrit de manière unique comme concaténation de briques « 0 » (longueur 1) et « 11 » (longueur 2). En effet, il suffit de découper chaque bloc maximal de 1, de longueur paire, en paires. Par le dictionnaire des suites,

$$A(x) = \frac{1}{1-(x+x^2)} = \frac{1}{1-x-x^2},$$

donc $a_n = F_{n+1}$ avec $F_1 = F_2 = 1$. Vérification : $a_1 = 1$ (le mot 0), $a_2 = 2$ (00 et 11), $a_3 = 3$ (000, 011, 110), $a_4 = 5$.

PARTIE II — Les grands principes

CHAPITRE 6

6 Le principe des tiroirs

Objectifs du chapitre. Maîtriser les trois formes du principe (simple, généralisée, valeur moyenne) ; savoir fabriquer les tiroirs, ce qui est la seule vraie difficulté ; connaître les applications classiques : restes, sommes partielles, géométrie du réseau, Erdős–Szekeres, approximation de Dirichlet.

6.1 Les trois énoncés

Théorème 6.1.1 (Principe des tiroirs)

Si l'on range $n+1$ objets dans n tiroirs, alors un tiroir au moins contient au moins deux objets. Formulation équivalente : si E et F sont finis avec $|E| > |F|$, aucune application de E dans F n'est injective.

Démonstration. Si chaque tiroir contenait au plus un objet, le total serait au plus n, contradiction. ■

Théorème 6.1.2 (Principe des tiroirs généralisé)

Si l'on range n objets dans k tiroirs, un tiroir au moins contient au moins $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ objets, et un tiroir au moins en contient au plus $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.

Démonstration. Notons $n_1, \dots, n_k$ les nombres d'objets des tiroirs, de somme n. Si l'on avait $n_i \leq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1$ pour tout i, alors $n_i < \frac{n}{k}$ (car $\lceil y \rceil - 1 < y$) et $n = \sum n_i < n$: absurde. De même, si $n_i \geq \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1 > \frac{n}{k}$ pour tout i, alors $n > n$. (C'est un cas particulier du théorème suivant appliqué aux n_i, de moyenne $\frac{n}{k}$, combiné au fait que les n_i sont entiers.) ■

Théorème 6.1.3 (Principe de la valeur moyenne)

Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels de moyenne μ. Alors il existe i tel que $x_i \geq \mu$ et j tel que $x_j \leq \mu$.

Démonstration. Si l'on avait $x_i < \mu$ pour tout i, on aurait $\sum_i x_i < n\mu = \sum_i x_i$. De même pour l'autre inégalité. ■

À retenir (La seule question qui compte)

Qui sont les chaussettes ? Qui sont les tiroirs ? Le principe lui-même est trivial ; toute la difficulté d'un problème réside dans la construction de la partition. Les tiroirs les plus fréquents sont :

- les restes modulo un entier bien choisi ;
- les parités des coordonnées, ou plus généralement les classes dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^d$;
- un découpage géométrique de la figure en morceaux de petit diamètre ;
- les valeurs possibles d'une quantité (degré, somme, couleur…) ;
- les intervalles $[a_i, a_i + d]$ dans un problème de sommes partielles.

Notez bien : le principe démontre une existence, jamais une construction.

6.2 Applications classiques

Exemple 6.2.1 (Sommes partielles). *Soient $a_1, \ldots, a_n$ des entiers quelconques. Montrer qu'il existe des indices $i \leq j$ tels que $n \mid a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j$.*

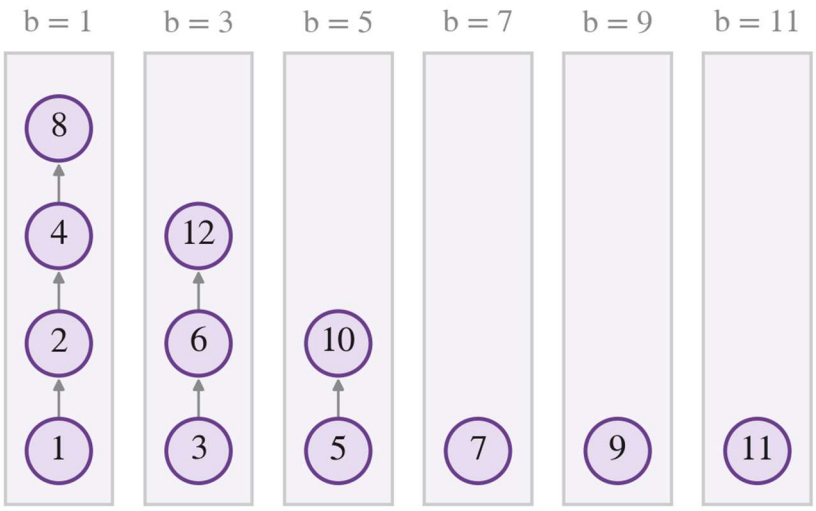
Solution. Posons $s_0 = 0$ et $s_k = a_1 + \cdots + a_k$ pour $1 \leq k \leq n$: cela fait $n+1$ nombres. Leurs restes modulo n ne peuvent être deux à deux distincts (il n'y a que n restes possibles) : il existe $i - 1 < j$ avec $s_{i-1} \equiv s_j \pmod{n}$, d'où $n \mid s_j - s_{i-1} = a_i + \cdots + a_j$.

Exemple 6.2.2 (Répétitions de chiffres). *Montrer que tout entier $n \geq 1$ possède un multiple non nul dont l'écriture décimale ne comporte que des chiffres 0 et 1.*

Solution. Considérons les $n+1$ nombres $1, 11, 111, \ldots, \underbrace{1\cdots1}_{n+1}$. Deux d'entre eux ont le même reste modulo n ; leur différence, de la forme $\underbrace{1\cdots1}_{k}\underbrace{0\cdots0}_{m}$, est un multiple non nul de n n'utilisant que les chiffres 0 et 1.

Exemple 6.2.3 (Divisibilité dans ⟦1, 2n⟧). *On choisit $n+1$ entiers dans $[\![1, 2n]\!]$. Montrer que l'un divise l'autre.*

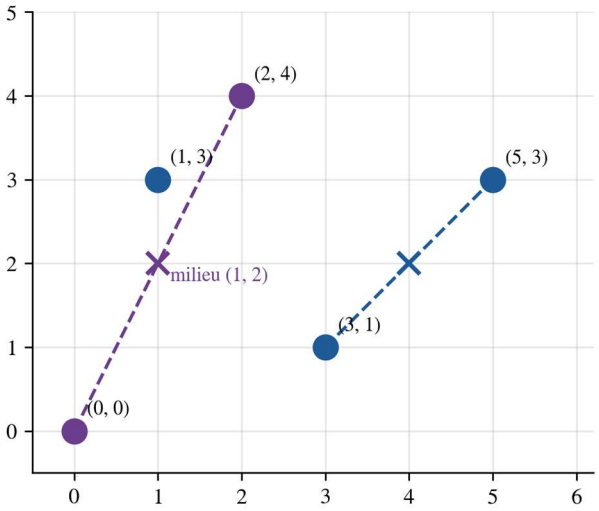
Solution. Tout entier a s'écrit de façon unique $a = 2^\alpha b$ avec b impair. Les valeurs possibles de b dans $[\![1, 2n]\!]$ sont $1, 3, \ldots, 2n-1$: n tiroirs. Parmi $n+1$ entiers, deux ont la même partie impaire b : $a = 2^\alpha b$ et $a' = 2^{\alpha'} b$, et le plus petit divise le plus grand.



Les tiroirs de l'exemple pour n = 6 : les entiers de ⟦1, 12⟧ regroupés selon leur partie impaire ; dans chaque tiroir, chaque entier divise le suivant. Avec 7 entiers et 6 tiroirs, deux entiers sont dans le même tiroir.

Exemple 6.2.4 (Points du réseau). *On choisit cinq points à coordonnées entières dans le plan. Montrer que le milieu de deux d'entre eux est encore à coordonnées entières.*

Solution. Classons les points selon $(x \bmod 2,\ y \bmod 2)$: quatre tiroirs, cinq points. Deux points ont mêmes parités ; leur milieu est à coordonnées entières.



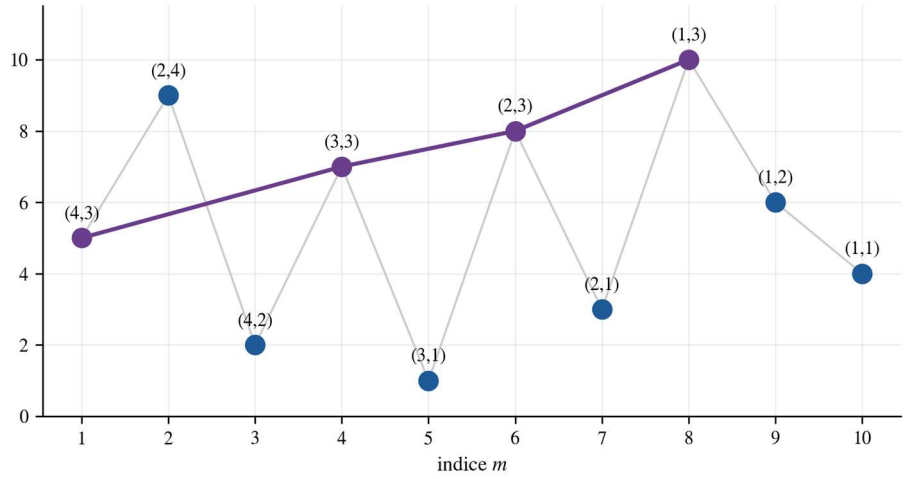
Cinq points du réseau colorés selon la parité de leurs coordonnées (4 couleurs) : deux points de même couleur ont un milieu à coordonnées entières.

Exemple 6.2.5 (Théorème d'approximation de Dirichlet). *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $N \geq 1$. Montrer qu'il existe des entiers p, q avec $1 \leq q \leq N$ et $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN}$.*

Solution. Considérons les $N+1$ nombres $\{0 \cdot \alpha\}, \{\alpha\}, \ldots, \{N\alpha\}$ où $\{\cdot\}$ désigne la partie fractionnaire ; ils appartiennent à $[0,1[$, que l'on découpe en N intervalles $\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right[$. Deux de ces nombres, disons $\{i\alpha\}$ et $\{j\alpha\}$ avec $i < j$, tombent dans le même intervalle, donc $|\{j\alpha\} - \{i\alpha\}| < \frac{1}{N}$. En posant $q = j - i \in [\![1, N]\!]$ et $p = \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$, on obtient $|q\alpha - p| < \frac{1}{N}$, d'où le résultat.

Exemple 6.2.6 (Théorème d'Erdős–Szekeres). *Toute suite de $pq+1$ réels deux à deux distincts contient une sous-suite croissante de longueur $p+1$ ou une sous-suite décroissante de longueur $q+1$.*

Solution. À chaque indice m, associons le couple (c_m, d_m) où c_m (resp. d_m) est la longueur maximale d'une sous-suite croissante (resp. décroissante) commençant en m. Si $m < m'$ et $a_m < a_{m'}$, en plaçant a_m devant une sous-suite croissante de longueur $c_{m'}$ commençant en m', on obtient une sous-suite croissante de longueur $c_{m'} + 1$ commençant en m, donc $c_m > c_{m'}$; de même, $a_m > a_{m'}$ entraîne $d_m > d_{m'}$: dans les deux cas $(c_m, d_m) \neq (c_{m'}, d_{m'})$. Les $pq+1$ couples sont donc deux à deux distincts. S'il n'existait ni croissante de longueur $p+1$ ni décroissante de longueur $q+1$, ces couples appartiendraient tous à $[\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!]$, qui n'a que pq éléments : contradiction.



Erdős–Szekeres pour p = q = 3 : chaque terme d'une suite de 10 réels distincts reçoit l'étiquette (c_m, d_m) ; les étiquettes sont distinctes, donc l'une dépasse 3. Ici la sous-suite croissante en couleur est de longueur 4.

Remarque (La borne est optimale).

Pour pq termes, la suite formée de p blocs décroissants de longueur q, rangés en ordre croissant de bloc en bloc, ne contient ni croissante de longueur $p+1$ (une sous-suite croissante prend au plus un terme par bloc), ni décroissante de longueur $q+1$ (une sous-suite décroissante reste dans un seul bloc). Vérifier l'optimalité d'une borne fait partie de la solution : c'est souvent la moitié des points.

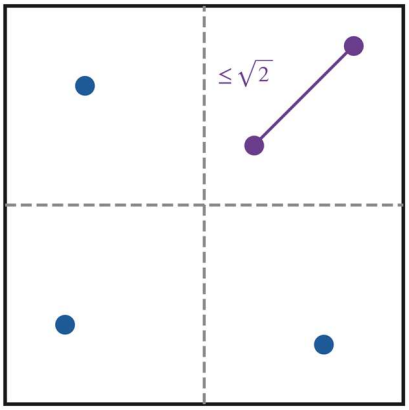
6.3 Le principe de la valeur moyenne

Exemple 6.3.1 (Cinq nombres consécutifs sur un cercle). *Les entiers $1,2,\dots,15$ sont placés arbitrairement sur un cercle. Montrer qu'il existe cinq nombres consécutifs de somme au moins 40.*

Solution. Il y a 15 blocs de cinq nombres consécutifs, et chaque entier appartient à exactement 5 de ces blocs. La somme de toutes les sommes vaut donc $5\cdot(1+\cdots+15)=5\cdot 120=600$, et la moyenne des 15 sommes est $600/15=40$. Par le principe de la valeur moyenne, l'une d'elles est ≥ 40.

Exemple 6.3.2 (Tiroirs et géométrie). *Montrer que parmi 5 points quelconques d'un carré de côté 2, deux sont à distance $\leq \sqrt{2}$.*

Solution. Découpons le carré en quatre carrés de côté 1. Deux points au moins sont dans le même petit carré (tiroirs), et le diamètre d'un carré de côté 1 vaut $\sqrt{2}$.



Cinq points dans un carré de côté 2 découpé en quatre carrés de côté 1 : deux points sont dans le même petit carré, donc à distance au plus √2.

6.4 Le principe des tiroirs infini

Théorème 6.4.1 (Principe des tiroirs infini)

Si un ensemble infini est réparti en un nombre fini de classes, l'une au moins des classes est infinie.

Démonstration. Si les k classes étaient toutes finies, de cardinaux $n_1, \dots, n_k$, leur réunion serait finie de cardinal au plus $n_1 + \cdots + n_k$ (principe additif) : elle ne pourrait être l'ensemble infini de départ. ■

Exemple 6.4.2 (Un résultat de type Ramsey). *On colorie chaque arête du graphe complet sur $\mathbb{N}$ en rouge ou bleu. Montrer qu'il existe un ensemble infini de sommets dont toutes les arêtes ont la même couleur.*

Solution. Construisons une suite $v_0, v_1, \dots$ et des ensembles infinis $\mathbb{N} = S_{-1} \supseteq S_0 \supseteq S_1 \supseteq \cdots$: pour $k \geq 0$, choisissons $v_k \in S_{k-1}$, puis, par le principe des tiroirs infini, une couleur c_k telle que $S_k = \{u \in S_{k-1} \setminus \{v_k\} : \text{l'arête } v_k u \text{ est de couleur } c_k\}$ soit infini. L'une des deux couleurs apparaît infiniment souvent parmi les c_k ; les v_k correspondants forment un ensemble infini monochromatique (si $i < j$, alors $v_j \in S_i$, donc l'arête $v_i v_j$ est de couleur c_i).

6.5 Exercices

Exercice 6.1 ★. Montrer que parmi $n+1$ entiers choisis dans $[\![1, 2n]\!]$, deux sont premiers entre eux.

Exercice 6.2 ★. Dans une salle de $n \geq 2$ personnes, montrer que deux d'entre elles connaissent le même nombre de personnes présentes (la relation « connaître » étant symétrique).

Exercice 6.3 ★★. Un joueur d'échecs dispose de 77 jours pour préparer un tournoi. Il joue au moins une partie par jour et au plus 132 parties au total. Montrer qu'il existe une suite de jours consécutifs durant lesquels il a joué exactement 21 parties.

Exercice 6.4 ★★. On choisit 800 points à l'intérieur d'un cube d'arête 10. Montrer que deux d'entre eux sont à distance < 2.

Exercice 6.5 ★★. Montrer que dans tout ensemble de n entiers, il existe un sous-ensemble non vide dont la somme est divisible par n.

Exercice 6.6 ★★★ (OIM 1972, problème 1). Soit A un ensemble de 10 entiers à deux chiffres. Montrer qu'il existe deux sous-ensembles disjoints non vides de A ayant la même somme.

Exercice 6.7 ★★★. On place 51 points à l'intérieur d'un carré de côté 1. Montrer qu'il existe un disque de rayon $\frac{1}{7}$ contenant au moins trois de ces points.

Exercice 6.8 ★★★. Montrer que parmi sept réels quelconques $x_1, \ldots, x_7$, il en existe deux, x et y, tels que $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 6.9 ★★★★ (OIM 1978, problème 6). Une société internationale compte des membres dans six pays. La liste des membres contient 1978 noms, numérotés de 1 à 1978. Montrer qu'il existe au moins un membre dont le numéro est la somme des numéros de deux membres de son pays (ou le double du numéro d'un membre de son pays).

6.6 Corrigés

Solution de l'exercice 6.1. Les n paires $\{1,2\}, \{3,4\}, \ldots, \{2n-1, 2n\}$ forment n tiroirs. Parmi $n+1$ entiers, deux appartiennent à la même paire : ce sont deux entiers consécutifs, donc premiers entre eux.

Solution de l'exercice 6.2. Le nombre de connaissances d'une personne appartient à $[\![0, n-1]\!]$, soit n valeurs pour n personnes. Mais les valeurs 0 et $n-1$ ne peuvent coexister (si quelqu'un connaît tout le monde, personne ne connaît zéro personne). Il ne reste donc que $n-1$ valeurs possibles pour n personnes : deux personnes ont le même nombre de connaissances.

Solution de l'exercice 6.3. Soit a_i le nombre total de parties jouées jusqu'au jour i inclus. Alors $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{77} \leq 132$, donc $22 \leq a_1 + 21 < \cdots < a_{77} + 21 \leq 153$. Les 154 nombres $a_1, \ldots, a_{77}, a_1 + 21, \ldots, a_{77} + 21$ appartiennent à $[\![1,153]\!]$: deux sont égaux. Comme les a_i sont distincts entre eux (ainsi que les $a_i + 21$), il existe i, j avec $a_i = a_j + 21$, et le joueur a joué exactement 21 parties du jour $j+1$ au jour i.

Solution de l'exercice 6.4. Découpons le cube en $9^3 = 729$ petits cubes d'arête $10/9$. Comme $800 > 729$, deux points sont dans le même petit cube, dont la diagonale vaut $\frac{10\sqrt{3}}{9} \approx 1{,}925 < 2$.

Solution de l'exercice 6.5. Voir l'exemple des sommes partielles (exemple 6.2.1) : avec $s_0 = 0, \ldots, s_n$, deux sommes ont même reste modulo n, et leur différence est la somme d'un sous-ensemble (de termes consécutifs) non vide.

Solution de l'exercice 6.6. A possède $2^{10} - 1 = 1023$ sous-ensembles non vides. La somme d'un tel sous-ensemble est comprise entre 10 et $90 + 91 + \cdots + 99 = 945$, soit au plus 936 valeurs distinctes. Comme $1023 > 936$, deux sous-ensembles $B \neq C$ ont même somme. Ils ne sont pas nécessairement disjoints, mais $B \setminus C$ et $C \setminus B$ le sont, ont la même somme, et sont non vides : si l'un était vide, l'un des ensembles B, C serait contenu dans l'autre ; ayant même somme et des éléments strictement positifs, ils seraient égaux.

Solution de l'exercice 6.7. Découpons le carré en 25 carrés de côté $\frac{1}{5}$. Comme $51 > 2 \cdot 25$, l'un d'eux contient au moins trois points (forme généralisée : $\lceil 51/25 \rceil = 3$). Or un carré de côté $\frac{1}{5}$ est

contenu dans son cercle circonscrit, de rayon $\frac{\sqrt{2}}{10} \approx 0{,}1414$. Comme $\frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7} \approx 0{,}1429$, le disque de même centre et de rayon $\frac{1}{7}$ contient les trois points.

Solution de l'exercice 6.8. Écrivons $x_i = \tan\theta_i$ avec $\theta_i \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ce qui est possible car $\tan$ est une bijection de cet intervalle sur $\mathbb{R}$. L'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, de longueur π, se découpe en six intervalles de longueur $\frac{\pi}{6}$. Parmi les sept angles, deux au moins, disons $\theta_i \geq \theta_j$, tombent dans le même intervalle : $0 \leq \theta_i - \theta_j \leq \frac{\pi}{6}$. En posant $x = x_i$ et $y = x_j$, la formule d'addition donne

$$\frac{x-y}{1+xy} = \tan(\theta_i - \theta_j) \in \left[0, \tan\frac{\pi}{6}\right] = \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

Solution de l'exercice 6.9. Par le principe des tiroirs, un pays, disons A, contient au moins $\lceil 1978/6 \rceil = 330$ membres. Soit $a_1 < a_2 < \cdots < a_{330}$ leurs numéros. Considérons les 329 différences $d_i = a_i - a_1$ pour $i \geq 2$. Si l'une de ces différences est le numéro d'un membre du même pays, on a gagné : $a_i = a_1 + d_i$. Sinon, aucun des d_i n'appartient à ce pays ; ils appartiennent donc aux cinq autres, et l'un d'eux, disons le pays B, en contient au moins $\lceil 329/5 \rceil = 66$. Soient $b_1 < \cdots < b_{66}$ de tels numéros. On recommence : chaque différence $b_j - b_1$ est à la fois une différence de deux numéros de B et une différence de deux numéros de A (car $b_j - b_1 = (b_j + a_1) - (b_1 + a_1)$ avec $b_j + a_1$ et $b_1 + a_1$ dans A) ; si elle est le numéro d'un membre de A ou de B, c'est fini. Sinon les 65 différences appartiennent aux quatre pays restants, dont l'un contient $\lceil 65/4 \rceil = 17$ d'entre elles ; puis $\lceil 16/3 \rceil = 6$, puis $\lceil 5/2 \rceil = 3$, puis $\lceil 2/1 \rceil = 2$: au dernier étage, deux nombres appartiennent au même (dernier) pays, et leur différence, qui ne peut appartenir à aucun des cinq pays précédents, appartient nécessairement à ce sixième pays : elle fournit la relation cherchée.

CHAPITRE 7

7 Double comptage et principe de Fubini

Objectifs du chapitre. Savoir compter un même ensemble de deux façons ; reconnaître les incidences cachées dans un énoncé ; utiliser le lemme des poignées de main ; passer d'une égalité à une inégalité par estimation d'un des deux comptages.

7.1 Le principe

Théorème 7.1.1 (Principe de Fubini, ou double comptage)

Soient A et B deux ensembles finis et $R \subseteq A \times B$ une relation. Alors

$$|R| = \sum_{a \in A} |\{b \in B : (a,b) \in R\}| = \sum_{b \in B} |\{a \in A : (a,b) \in R\}|.$$

Démonstration. R est la réunion disjointe des ensembles $R_a = \{(a,b) \in R\}$, $a \in A$, et R_a est en bijection avec $\{b \in B : (a,b) \in R\}$ par $(a,b) \mapsto b$. Le principe additif donne la première égalité ; la seconde s'obtient de même en découpant R selon la seconde coordonnée. ■

Autrement dit : dans un tableau de 0 et de 1, la somme des sommes de lignes est égale à la somme des sommes de colonnes.

1	1	0	1	1	4
0	1	0	1	0	2
1	0	1	0	1	3
0	1	1	1	0	3
2	3	2	3	2	12

Double comptage dans un tableau d'incidence : les sommes des lignes (4 + 2 + 3 + 3 = 12) et celles des colonnes (2 + 3 + 2 + 3 + 2 = 12) comptent les mêmes 1.

Méthode 7.1.2 — Le mode d'emploi

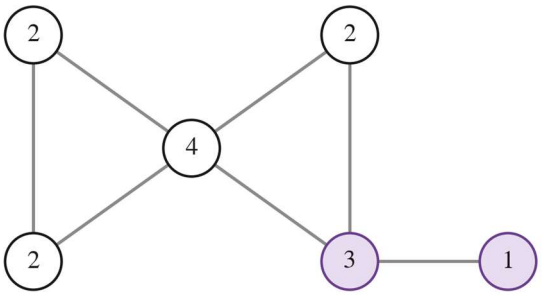
1. Trouver le bon ensemble à compter. Le plus souvent un ensemble de couples : (point, droite), (élève, problème résolu), (sommet, arête incidente), (élément, partie le contenant), (case, pièce la recouvrant).
2. Compter ligne par ligne : on fixe le premier objet.
3. Compter colonne par colonne : on fixe le second.

4. Comparer. Si l'un des deux comptages ne se calcule pas exactement, le majorer ou le minorer donne une inégalité, souvent le cœur du problème.

Lemme 7.1.3 (Lemme des poignées de main)

Dans tout graphe $G = (V, E)$, $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$. En particulier, le nombre de sommets de degré impair est pair.

Démonstration. Comptons les couples (v, e) où v est une extrémité de l'arête e. En sommant sur v on obtient $\sum_v \deg(v)$; en sommant sur e, chaque arête a exactement deux extrémités, d'où $2|E|$. La seconde assertion en découle : la somme des degrés étant paire, elle contient un nombre pair de termes impairs. ■



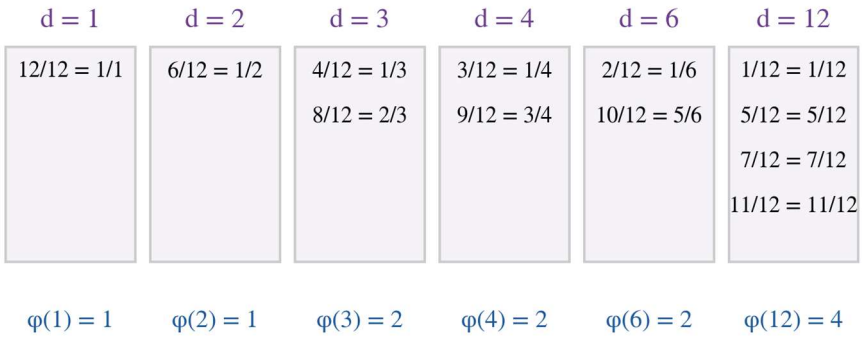
Lemme des poignées de main : dans ce graphe à 7 arêtes, la somme des degrés vaut 14 ; les sommets de degré impair (en couleur) sont en nombre pair.

Exemple 7.1.4 (Une identité arithmétique). *Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum_{d=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$, où $\tau(k)$ est le nombre de diviseurs positifs de k.*

Solution. Comptons les couples (d, k) avec $1 \le k \le n$ et $d \mid k$. À k fixé, il y a $\tau(k)$ valeurs de d. À d fixé, les multiples de d dans $[\![1, n]\!]$ sont au nombre de $\lfloor n/d \rfloor$.

Exemple 7.1.5 (Somme de l'indicatrice d'Euler sur les diviseurs). *Montrer que $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$.*

Solution. Comptons les fractions $\frac{a}{n}$ avec $1 \le a \le n$: il y en a n. Chacune s'écrit de façon unique sous forme irréductible $\frac{p}{d}$ (avec $g = \operatorname{pgcd}(a, n)$, $p = a/g$, $d = n/g$), où $d \mid n$, $\operatorname{pgcd}(p, d) = 1$ et $1 \le p \le d$. Réciproquement, tout couple (p, d) de ce type provient de la fraction $\frac{p\,(n/d)}{n}$. Pour un diviseur d fixé, il y a donc $\varphi(d)$ telles fractions. D'où $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$.



Les 12 fractions a/12 (1 ≤ a ≤ 12) mises sous forme irréductible et groupées par dénominateur d : φ(1) + φ(2) + φ(3) + φ(4) + φ(6) + φ(12) = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12.

Exemple 7.1.6 (Points fixes en moyenne). *Soit $p_n(k)$ le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement k points fixes. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k\ p_n(k) = n!$.*

Solution. Comptons les couples (σ, i) où σ est une permutation et i un point fixe de σ. En sommant sur σ : $\sum_k k\ p_n(k)$. En sommant sur i : pour chaque i, les permutations fixant i sont au nombre de $(n-1)!$, d'où $n \cdot (n-1)! = n!$.

> **Remarque.**
> Lecture probabiliste : une permutation aléatoire a en moyenne exactement un point fixe, et ce, quel que soit n.

7.2 Du comptage à l'inégalité

C'est l'usage le plus puissant du double comptage en olympiade.

Exemple 7.2.1 (Théorème de l'amitié). *Dans un groupe de $n \geq 1$ personnes, deux personnes quelconques ont exactement un ami commun. Montrer qu'il existe une personne amie avec toutes les autres.*

Solution (Erdős, Rényi, Sós). Modélisons par un graphe G : deux sommets distincts ont exactement un voisin commun. On suppose par l'absurde qu'aucun sommet n'est adjacent à tous les autres.

Étape 1 (double comptage). Comptons les triplets (a, b, c) avec b voisin de a et de c, $a \neq c$. En sommant sur b : $\sum_b \deg(b)(\deg(b)-1)$. En sommant sur les couples (a, c) : chaque paire $\{a, c\}$ a exactement un ami commun et donne deux couples, d'où $n(n-1)$. Ainsi $\sum_b \deg(b)(\deg(b)-1) = n(n-1)$. Retenons surtout que G ne contient pas de cycle de longueur 4 (deux sommets n'ont jamais deux voisins communs).

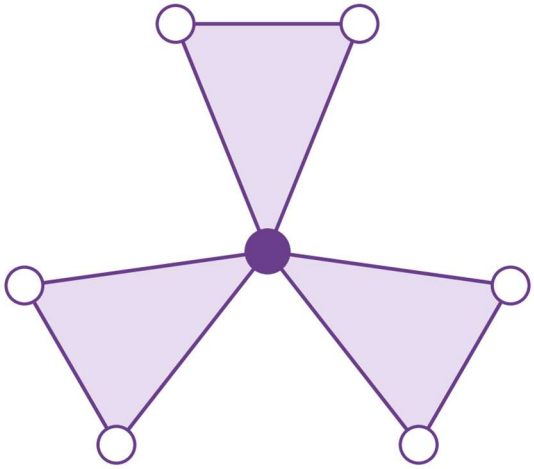
Étape 2 : deux sommets non adjacents ont le même degré. Soient u, v non adjacents. Pour $x \in N(u)$, notons $f(x)$ l'unique voisin commun de x et v ; il est dans $N(v)$. Si $f(x) = f(x') = y$ avec $x \neq x'$, alors u et y (distincts, car y est voisin de v et u ne l'est pas) auraient deux voisins communs x, x' : impossible. Donc f est injective et $\deg u \leq \deg v$; par symétrie, $\deg u = \deg v$.

Étape 3 : G est régulier. Supposons $\deg u \neq \deg v$. Par l'étape 2, u et v sont adjacents ; soit w leur voisin commun. Quitte à échanger u et v, on peut supposer $\deg w \neq \deg u$ (si $\deg w = \deg u$, alors $\deg w \neq \deg v$). Soit $z \notin \{u, v, w\}$. Par l'étape 2, z est adjacent à u ou à v (sinon $\deg u = \deg z = \deg v$), et de même à u ou à w. Il ne peut être adjacent à la fois à v et à w (sinon v, w auraient deux voisins

communs u et z) ; il est donc adjacent à u. Ainsi u est adjacent à tous les autres sommets : contradiction. Tous les degrés sont donc égaux à un même k.

Étape 4 : $n = k^2 - k + 1$. Fixons u. Les chemins $u - x - z$ avec $x \in N(u)$ et $z \neq u$ sont au nombre de $k(k-1)$. Chaque sommet $z \neq u$ est atteint par exactement un tel chemin (x est l'unique voisin commun de u et z). Donc $n - 1 = k(k-1)$.

Étape 5 : conclusion par l'algèbre linéaire. Soit A la matrice d'adjacence ($A_{ij} = 1$ si i, j sont voisins, 0 sinon) et J la matrice dont tous les coefficients valent 1. Le coefficient (i, j) de A^2 compte les voisins communs de i et j, donc $A^2 = (k-1)I + J$. Le vecteur $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ vérifie $A\mathbf{1} = k\mathbf{1}$; comme A est symétrique réelle, elle se diagonalise dans une base orthonormée contenant $\mathbf{1}/\sqrt{n}$, et sur l'orthogonal de $\mathbf{1}$ on a $J = 0$, donc $A^2 = (k-1)I$: les $n-1$ autres valeurs propres valent $\pm\sqrt{k-1}$, disons r fois $+$ et s fois $-$. La trace de A est nulle : $k + (r-s)\sqrt{k-1} = 0$. Si $k = 1$, alors $n = 1$ et le résultat est évident. Sinon $r \neq s$ et $\sqrt{k-1} = \frac{k}{s-r}$ est rationnel, donc entier : $k - 1 = h^2$ avec $h \geq 1$, et h divise $k = h^2 + 1$, donc $h = 1$, $k = 2$, $n = 3$. Le graphe est alors un triangle, dont chaque sommet est adjacent aux deux autres : contradiction.



Un graphe « moulin à vent » (des triangles partageant un sommet) : deux sommets quelconques y ont exactement un voisin commun, et le sommet central est ami de tous.

Exemple 7.2.2 (Un problème d'incidences). *Dans un club, chaque membre appartient à exactement trois comités et chaque comité compte exactement trois membres. Deux comités distincts ont au plus un membre commun. Montrer que le nombre de membres est égal au nombre de comités.*

Solution. Comptons les couples (membre, comité auquel il appartient). Si m est le nombre de membres et c celui de comités : $3m = 3c$, donc $m = c$.

Exemple 7.2.3 (Ensembles et intersections). *Soient $A_1, \ldots, A_m$ des parties d'un ensemble E à n éléments, chacune de cardinal k. Montrer que si $m > \frac{n}{k}$, alors deux d'entre elles se rencontrent.*

Solution. Comptons les couples (x, i) avec $x \in A_i$: ce nombre vaut mk. Si les A_i étaient deux à deux disjointes, chaque x appartiendrait à au plus une partie, donc $mk \leq n$, c'est-à-dire $m \leq n/k$. Par contraposée, si $m > n/k$, deux parties se rencontrent.

Théorème 7.2.4 (Théorème de Mantel)

Soit G un graphe simple à n sommets ne contenant aucun triangle. Alors $|E(G)| \leq \frac{n^2}{4}$.

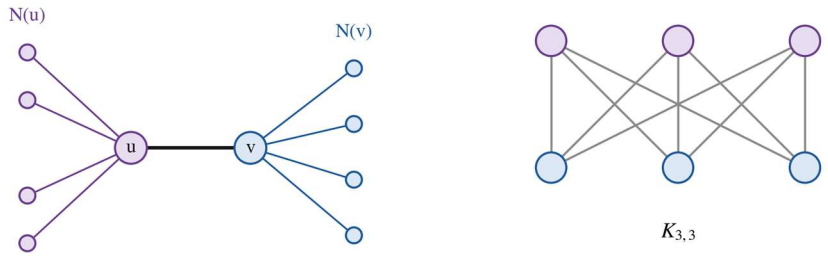
Démonstration. Soit uv une arête. Comme G est sans triangle, u et v n'ont aucun voisin commun : les ensembles $N(u)$ et $N(v)$ sont disjoints, et $|N(u) \cup N(v)| \leq n$, donc $\deg(u) + \deg(v) \leq n$. En sommant cette inégalité sur toutes les arêtes :

$$\sum_{uv \in E} \big(\deg(u) + \deg(v)\big) \leq n|E|.$$

Or le membre de gauche compte, pour chaque sommet v, une contribution $\deg(v)$ une fois par arête incidente : c'est donc $\sum_v \deg(v)^2$. Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\sum_v \deg(v)^2 \geq \frac{\left(\sum_v \deg(v)\right)^2}{n} = \frac{(2|E|)^2}{n} = \frac{4|E|^2}{n}.$$

En combinant les deux inégalités : $\frac{4|E|^2}{n} \leq n|E|$, d'où $|E| \leq \frac{n^2}{4}$ (le cas $|E| = 0$ étant trivial). Cette borne est optimale : le graphe biparti complet $K_{n/2,n/2}$ (pour n pair) est sans triangle et possède exactement $n^2/4$ arêtes. ■



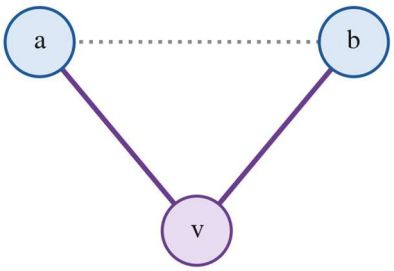
À gauche, dans un graphe sans triangle, les voisinages N(u) et N(v) des extrémités d'une arête sont disjoints. À droite, le graphe biparti complet $K_{3,3}$: 6 sommets, 9 = 6²/4 arêtes, aucun triangle.

Exemple 7.2.5 (Le lemme des graphes sans cycle de longueur 4). *Soit G un graphe à n sommets ne contenant aucun cycle de longueur 4. Montrer que* $|E| \leq \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{4n-3}\right) \cdot \frac{n}{2}$.

Solution. Comptons les « cerises », c'est-à-dire les couples $(v, \{a, b\})$ où a, b sont deux voisins distincts de v. En sommant sur v : $\sum_v \binom{\deg v}{2}$. L'absence de C_4 signifie que deux sommets ont au plus un voisin commun, donc chaque paire $\{a, b\}$ est comptée au plus une fois : $\sum_v \binom{\deg v}{2} \leq \binom{n}{2}$. Par convexité (inégalité de Jensen), en notant $d = \frac{2|E|}{n}$ le degré moyen,

$$n\binom{d}{2} \leq \sum_v \binom{\deg v}{2} \leq \binom{n}{2},$$

ce qui donne $d(d-1) \leq n-1$, d'où $d \leq \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$ et la majoration annoncée pour $|E| = \frac{nd}{2}$.



Une « cerise » (v, {a, b}) : v est adjacent à a et à b. Sans cycle de longueur 4, deux sommets a, b ont au plus un voisin commun, donc chaque paire {a, b} porte au plus une cerise.

À retenir (Le réflexe « convexité »)

Après un double comptage produisant $\sum_v f(\deg v)$ avec f convexe, l'inégalité de Jensen $\sum_v f(\deg v) \geq n f(\bar{d})$ transforme l'information globale $\sum_v \deg v = 2|E|$ en une borne sur $|E|$. Ce couple double comptage + convexité résout une grande partie des problèmes de combinatoire extrémale.

7.3 Exercices

Exercice 7.1 ★. Dans un tournoi à n joueurs où chaque joueur rencontre chaque autre exactement une fois (sans match nul), montrer que la somme des nombres de victoires est égale à $\binom{n}{2}$.

Exercice 7.2 ★. Soient $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n = m$ des entiers ≥ 1, et soit b_k le nombre d'indices i tels que $a_i \geq k$. Montrer que $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_m$.

Exercice 7.3 ★★. Dans une grille $m \times n$ dont chaque case est coloriée en noir ou blanc, on note l_i le nombre de cases noires de la ligne i et c_j celui de la colonne j. Montrer que $\sum_i \binom{l_i}{2}$ et $\sum_j \binom{c_j}{2}$ comptent respectivement les paires de cases noires d'une même ligne et d'une même colonne, et en déduire un critère d'existence d'un rectangle monochrome.

Exercice 7.4 ★★. Un ensemble de n points du plan, non tous alignés, détermine au moins n droites (théorème de de Bruijn–Erdős).

Exercice 7.5 ★★★. Soit G un graphe simple à n sommets ne contenant aucun triangle. Montrer, par double comptage, que le nombre de chemins de longueur 2 (triplets (a, b, c) avec b adjacent à a et à c, $a \neq c$) est au moins $\frac{2|E|(2|E|-n)}{n}$.

Exercice 7.6 ★★★. Soit G un graphe à n sommets et m arêtes. Montrer que le nombre de triangles de G est au moins $\frac{m(4m-n^2)}{3n}$.

Exercice 7.7 ★★★★ (OIM 1998, problème 2). Dans une compétition, a candidats sont notés par b juges, où $b \geq 3$ est un entier impair, chaque juge attribuant à chaque candidat la mention « admis » ou « refusé ». On suppose que deux juges quelconques s'accordent sur au plus k candidats. Montrer que $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

7.4 Corrigés

Solution de l'exercice 7.1. Chaque partie produit exactement une victoire ; il y a $\binom{n}{2}$ parties.

Solution de l'exercice 7.2. Comptons les couples (i,k) avec $1 \le k \le a_i$. À i fixé il y a a_i valeurs de k ; à k fixé il y a b_k valeurs de i. (C'est le « comptage par tranches horizontales » d'un diagramme de Young.)

Solution de l'exercice 7.3. Comptons les paires de cases noires situées dans une même ligne : il y en a $\sum_i \binom{l_i}{2}$ (de même, $\sum_j \binom{c_j}{2}$ pour les colonnes). Chacune de ces paires détermine une paire de colonnes. S'il n'y a aucun rectangle monochrome noir, deux paires de cases noires situées sur deux lignes différentes ne peuvent pas déterminer la même paire de colonnes, donc $\sum_i \binom{l_i}{2} \le \binom{n}{2}$. Par convexité, $\sum_i \binom{l_i}{2} \ge m\binom{N/m}{2}$ où N est le nombre total de cases noires ; si donc $m\binom{N/m}{2} > \binom{n}{2}$, un rectangle monochrome existe nécessairement. Par exemple, dans une grille $n \times n$ dont plus de la moitié des cases sont noires, un rectangle monochrome apparaît dès que $n \ge 6$.

Solution de l'exercice 7.4. Raisonnons par récurrence forte sur n, le nombre de points (non tous alignés). Par le théorème de Sylvester–Gallai, il existe une droite ordinaire ℓ, c'est-à-dire une droite déterminée par exactement deux des points, disons P et Q.

Retirons P : il reste $n-1$ points.

Cas 1 : les $n-1$ points restants ne sont pas tous alignés. Par hypothèse de récurrence, ils déterminent au moins $n-1$ droites. En réintroduisant P, chaque droite déterminée par les $n-1$ points reste déterminée, et la droite $\ell = (PQ)$ s'ajoute comme droite supplémentaire : en effet ℓ ne contient aucun autre point que P et Q (par définition d'une droite ordinaire), donc, privée de P, elle ne contiendrait que le seul point Q et ne pouvait donc pas déjà figurer parmi les droites déterminées par les $n-1$ points restants seuls (qui sont toutes déterminées par au moins deux de ces $n-1$ points). On obtient donc au moins $(n-1)+1 = n$ droites.

Cas 2 : les $n-1$ points restants sont tous alignés sur une droite d. Alors $Q \in d$, et $P \notin d$ (sinon les n points de départ seraient tous alignés). Les droites déterminées par les n points initiaux sont : d elle-même, et pour chacun des $n-1$ points de d, la droite joignant ce point à P (ces $n-1$ droites sont deux à deux distinctes car elles ne se coupent qu'en P, et distinctes de d puisque $P \notin d$). Cela fait $1 + (n-1) = n$ droites.

Dans les deux cas, on obtient au moins n droites, ce qui achève la récurrence. (Le cas de base $n = 3$, points non alignés, donne trivialement 3 droites.)

Solution de l'exercice 7.5. Soit uv une arête. Comme G est sans triangle, $N(u) \cap N(v) = \varnothing$, donc $|N(u) \cup N(v)| = \deg(u) + \deg(v) \le n$: c'est la même observation que dans la preuve du théorème de Mantel. Comptons les chemins de longueur 2 centrés en un sommet b : il y en a $\deg(b)(\deg(b)-1)$. En sommant sur b et en utilisant Cauchy–Schwarz comme dans la preuve du théorème de Mantel :

$$\sum_b \deg(b)(\deg(b)-1) = \sum_b \deg(b)^2 - \sum_b \deg(b) \ge \frac{4|E|^2}{n} - 2|E| = \frac{2|E|(2|E|-n)}{n}.$$

Solution de l'exercice 7.6. Soit uv une arête. Les voisins communs de u et v sont au moins $\deg(u) + \deg(v) - n$. En sommant sur toutes les arêtes, chaque triangle étant compté trois fois,

$$3T \ge \sum_{uv \in E} (\deg u + \deg v - n) = \sum_v \deg(v)^2 - nm.$$

Par Cauchy–Schwarz, $\sum_v \deg(v)^2 \geq \frac{(2m)^2}{n} = \frac{4m^2}{n}$. Donc $3T \geq \frac{4m^2}{n} - nm = \frac{m(4m-n^2)}{n}$, d'où $T \geq \frac{m(4m-n^2)}{3n}$.

Solution de l'exercice 7.7. Modélisons chaque juge par son vecteur de verdicts, un mot de longueur a sur $\{0,1\}$ (un symbole par candidat). Pour deux juges J, J', notons $d(J,J')$ le nombre de candidats sur lesquels ils diffèrent : comme ils s'accordent sur au plus k candidats,

$$d(J,J') \geq a - k \qquad \text{pour tous } J \neq J'.$$

Minoration par sommation sur les paires de juges. Il y a $\binom{b}{2}$ paires de juges, donc

$$\sum_{\{J,J'\}} d(J,J') \geq \binom{b}{2}(a-k).$$

Calcul exact par sommation sur les candidats. Pour un candidat c fixé, soit y_c le nombre de juges (parmi les b) qui l'admettent. Le nombre de paires de juges en désaccord sur c vaut exactement $y_c(b-y_c)$. En sommant sur les a candidats,

$$\sum_{\{J,J'\}} d(J,J') = \sum_{c=1}^{a} y_c\,(b-y_c).$$

Comme b est impair, $y(b-y)$ est maximal (parmi les entiers y) pour $y = \frac{b\pm1}{2}$, où il vaut $\frac{(b-1)(b+1)}{4} = \frac{b^2-1}{4}$. Donc

$$\sum_{c=1}^{a} y_c\,(b-y_c) \leq a \cdot \frac{b^2-1}{4}.$$

Conclusion. En combinant les deux expressions de la même somme,

$$\binom{b}{2}(a-k) \leq a \cdot \frac{b^2-1}{4}, \qquad \text{soit} \qquad \frac{b(b-1)}{2}(a-k) \leq \frac{a(b-1)(b+1)}{4}.$$

Comme $b \geq 3$, on peut diviser par $\frac{b-1}{2} > 0$:

$$b(a-k) \leq \frac{a(b+1)}{2} \Leftrightarrow ab - bk \leq \frac{ab}{2} + \frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{a(b-1)}{2} \leq bk \Leftrightarrow \frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

À retenir

La clé est de reconnaître un problème de codes binaires déguisé : les verdicts de chaque juge forment un mot de $\{0,1\}^a$, la contrainte « accord $\leq k$ » borne inférieurement la distance de Hamming entre deux mots quelconques, et l'on double-compte la somme de ces distances — une fois par paires de mots (juges), une fois par coordonnée (candidat) — pour faire apparaître l'inégalité de convexité $y(b-y) \leq (b^2-1)/4$, qui exploite l'imparité de b. C'est exactement la borne de Plotkin de la théorie des codes correcteurs d'erreurs.

CHAPITRE 8

8 Invariants, monovariants et coloriages

Objectifs du chapitre. Reconnaître un processus derrière un énoncé ; construire une quantité qui ne change pas (invariant) pour démontrer une impossibilité ; construire une quantité qui change toujours dans le même sens (monovariant) pour démontrer une terminaison ; maîtriser l'arme la plus rentable de la combinatoire olympique : le coloriage.

8.1 L'idée d'invariant

Un très grand nombre d'énoncés de combinatoire ont la forme suivante : *on part d'une configuration C_0. On répète une opération autorisée. Peut-on atteindre la configuration $C^\star$?*

Lorsque la réponse est oui, il faut exhiber une suite d'opérations : c'est un travail de construction. Lorsque la réponse est non, aucune tentative de construction ne prouvera jamais rien : il faut trouver une obstruction. C'est le rôle de l'invariant.

Définition 8.1.1 (Invariant)

Soit E l'ensemble des configurations possibles et $\to$ la relation « on passe de C à C' par une opération autorisée ». Une application $f : E \to X$ est un invariant du processus si $C \to C' \Longrightarrow f(C) = f(C')$.

Théorème 8.1.2 (Principe d'invariance)

Si f est un invariant et si $f(C_0) \neq f(C^\star)$, alors $C^\star$ n'est jamais atteignable depuis C_0.

Démonstration. Si $C_0 \to C_1 \to \cdots \to C_m$, alors par récurrence sur i, $f(C_i) = f(C_0)$; donc toute configuration atteignable C vérifie $f(C) = f(C_0) \neq f(C^\star)$. La démonstration tient en une ligne, mais l'efficacité de l'outil est considérable : il transforme une infinité de vérifications en un seul calcul.

Méthode 8.1.3 — Le catalogue des invariants

Devant un processus, on essaie systématiquement, dans cet ordre :

1. la parité d'une somme, d'un cardinal, d'un nombre d'objets d'un certain type ;
2. une somme ou un produit modulo n (souvent $n = 2, 3, 4$ ou $n =$ le nombre d'objets en jeu) ;
3. le produit des signes, ou le signe d'une permutation ;
4. le nombre d'inversions d'une suite ;
5. une couleur : on colorie les cases, les sommets ou les positions de sorte que chaque opération conserve un décompte ;
6. un poids : on attribue à chaque position un réel w choisi pour que chaque opération conserve (ou diminue) la somme des poids ;
7. une combinaison linéaire $\alpha a + \beta b + \gamma c$ dont on ajuste les coefficients pour annuler l'effet de l'opération.

Exemple 8.1.4 (La différence au tableau). *Les nombres $1,2,\ldots,2n$ sont écrits au tableau. À chaque étape on efface deux nombres a et b et on écrit $|a-b|$. Quelle est la parité du dernier nombre restant ?*

Solution. Soit S la somme des nombres écrits. L'opération remplace $a+b$ par $|a-b|$, et $|a-b| \equiv a+b \pmod 2$, donc la parité de S est un invariant. Initialement $S = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$, dont la parité est celle de n. Le dernier nombre restant est donc pair si n est pair, impair si n est impair. Pour $n = 1013$ (nombres 1 à 2026), le dernier nombre est impair : il ne peut pas valoir 0.

Exemple 8.1.5 (Les caméléons). *Sur une île vivent 13 caméléons gris, 15 bruns et 17 rouges. Lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils prennent tous deux la troisième couleur. Tous les caméléons peuvent-ils un jour être de la même couleur ?*

Solution. Notons (g,b,r) les effectifs. Une rencontre gris–brun donne $(g-1, b-1, r+2)$, et de même pour les deux autres. Dans tous les cas, deux effectifs diminuent de 1 et le troisième augmente de 2 : les différences $g-b$, $b-r$, $r-g$ varient donc de 0 ou de ± 3. Ainsi $g-b \bmod 3$, $b-r \bmod 3$, $r-g \bmod 3$ sont des invariants. Au départ $g-b=-2\equiv 1$, $b-r=-2\equiv 1$, $r-g=4\equiv 1 \pmod 3$: aucune de ces différences n'est nulle modulo 3. Or une configuration monochrome comporte deux effectifs nuls, donc une différence nulle, donc nulle modulo 3. C'est impossible.

À retenir (Le bon réflexe)

Dans l'exemple précédent, l'invariant n'a pas été deviné : il a été fabriqué. On écrit l'effet de l'opération sur les inconnues, puis on cherche une quantité que cet effet laisse fixe. Ici, l'opération translate le vecteur (g,b,r) de $(-1,-1,+2)$, de $(-1,+2,-1)$ ou de $(+2,-1,-1)$: ces trois vecteurs sont congrus à $(-1,-1,-1)$ modulo 3, donc les différences deux à deux sont conservées modulo 3.

Exemple 8.1.6 (Le produit des signes). *Dans un tableau 4×4 toutes les cases contiennent $+1$, sauf une qui contient -1. On autorise à changer le signe de toutes les cases d'une même ligne ou d'une même colonne. Peut-on obtenir un tableau ne contenant que des $+1$?*

Solution. Soit P le produit des 16 nombres du tableau. Une opération change le signe de 4 cases, donc multiplie P par $(-1)^4 = 1$: P est un invariant. Initialement $P=-1$, et un tableau de $+1$ a pour produit $+1$. C'est donc impossible.

+1	+1	+1	+1
+1	+1	−1	+1
+1	+1	+1	+1
+1	+1	+1	+1

Le tableau 4 × 4 de l'exemple : changer les signes d'une ligne ou d'une colonne modifie 4 cases, donc ne change pas le produit des 16 nombres, qui vaut −1.

Exemple 8.1.7 (Le taquin). *Le jeu du taquin est une grille* 4×4 *contenant* 15 *pièces numérotées et une case vide ; un coup fait glisser une pièce voisine dans la case vide. Montrer que la position obtenue en échangeant les pièces* 14 *et* 15 *dans la configuration ordonnée n'est pas atteignable.*

Solution. À une configuration on associe le nombre $f = \varepsilon(\sigma) \cdot (-1)^d$, où σ est la permutation des 16 cases lues ligne par ligne (la case vide étant traitée comme une seizième pièce), ε sa signature et d la distance de la case vide au coin inférieur droit (nombre de coups horizontaux $+$ verticaux). Un coup échange la case vide avec une pièce : σ est composée par une transposition, et la signature d'une transposition vaut -1 (la signature est multiplicative), donc $\varepsilon(\sigma)$ change de signe ; et d change de ± 1, donc $(-1)^d$ change aussi de signe. Le produit f est donc invariant. Or la position cible se déduit de la position ordonnée par une seule transposition, avec la même case vide : elle a un f opposé. Elle est donc inaccessible.

8.2 Coloriages

Un coloriage n'est rien d'autre qu'un invariant géométrique. C'est la technique reine des problèmes de pavage.

Méthode 8.2.1 — Comment choisir un coloriage

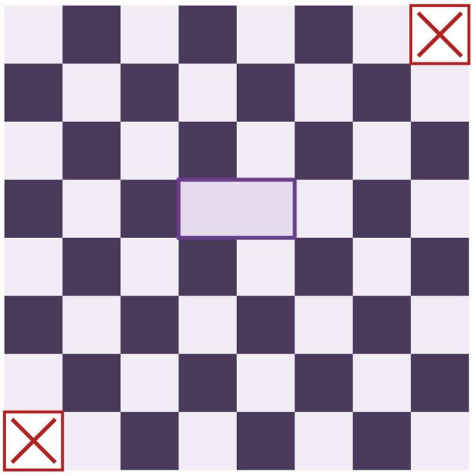
On veut montrer qu'une figure F ne peut pas être pavée par des pièces d'un certain type.

1. On cherche un coloriage tel que chaque pièce, où qu'elle soit placée et quelle que soit son orientation, recouvre un nombre fixé de cases de chaque couleur (ou bien : un nombre impair de cases d'une couleur, ou une somme de poids fixée).
2. On compte les cases de chaque couleur dans F.
3. Si les deux décomptes sont incompatibles, le pavage est impossible.

Coloriages à essayer, dans l'ordre : damier (2 couleurs) ; bandes verticales ou horizontales ; diagonales $c(i,j) = (i+j) \bmod k$; $c(i,j) = (i-j) \bmod k$; motif périodique $k \times k$; poids $w(i,j) = x^i y^j$.

Exemple 8.2.2 (L'échiquier mutilé). *On retire deux coins opposés d'un échiquier* 8×8*. Peut-on paver les* 62 *cases restantes par* 31 *dominos* 1×2 *?*

Solution. Colorions l'échiquier en damier : il y a 32 cases noires et 32 blanches, et tout domino recouvre exactement une case de chaque couleur. Or deux coins opposés sont de la même couleur : la figure mutilée possède 32 cases d'une couleur et 30 de l'autre. Trente et un dominos recouvriraient 31 cases de chaque couleur : impossible.



L'échiquier mutilé : les deux coins retirés (croix) sont noirs ; il reste 30 cases noires et 32 blanches, alors que chaque domino couvre une case de chaque couleur.

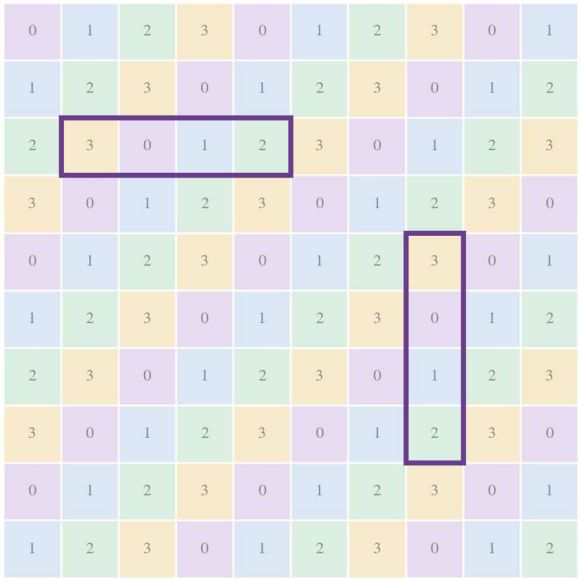
Exemple 8.2.3 (Le carré 10 × 10 et les barres 1 × 4). *Montrer qu'un carré* 10×10 *ne peut pas être pavé par* 25 *barres* 1×4*.*

Solution. Indexons les cases par (i,j), $0 \le i,j \le 9$, et colorions la case (i,j) avec la couleur $c(i,j) = (i+j) \bmod 4$. Une barre horizontale occupe $(i,j),(i,j+1),(i,j+2),(i,j+3)$: ses couleurs sont $c, c+1, c+2, c+3$, donc une case de chaque couleur ; de même pour une barre verticale. Vingt-cinq barres recouvriraient donc exactement 25 cases de chaque couleur.

Comptons. Parmi $0,1,\dots,9$, les restes modulo 4 apparaissent avec les multiplicités $(3,3,2,2)$ pour les restes $(0,1,2,3)$. Le nombre de cases de couleur r vaut donc $\sum_a n_a\, n_{r-a}$ (indices pris modulo 4) où $(n_0,n_1,n_2,n_3) = (3,3,2,2)$, ce qui donne

$$\#\{c=0\} = 25, \quad \#\{c=1\} = 26, \quad \#\{c=2\} = 25, \quad \#\{c=3\} = 24$$

(total 100). Les décomptes ne sont pas tous égaux à 25 : le pavage est impossible.



Le coloriage (i + j) mod 4 du carré 10 × 10 : toute barre 1 × 4 couvre une case de chaque couleur, mais les quatre couleurs apparaissent 25, 26, 25 et 24 fois.

Exemple 8.2.4 (Deux coloriages valent mieux qu'un). *On pave un échiquier* 8×8 *avec* 21 *barres* 1×3 *et un unique carré* 1×1*. Où peut se trouver ce carré ?*

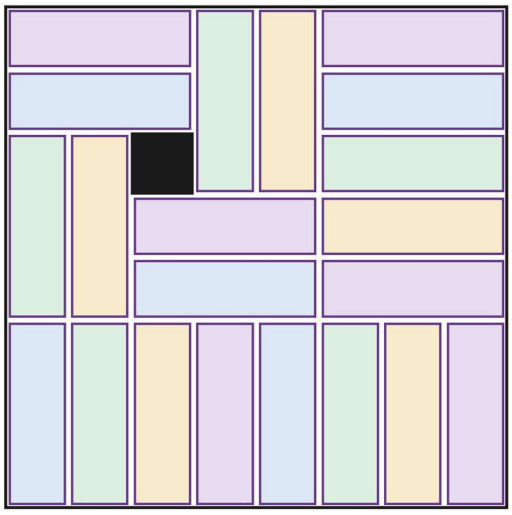
Solution. Indexons les cases par (i,j) avec $0 \le i,j \le 7$, et utilisons deux coloriages : $c(i,j) = (i+j) \bmod 3$ et $c'(i,j) = (i-j) \bmod 3$. Toute barre 1×3, horizontale ou verticale, recouvre exactement une case de chaque couleur, pour chacun des deux coloriages.

Les restes modulo 3 de $0,\dots,7$ ont pour multiplicités $(n_0,n_1,n_2) = (3,3,2)$. On calcule alors, pour le premier coloriage,

$$\#\{c=0\} = 21, \quad \#\{c=1\} = 22, \quad \#\{c=2\} = 21,$$

et pour le second, $\#\{c'=0\} = 22$ et $\#\{c'=1\} = \#\{c'=2\} = 21$. Les 21 barres recouvrent 21 cases de chaque couleur, dans les deux coloriages : la case isolée vérifie donc nécessairement $i+j \equiv 1 \pmod 3$ et $i \equiv j \pmod 3$.

D'où $2i \equiv 1$, soit $i \equiv 2$ et $j \equiv 2 \pmod 3$: la case isolée est l'une des quatre cases $(2,2),(2,5),(5,2),(5,5)$, c'est-à-dire, en numérotant lignes et colonnes de 1 à 8, l'intersection des lignes 3 ou 6 avec les colonnes 3 ou 6. Réciproquement, ces quatre positions conviennent. Pour la case $(2,2)$, par exemple : le carré 5×5 formé des lignes et colonnes 0 à 4, privé de sa case centrale $(2,2)$, se découpe en quatre rectangles 2×3 disposés en moulinet, soit 8 barres ; le rectangle formé des lignes 0 à 4 et des colonnes 5 à 7 se pave par 5 barres horizontales ; les lignes 5 à 7 forment un rectangle 3×8 pavé par 8 barres verticales. On obtient bien $8+5+8 = 21$ barres, et les trois autres positions s'en déduisent par symétrie de l'échiquier.



Un pavage de l'échiquier par 21 barres 1 × 3 et un carré unité en (2, 2) : moulinet de quatre rectangles 2 × 3 autour du carré, 5 barres horizontales à droite, 8 barres verticales en bas.

Remarque (Coloriage par les racines de l'unité).

Le coloriage « discret » se généralise en un poids. Pour montrer qu'un rectangle $a\times b$ n'est pavable par des barres $1\times n$ que si $n \mid a$ ou $n \mid b$, on donne à la case (i,j) le poids $\omega^i\omega^j$ où $\omega = e^{2i\pi/n}$. Toute barre a un poids total $\omega^k(1+\omega+\cdots+\omega^{n-1}) = 0$, donc le poids total du rectangle est nul :

$$\left(\sum_{i=0}^{a-1}\omega^i\right)\left(\sum_{j=0}^{b-1}\omega^j\right) = 0 \Longrightarrow \omega^a = 1 \text{ ou } \omega^b = 1,$$

c'est-à-dire $n \mid a$ ou $n \mid b$. C'est le théorème de de Bruijn.

8.3 Monovariants

Un invariant démontre qu'une chose est impossible. Un monovariant démontre qu'une chose finit par arriver.

Définition 8.3.1 (Monovariant)

Une application $f : E \to \mathbb{N}$ (ou plus généralement à valeurs dans un ensemble bien ordonné, ou dans un ensemble fini de réels) est un monovariant du processus si $C \to C' \Longrightarrow f(C') < f(C)$.

Théorème 8.3.2 (Terminaison)

S'il existe un monovariant à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors le processus s'arrête toujours, après au plus $f(C_0)$ opérations.

Démonstration. Une suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie. ■

À retenir (Que faire une fois la terminaison acquise ?)

Le monovariant sert deux fois : (1) il garantit qu'une position finale existe ; (2) il caractérise cette position finale : dans une position où plus aucune opération n'est possible, toutes les configurations « améliorables » sont exclues, ce qui fournit gratuitement une propriété forte. Ce second point est en réalité le principe de l'extremum du chapitre 9 : prendre la configuration qui minimise f revient à prendre une configuration finale.

Exemple 8.3.3 (Le tri par transpositions). *Une suite $a_1, \ldots, a_n$ de réels deux à deux distincts est donnée. Tant qu'il existe i avec $a_i > a_{i+1}$, on échange ces deux termes. Montrer que le procédé s'arrête, et décrire la position finale.*

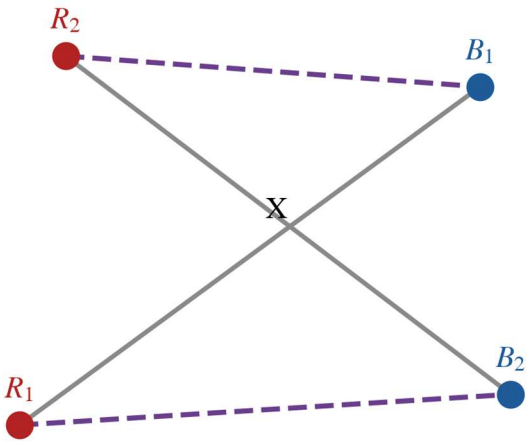
Solution. Soit f le nombre d'inversions, c'est-à-dire le nombre de couples (i, j) avec $i < j$ et $a_i > a_j$. Un échange de deux termes voisins mal ordonnés supprime exactement une inversion (celle du couple échangé) et n'en modifie aucune autre : f décroît strictement. Comme $0 \leq f \leq \binom{n}{2}$, le procédé s'arrête. Une position finale vérifie $a_i < a_{i+1}$ pour tout i : la suite est triée.

Exemple 8.3.4 (L'appariement sans croisement). *On donne n points rouges et n points bleus du plan, trois d'entre eux n'étant jamais alignés. Montrer qu'on peut les apparier par n segments rouge–bleu deux à deux disjoints.*

Solution. Il y a un nombre fini ($n!$) d'appariements. Choisissons-en un qui minimise la somme totale des longueurs des n segments. Supposons que deux segments R_1B_1 et R_2B_2 se coupent en un point X. L'inégalité triangulaire (stricte, car les points ne sont pas alignés) donne $R_1B_2 < R_1X + XB_2$ et $R_2B_1 < R_2X + XB_1$, donc

$$R_1B_2 + R_2B_1 < (R_1X + XB_1) + (R_2X + XB_2) = R_1B_1 + R_2B_2.$$

Le réappariement R_1B_2, R_2B_1 diminue strictement la somme totale : contradiction avec la minimalité. L'appariement minimal est donc sans croisement.



Si deux segments R_1B_1 et R_2B_2 se coupent en X, les échanger en R_1B_2 et R_2B_1 diminue strictement la longueur totale (inégalité triangulaire).

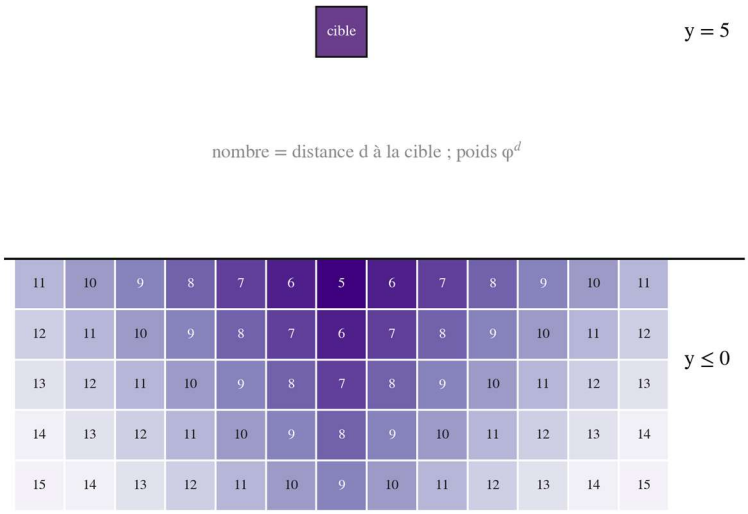
Exemple 8.3.5 (Coupe maximale). *Soit G un graphe fini. Montrer qu'on peut partager ses sommets en deux groupes de sorte que chaque sommet ait au moins la moitié de ses voisins dans l'autre groupe.*

Solution. Parmi les (finiment nombreuses) partitions $V = A \sqcup B$, choisissons celle qui maximise le nombre $e(A, B)$ d'arêtes traversantes. Soit $v \in A$, d son degré, d_{int} le nombre de ses voisins dans A et d_{ext} ceux dans B. Si $d_{\text{int}} > d_{\text{ext}}$, déplacer v de A vers B augmente $e(A, B)$ de $d_{\text{int}} - d_{\text{ext}} > 0$, ce qui contredit la maximalité. Donc $d_{\text{ext}} \geq d_{\text{int}}$, c'est-à-dire $d_{\text{ext}} \geq d/2$. Il en va de même pour les sommets de B.

Remarque (Poids : les soldats de Conway).
Le raffinement ultime du coloriage est le poids réel. Dans le solitaire de Conway, des pions occupent tout le demi-plan $y \leq 0$ du réseau $\mathbb{Z}^2$; un coup consiste à faire sauter un pion par-dessus un voisin, le pion sauté étant retiré. On attribue à la case située à distance d de la cible (distance mesurée en nombre de pas horizontaux et verticaux) le poids φ^d, où $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ vérifie $\varphi^2 + \varphi = 1$. Un saut vers la cible remplace $\varphi^{d+2} + \varphi^{d+1}$ par φ^d, et $\varphi^{d+2} + \varphi^{d+1} = \varphi^d(\varphi^2 + \varphi) = \varphi^d$: le poids total est conservé. Pour un saut quelconque, si le pion sauteur est à distance d de la cible, le pion sauté est à distance $d \pm 1$ et la case d'arrivée à distance $f \in \{d-2, d, d+2\}$ (chaque pas unité change la distance de ± 1). Le poids $\varphi^d + \varphi^e$ ($e = d \pm 1$) est remplacé par φ^f : si $f = d - 2$, alors $e = d - 1$ et le poids est conservé ; si $f \geq d$, alors $\varphi^f \leq \varphi^d < \varphi^d + \varphi^e$ et il décroît strictement. Pour une cible située sur la ligne $y = 5$, le poids total du demi-plan vaut exactement

$$\left(\sum_{x \in \mathbb{Z}} \varphi^{|x|}\right)\left(\sum_{k \geq 0} \varphi^{5+k}\right) = \frac{1+\varphi}{1-\varphi} \cdot \frac{\varphi^5}{1-\varphi} = \varphi^{-3} \cdot \varphi^3 = 1,$$

c'est-à-dire le poids de la cible elle-même. Or une suite finie de coups ne met en jeu qu'un nombre fini de pions, dont le poids total est strictement inférieur à 1 ; le poids ne pouvant pas augmenter, aucun pion ne peut jamais atteindre la ligne $y = 5$ — un résultat spectaculaire, obtenu par une simple pondération.



Les soldats de Conway : chaque case du demi-plan y ≤ 0 porte sa distance d à la cible (ligne y = 5) et reçoit le poids φ^d ($\varphi \approx 0{,}618$) ; le poids total du demi-plan vaut exactement 1, le poids de la cible.

8.4 Exercices

Exercice 8.1 ★. Les nombres $1, 2, \ldots, 2025$ sont écrits au tableau. À chaque étape, on efface deux nombres et on écrit leur différence positive. Le dernier nombre restant peut-il être nul ?

Exercice 8.2 ★. On retire d'un échiquier 8×8 une case noire et une case blanche. Montrer que les 62 cases restantes peuvent toujours être pavées par 31 dominos.

Exercice 8.3 ★★. Sur un tableau sont écrits les nombres $1, 2, \ldots, n$. À chaque étape, on efface deux nombres a et b et on écrit $a + b + ab$. Montrer que le nombre final ne dépend pas des choix effectués, et le calculer.

Exercice 8.4 ★★. Un carré 6×6 est pavé par des dominos 1×2. Montrer qu'il existe toujours une droite horizontale ou verticale du quadrillage qui traverse le carré de part en part sans couper aucun domino.

Exercice 8.5 ★★. Peut-on paver un carré 6×6 par des pièces 1×4 ? Et un carré 8×8 privé d'une case ?

Exercice 8.6 ★★★. Dans le plan, une puce se déplace en sautant d'un point A à son symétrique par rapport à un autre point B (les points sont ceux du réseau $\mathbb{Z}^2$). Partant de $(0,0)$ avec les centres de symétrie autorisés $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$, la puce peut-elle atteindre $(1,0)$?

Exercice 8.7 ★★★. Dans un pays, certaines paires de villes sont reliées par une route. On veut colorier chaque route en rouge ou en bleu de sorte que, de chaque ville, partent autant de routes rouges que de bleues, à une unité près, sauf éventuellement pour une ville par composante connexe du réseau, où l'écart peut atteindre 2. Montrer que c'est possible. (Trois villes reliées deux à deux montrent que cette exception ne peut pas être supprimée.)

Exercice 8.8 ★★★★. Sur une ligne infinie de cases, on place n jetons, occupant chacun une case distincte. Un coup consiste à choisir deux jetons situés sur des cases $i < j$ avec $j \geq i + 3$, et à déplacer celui de la case i vers la case $i + 1$ et celui de la case j vers la case $j - 1$, à condition que ces deux cases d'arrivée soient toutes deux libres. Montrer que le nombre de coups possibles est fini.

8.5 Corrigés

Solution de l'exercice 8.1. La somme S des nombres écrits change de $a+b$ en $|a-b|$, et $|a-b| \equiv a+b \pmod 2$: la parité de S est invariante. Or $S_0 = 1+2+\cdots+2025 = \frac{2025\cdot 2026}{2} = 2025 \cdot 1013$ est un produit de deux nombres impairs, donc impair. Le dernier nombre restant est donc impair : il ne peut pas être 0.

Solution de l'exercice 8.2. Le coloriage ne suffit plus : il faut une construction. Parcourons l'échiquier par un cycle hamiltonien de cases (un serpent qui visite chaque case une fois et revient à son point de départ ; il existe puisque 8 est pair). Ce cycle a 64 cases alternant les couleurs. Retirer une case noire et une case blanche coupe le cycle en deux arcs, et chacun de ces arcs a une longueur paire : en effet, les deux cases retirées étant de couleurs différentes, elles occupent des positions de parités différentes sur le cycle. Chaque arc de longueur paire se pave par des dominos consécutifs.

Solution de l'exercice 8.3. Remarquons que $a+b+ab = (1+a)(1+b)-1$. Posons donc $f = \prod(1+x)$, le produit portant sur tous les nombres x écrits au tableau. L'opération remplace $(1+a)(1+b)$ par $1+(a+b+ab) = (1+a)(1+b)$: f est un invariant. Initialement $f = 2\cdot 3\cdots(n+1) = (n+1)!$. À la fin il ne reste qu'un nombre N, avec $1+N = (n+1)!$, donc $N = (n+1)!-1$, indépendamment des choix.

Solution de l'exercice 8.4. Le carré 6×6 possède 5 droites intérieures horizontales et 5 verticales, soit 10 droites. Supposons qu'aucune ne soit « libre » : chacune coupe au moins un domino. Fixons une telle droite ℓ : elle partage la grille en deux parties d'aires $6k$ et $6(6-k)$, toutes deux paires. Les dominos non coupés par ℓ couvrent une aire paire de chaque côté, et chaque domino coupé par ℓ recouvre une case de chaque côté ; donc le nombre de dominos coupés par ℓ est pair, et par hypothèse non nul : il vaut au moins 2.

Ainsi les 10 droites coupent au total au moins 20 dominos, comptés avec multiplicité. Or un domino est coupé par exactement une droite intérieure, et le pavage ne comporte que $\frac{36}{2} = 18$ dominos. Contradiction : $20 > 18$. Il existe donc une droite libre.

Solution de l'exercice 8.5. Le 6×6 : coloriage $c(i,j) = (i+j) \bmod 4$ avec $0 \le i,j \le 5$. Les restes modulo 4 de $0,\dots,5$ ont pour multiplicités $(2,2,1,1)$, d'où $\#\{c=0\} = 2\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 2 = 9$, et de même $\#\{c=1\} = 10$, $\#\{c=2\} = 9$, $\#\{c=3\} = 8$. Comme $36 = 9\times 4$, un pavage exigerait 9 cases de chaque couleur : impossible.

Le 8×8 privé d'une case : 63 n'est pas divisible par 4, donc c'est impossible pour une raison de cardinal.

Solution de l'exercice 8.6. Le saut de A par rapport à B envoie A sur $A' = 2B - A$. Modulo 2, $A' \equiv A$: les parités des deux coordonnées sont invariantes. Partant de $(0,0)$, la puce reste toujours en un point de coordonnées paires. Or $(1,0)$ a une coordonnée impaire : c'est impossible.

Solution de l'exercice 8.7. Ajoutons d'abord un sommet auxiliaire relié à tous les sommets de degré impair : tous les degrés deviennent pairs (le nombre de sommets de degré impair est pair, donc ce sommet a lui-même un degré pair). Chaque composante connexe du nouveau graphe admet alors un circuit eulérien (théorème d'Euler, chapitre 10). Parcourons ce circuit et colorions ses arêtes alternativement en rouge et en bleu, en le faisant partir du sommet auxiliaire lorsque la composante le contient.

Chaque passage du circuit par un sommet v autre que le sommet de départ utilise deux arêtes consécutives incidentes à v, dont l'une est rouge et l'autre bleue. Au sommet de départ, la première et la dernière arête ne sont de couleurs différentes que si le circuit a une longueur paire ; sinon ce

sommet présente un écart de 2. Dans une composante contenant le sommet auxiliaire, c'est lui qui absorbe cet écart éventuel : tous les autres sommets sont exactement équilibrés, et en supprimant le sommet auxiliaire, chaque sommet de degré impair perd une arête, ce qui laisse un écart de 1. Dans une composante sans sommet de degré impair, seul le sommet de départ peut présenter un écart de 2, tous les autres étant équilibrés. Chaque ville a donc autant de routes rouges que de bleues, à une unité près, sauf éventuellement une ville par composante connexe.

Solution de l'exercice 8.8. Notons $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ les positions des jetons et considérons $f = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. Un coup remplace x_i par $x_i + 1$ et x_j par $x_j - 1$ avec $x_j \geq x_i + 3$; la somme $\sum x_k$ est invariante et

$$\Delta f = (x_i + 1)^2 + \big(x_j - 1\big)^2 - x_i^2 - x_j^2 = 2\big(x_i - x_j\big) + 2 \leq 2(-3) + 2 = -4 < 0,$$

puisque $x_j - x_i \geq 3$. Ainsi f est un entier naturel (somme de carrés d'entiers) qui décroît strictement, d'au moins 4, à chaque coup. Le nombre de coups est donc fini.

À retenir (Ce qu'il faut retenir)

- Impossibilité ⇒ chercher un invariant. Écrire l'effet de l'opération sur les inconnues, puis fabriquer la quantité qu'il laisse fixe.
- Terminaison ⇒ chercher un monovariant à valeurs entières positives (nombre d'inversions, somme des carrés, somme des longueurs, nombre d'arêtes traversantes…).
- Un coloriage est un invariant géométrique : damier, diagonales modulo k, poids ω^{i+j}.
- Prendre la configuration optimale pour un monovariant, c'est se placer directement en position finale : c'est le principe de l'extremum du chapitre suivant.

CHAPITRE 9

9 Principe de l'extremum, descente et récurrence

Objectifs du chapitre. Savoir faire produire de l'information à un objet extrémal (le plus grand, le plus petit, le plus proche, le plus long) ; maîtriser la descente infinie ; savoir construire une solution par récurrence, notamment dans les problèmes de pavage et de construction.

9.1 Le principe de l'extremum

Théorème 9.1.1 (Principe de l'extremum)

Tout ensemble fini non vide de réels possède un plus grand et un plus petit élément. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

Démonstration. Par récurrence sur le cardinal : un singleton a un plus grand et un plus petit élément, et si M est le plus grand élément de E, alors $\max(M, x)$ est le plus grand élément de $E \cup \{x\}$ (de même pour le minimum). Pour $A \subseteq \mathbb{N}$ non vide, choisissons $a \in A$: l'ensemble $A \cap [\![0, a]\!]$ est fini et non vide, son plus petit élément est le plus petit élément de A. ∎

Énoncé ainsi, le principe paraît vide. Son efficacité vient de l'usage qu'on en fait :

Méthode 9.1.2 — Le mode d'emploi

1. On considère la configuration (ou l'objet, ou le couple d'objets) qui optimise une certaine quantité : distance minimale, aire maximale, longueur du plus long chemin, degré maximal, somme minimale…
2. On suppose que la conclusion est fausse ; on en déduit l'existence d'une configuration strictement meilleure.
3. Contradiction avec l'optimalité.

Autrement dit : si une configuration peut toujours être améliorée, c'est qu'aucune n'est optimale — or il en existe une.

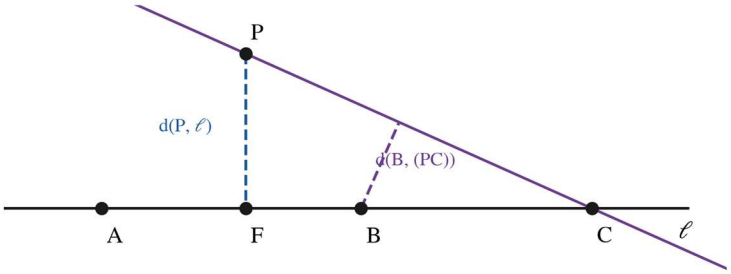
Exemple 9.1.3 (Sylvester–Gallai). *Soit S un ensemble fini de points du plan, non tous alignés. Montrer qu'il existe une droite passant par exactement deux points de S.*

Solution. Appelons droite déterminée toute droite contenant au moins deux points de S, et considérons l'ensemble (fini, non vide car les points ne sont pas tous alignés) des couples (P, ℓ) où ℓ est une droite déterminée et $P \in S$ un point hors de ℓ. Choisissons un tel couple pour lequel la distance $d(P, \ell)$ est minimale.

Montrons que ℓ contient exactement deux points de S. Sinon ℓ contiendrait trois points A, B, C. Soit F le pied de la perpendiculaire issue de P sur ℓ. Parmi A, B, C, deux au moins sont d'un même côté (au sens large) de F sur la droite ℓ : notons-les B et C avec $FB < FC$ (quitte à échanger), B pouvant coïncider avec F. Le point B appartient alors au segment $[FC]$ et $B \neq C$; comme $P \notin \ell$, B n'est pas sur la droite déterminée (PC). Justifions $d\big(B, (PC)\big) < d(P, \ell)$. La distance à la droite (PC) varie linéairement le long du segment $[FC]$ (elle s'annule en C) : $d\big(B, (PC)\big) = \frac{BC}{FC}\, d\big(F, (PC)\big) \leq d\big(F, (PC)\big)$.

Et $d\big(F,(PC)\big) = PF\sin\widehat{FPC} < PF$, car l'angle $\widehat{FPC}$ est aigu (le triangle PFC est rectangle en F et $C \neq F$). Ainsi $d\big(B,(PC)\big) < PF = d(P,\ell)$.

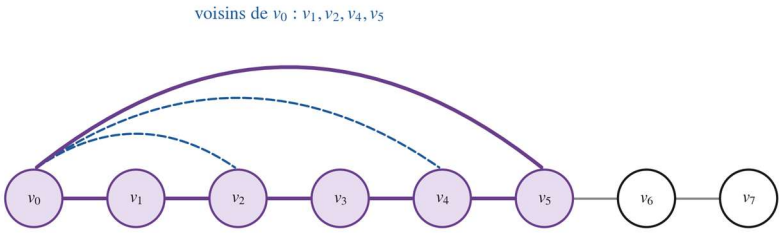
Le couple $\big(B,(PC)\big)$ contredit donc la minimalité. Ainsi ℓ ne contient que deux points.



Sylvester–Gallai : si la droite ℓ la plus proche de P contenait trois points A, B, C, le point B, situé entre F et C, serait strictement plus proche de la droite (PC) que P ne l'est de ℓ.

Exemple 9.1.4 (Le plus long chemin). *Soit G un graphe dont tous les sommets ont un degré $\geq k \geq 2$. Montrer que G contient un cycle de longueur au moins $k+1$.*

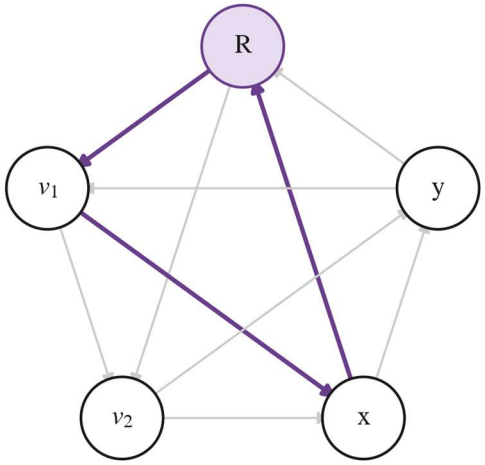
Solution. Considérons un chemin $v_0v_1\cdots v_m$ de longueur maximale dans G. Tous les voisins de v_0 appartiennent à ce chemin : sinon on prolongerait le chemin, contredisant la maximalité. Comme v_0 a au moins k voisins, tous de la forme v_i, soit j le plus grand indice tel que v_0v_j soit une arête ; alors $j \geq k$, et $v_0v_1\cdots v_jv_0$ est un cycle de longueur $j+1 \geq k+1$.



Le plus long chemin $v_0v_1\ldots v_m$: tous les voisins de v_0 sont sur le chemin ; l'arête vers le voisin d'indice maximal $j \geq k$ ferme un cycle de longueur $j+1$.

Exemple 9.1.5 (Le roi d'un tournoi). *Dans un tournoi (graphe complet orienté) sur n joueurs, il existe toujours un joueur R tel que tout autre joueur soit battu par R, ou battu par quelqu'un que R a battu.*

Solution. Prenons pour R un joueur ayant le plus grand nombre de victoires, et notons V l'ensemble de ses victimes, $|V| = d$. Soit $x \notin V \cup \{R\}$: alors x a battu R. Si x battait de plus tous les joueurs de V, il aurait au moins $d+1$ victoires, ce qui contredirait la maximalité de d. Donc x est battu par un élément de V.



Le roi d'un tournoi : R a le plus de victoires ; un joueur x qui bat R est lui-même battu par l'une des victimes de R (flèches : « bat »).

Exemple 9.1.6 (Les points milieux). *Soit S un ensemble fini de points du plan tel que tout point de S soit le milieu de deux autres points de S. Montrer que $S = \varnothing$.*

Solution. Supposons S non vide. Comme S est fini, choisissons deux points $A, B \in S$ réalisant la distance maximale D. Par hypothèse, A est le milieu de deux points $X, Y \in S$, avec $XY = 2 \cdot XA$ et A entre X et Y. L'un des deux points X, Y — disons X — vérifie alors $\widehat{XAB} \geq 90°$, donc dans le triangle XAB le côté XB est strictement le plus grand :

$$XB^2 = XA^2 + AB^2 - 2\,XA \cdot AB\cos\widehat{XAB} \geq XA^2 + AB^2 > AB^2 = D^2.$$

Ainsi $XB > D$, ce qui contredit la maximalité de D.

9.2 La descente infinie

Théorème 9.2.1 (Descente infinie)

Il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels. Par conséquent, si à partir de toute solution d'un problème on sait construire une solution strictement plus petite (pour une mesure entière positive), c'est qu'il n'y a aucune solution.

Démonstration. L'ensemble des termes d'une telle suite serait une partie non vide de $\mathbb{N}$ sans plus petit élément (tout terme est suivi d'un terme strictement plus petit), ce qui contredit le théorème 9.1.1. Pour la seconde assertion, s'il existait une solution, on construirait de proche en proche une suite infinie strictement décroissante de mesures entières positives. ■

Exemple 9.2.2 (Pas de triangle équilatéral dans le réseau). *Montrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral dont les trois sommets sont à coordonnées entières.*

Première preuve (par l'aire). Si $A, B, C \in \mathbb{Z}^2$, l'aire du triangle vaut $1/2\,|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|$, donc est un rationnel. Mais l'aire d'un triangle équilatéral de côté a vaut $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, et $a^2 = AB^2$ est un entier : l'aire serait un multiple rationnel non nul de $\sqrt{3}$, donc irrationnelle. Contradiction.

Seconde preuve (par les angles). Posons $u = \overrightarrow{AB}$ et $v = \overrightarrow{AC}$, deux vecteurs de $\mathbb{Z}^2$ non nuls. La tangente de l'angle qu'ils forment vaut $\tan(\widehat{u,v}) = \frac{|\det(u,v)|}{u \cdot v} \in \mathbb{Q}$, car numérateur et dénominateur sont des entiers (et $u \cdot v \neq 0$ ici). Or cet angle vaut $60°$ et $\tan 60° = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$: contradiction.

À retenir (Descente ou extremum ?)

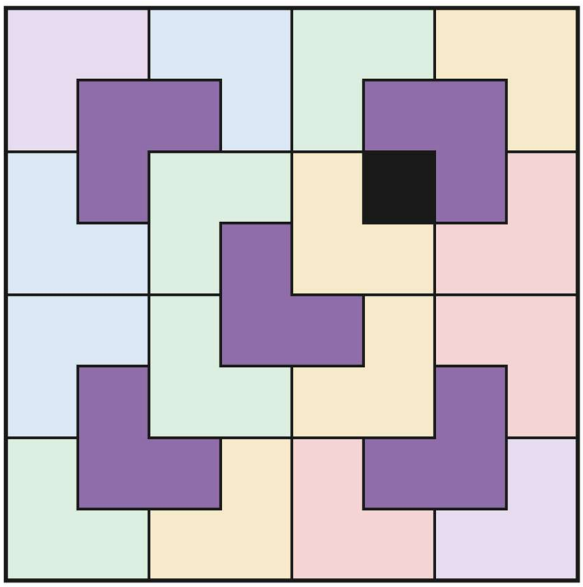
Ce sont les deux faces d'une même pièce. Descente : « de toute solution je fabrique une plus petite, donc il n'y en a pas ». Extremum : « je prends la plus petite solution et j'en fabrique une plus petite : contradiction ». La seconde formulation est presque toujours plus courte à rédiger : préférez-la en compétition.

9.3 Construire par récurrence

L'extremum sert à démontrer une existence par l'absurde ; la récurrence sert à construire explicitement.

Exemple 9.3.1 (Pavage par des trominos en L). *Montrer que pour tout $n \geq 1$, un carré $2^n \times 2^n$ privé d'une case quelconque peut être pavé par des trominos en L (trois cases en équerre).*

Solution. Récurrence sur n. Pour $n = 1$, un carré 2×2 privé d'une case est un tromino en L. Supposons le résultat vrai au rang n et considérons un carré $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ privé d'une case c. Découpons-le en quatre quadrants $2^n \times 2^n$; la case c appartient à l'un d'eux. Plaçons un tromino en L au centre du grand carré, de manière à couvrir exactement une case de chacun des trois autres quadrants (celle qui touche le centre). Chacun des quatre quadrants est alors un carré $2^n \times 2^n$ privé d'une case : l'hypothèse de récurrence permet de conclure.



Pavage d'un carré 8 × 8 privé d'une case (en noir) par 21 trominos en L, obtenu par la récurrence : à chaque étape, un tromino central (plus foncé) couvre une case de chacun des trois quadrants qui ne contiennent pas la case manquante.

Exemple 9.3.2 (Chemin hamiltonien dans un tournoi). *Tout tournoi possède un chemin hamiltonien : on peut ordonner les joueurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de sorte que x_i batte x_{i+1} pour tout i.*

Solution. Récurrence sur n. Pour $n = 1$ c'est clair. Supposons le résultat au rang $n - 1$ et soit $x_1 \cdots x_{n-1}$ un chemin hamiltonien du tournoi privé du joueur y.

- Si y bat x_1, on place y en tête.
- Sinon, si x_{n-1} bat y, on place y en queue.
- Sinon x_1 bat y et y bat x_{n-1} : il existe donc un plus petit indice i tel que y batte x_{i+1}, et alors x_i bat y. On insère y entre x_i et x_{i+1}.

9.4 Exercices

Exercice 9.1 ★★. Soient $I_1, \ldots, I_n$ des intervalles fermés de $\mathbb{R}$ tels que deux quelconques d'entre eux aient un point commun. Montrer que $\bigcap_k I_k \neq \varnothing$.

Exercice 9.2 ★★. Dans un groupe de $n \geq 2$ personnes, certaines paires sont amies. Montrer que deux personnes au moins ont le même nombre d'amis dans le groupe.

Exercice 9.3 ★★. Un ensemble fini de points du plan est tel que la droite passant par deux quelconques d'entre eux en contient un troisième. Montrer que tous les points sont alignés.

Exercice 9.4 ★★★. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des points du plan tels que tout triangle $A_iA_jA_k$ ait une aire au plus égale à 1. Montrer qu'il existe un triangle d'aire au plus 4 contenant tous ces points.

Exercice 9.5 ★★★. n enfants sont assis en cercle, chacun avec un nombre pair de bonbons. Simultanément, chaque enfant donne la moitié de ses bonbons à son voisin de droite ; ensuite, tout enfant se retrouvant avec un nombre impair de bonbons en reçoit un de plus du professeur. Montrer qu'au bout d'un nombre fini d'étapes, tous les enfants ont le même nombre de bonbons.

Exercice 9.6 ★★★. Soit G un graphe à n sommets et m arêtes. Montrer que G possède un sous-graphe induit non vide dont tous les sommets ont un degré au moins égal à m/n.

Exercice 9.7 ★★★★ (Erdős–de Bruijn). Soient $n \geq 3$ points du plan, non tous alignés. Montrer qu'ils déterminent au moins n droites distinctes.

Exercice 9.8 ★★★★. Dans une assemblée de $2n$ personnes, chaque personne connaît au moins n autres personnes (la relation étant symétrique). Montrer qu'on peut asseoir toutes ces personnes autour d'une table ronde de sorte que chacune soit voisine de deux connaissances.

9.5 Corrigés

Solution de l'exercice 9.1. Écrivons $I_k = [a_k, b_k]$. Posons $a = \max_k a_k$, atteint pour un indice p, et $b = \min_k b_k$, atteint pour un indice q. Comme $I_p \cap I_q \neq \varnothing$, on a $a_p \leq b_q$, c'est-à-dire $a \leq b$. Alors $[a, b] \neq \varnothing$ et pour tout k, $a_k \leq a \leq b \leq b_k$, donc $[a, b] \subseteq I_k$. Ainsi $\bigcap_k I_k \supseteq [a, b]$.

Solution de l'exercice 9.2. Les nombres d'amis appartiennent à $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, soit n valeurs pour n personnes. Mais les valeurs 0 et $n-1$ ne peuvent coexister : si quelqu'un est ami avec tout le monde, personne n'a 0 ami. Il ne reste donc que $n-1$ valeurs possibles pour n personnes : le principe des tiroirs conclut.

Solution de l'exercice 9.3. C'est la contraposée du théorème de Sylvester–Gallai démontré dans le cours : si les points n'étaient pas tous alignés, il existerait une droite en contenant exactement deux, ce qui contredit l'hypothèse.

Solution de l'exercice 9.4. Si les points sont tous alignés, ils sont sur un segment, contenu dans un triangle d'aire aussi petite qu'on veut. Supposons-les donc non tous alignés, et choisissons parmi les $\binom{n}{3}$ triangles $A_iA_jA_k$ celui d'aire maximale, noté ABC ; par hypothèse son aire $\mathcal{A}$ vérifie $\mathcal{A} \leq 1$.

Traçons par A la parallèle à (BC), par B la parallèle à (AC) et par C la parallèle à (AB) : on obtient un triangle $A'B'C'$ d'aire $4\mathcal{A} \leq 4$.

Montrons que tous les points sont dans $A'B'C'$. Si un point P était à l'extérieur, il serait strictement au-delà de l'une des trois parallèles, disons celle passant par A ; alors la distance de P à (BC) serait strictement supérieure à celle de A, et le triangle PBC aurait une aire strictement supérieure à $\mathcal{A}$ — contradiction.

Solution de l'exercice 9.5. Notons m le minimum et M le maximum des nombres de bonbons. Tous les nombres restent pairs : après le partage, un enfant possède $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ où a est son avoir et b celui de son voisin de gauche, quantité éventuellement impaire, corrigée par l'ajout d'un bonbon.

Le maximum ne croît pas. On a $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \leq M$; en cas d'égalité, $a = b = M$ est pair et la quantité est déjà paire ; sinon $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \leq M - 1$ et l'ajout éventuel d'un bonbon ne dépasse pas M.

Le minimum ne décroît pas : $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \geq m$.

Le nombre d'enfants au minimum décroît. Un enfant se retrouve avec exactement m seulement si $a = b = m$, c'est-à-dire si lui et son voisin de gauche étaient au minimum. Tant que tous les enfants ne sont pas au minimum, il existe un enfant au minimum dont le voisin de gauche ne l'est pas : le nombre d'enfants au minimum diminue strictement.

Après au plus n étapes, le minimum augmente donc strictement (ou bien tout le monde est au minimum, donc à égalité). Comme $m \leq M$ et que M ne croît pas, le processus se stabilise : tous les enfants ont finalement le même nombre de bonbons.

Solution de l'exercice 9.6. Posons $d = m/n$ (la moitié du degré moyen). Considérons, parmi les sous-graphes induits non vides de G, un sous-graphe H maximisant la quantité $f(H) = e(H) - d \cdot |V(H)|$, où $e(H)$ est le nombre d'arêtes de H. Ce maximum est $\geq f(G) = m - dn = 0$.

Si H possédait un sommet v de degré $< d$ dans H, alors $H - v$ vérifierait

$$f(H - v) = e(H) - \deg_H(v) - d(|V(H)| - 1) > e(H) - d - d|V(H)| + d = f(H) \geq 0;$$

en particulier $H - v$ serait non vide (le graphe vide aurait une valeur nulle), ce qui contredit la maximalité. Donc tout sommet de H a un degré $\geq d = m/n$.

Solution de l'exercice 9.7. Récurrence sur n. Pour $n = 3$, trois points non alignés déterminent 3 droites.

Soit $n \geq 4$ et supposons le résultat vrai pour $n - 1$ points. Soit S un ensemble de n points non tous alignés. D'après Sylvester–Gallai, il existe une droite ℓ contenant exactement deux points P, Q de S. Considérons $S' = S \backslash \{P\}$, de cardinal $n - 1$.

Premier cas : S' est aligné. Alors les points de S' sont sur une droite m, et $P \notin m$. Les droites PX, pour $X \in S'$, sont deux à deux distinctes (sinon P serait sur m), ce qui fait $n - 1$ droites, plus la droite m : au total n droites.

Second cas : S' n'est pas aligné. Par hypothèse de récurrence, S' détermine au moins $n - 1$ droites. Aucune d'elles n'est la droite PQ, car $PQ \cap S = \{P, Q\}$ et $P \notin S'$. En ajoutant PQ, on obtient au moins n droites.

Solution de l'exercice 9.8. Considérons un plus long chemin $x_1 x_2 \cdots x_k$ dans le graphe des connaissances (arête = se connaissent). Tous les voisins de x_1 et de x_k sont sur ce chemin, par maximalité ; donc $k \geq n + 1$.

Étape 1 : ce chemin peut être refermé en un cycle. Notons $A = \{i < k : x_1x_{i+1} \text{ arête}\}$ et $B = \{i < k : x_ix_k \text{ arête}\}$. On a $|A| \geq n$ et $|B| \geq n$, et $A, B \subseteq \{1, \dots, k-1\}$. Si $A \cap B = \varnothing$ alors $k - 1 \geq 2n$, donc $k \geq 2n + 1 > 2n$, impossible. Il existe donc i avec x_1x_{i+1} et x_ix_k arêtes, et $x_1x_2 \cdots x_ix_kx_{k-1} \cdots x_{i+1}x_1$ est un cycle passant par les k sommets du chemin.

Étape 2 : le cycle contient tout le monde. Si un sommet y n'était pas sur ce cycle C : puisque $k \geq n + 1$, on a $|V \backslash C| = 2n - k \leq n - 1 < n$, donc y, qui possède au moins n voisins, en possède nécessairement un sur C, disons x_j ; en ouvrant le cycle en x_j et en y accrochant y, on obtiendrait un chemin à $k + 1$ sommets, contredisant la maximalité. Donc C passe par les $2n$ personnes : c'est la disposition cherchée.

À retenir (Ce qu'il faut retenir)

- Devant une existence difficile à construire, considérez l'objet extrémal : le plus long chemin, la distance minimale, l'aire maximale, le degré maximal, la coupe maximale.
- L'optimalité se transforme en information : « aucune amélioration n'est possible » est une hypothèse très riche.
- Descente infinie et extremum sont équivalents ; rédigez avec l'extremum.
- Pour construire, pensez récurrence avec renforcement de l'hypothèse (paver $2^n \times 2^n$ privé d'une case est plus facile que paver $2^n \times 2^n$).

PARTIE III — Structures combinatoires

CHAPITRE 10

10 Théorie des graphes

Objectifs du chapitre. Traduire un énoncé en graphe ; manipuler degrés, connexité, arbres ; connaître et savoir démontrer les théorèmes d'Euler, de Hall et la formule d'Euler des graphes planaires ; savoir colorier.

10.1 Vocabulaire

Définition 10.1.1 (Graphe)

Un graphe (simple, non orienté) est un couple $G = (V, E)$ où V est un ensemble fini de sommets et E un ensemble de paires de sommets, appelées arêtes. On note $n = |V|$ l'ordre et $m = |E|$ la taille.

- Le degré $\deg(v)$ d'un sommet est son nombre de voisins ; $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ désignent les degrés minimal et maximal.
- Un chemin est une suite de sommets deux à deux distincts, consécutivement reliés ; un cycle est un chemin d'au moins trois sommets refermé sur lui-même.
- G est connexe si deux sommets quelconques sont reliés par un chemin.
- G est biparti si $V = X \sqcup Y$ avec toute arête reliant X à Y.
- K_n désigne le graphe complet d'ordre n, $K_{p,q}$ le graphe biparti complet.

À retenir (Traduire en graphe)

Beaucoup d'énoncés sont des graphes déguisés.

Énoncé	Graphe
personnes / connaissances	sommets / arêtes
villes / routes	sommets / arêtes
équipes / matchs joués	sommets / arêtes
paires coloriées en 2 couleurs	K_n à arêtes bicolores (Ramsey)
objets / compatibilité	graphe, puis couplage ou coloration
cases d'un échiquier / coups d'un cavalier	graphe des déplacements
tâches / conflits	coloration des sommets

Lemme 10.1.2 (Lemme des poignées de main)

Dans tout graphe, $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$. En particulier, le nombre de sommets de degré impair est pair.

Démonstration. Comptons de deux façons les couples (v, e) où v est une extrémité de l'arête e : par sommet on obtient $\sum_v \deg(v)$, par arête on obtient $2m$. La seconde assertion s'obtient en réduisant modulo 2. ■

Exemple 10.1.3 (Degrés distincts). *Dans un graphe à $n \geq 2$ sommets, deux sommets ont toujours le même degré.*

Solution. Les degrés sont dans $\{0,1,\dots,n-1\}$, mais 0 et $n-1$ ne peuvent coexister (un sommet de degré $n-1$ est relié à tous les autres). Il reste au plus $n-1$ valeurs pour n sommets : principe des tiroirs.

10.2 Connexité et arbres

Définition 10.2.1 (Arbre, feuille, forêt)

Un arbre est un graphe connexe sans cycle. Une feuille est un sommet de degré 1. Une forêt est un graphe sans cycle.

Théorème 10.2.2 (Caractérisations des arbres)

Pour un graphe G à n sommets, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. G est un arbre ;
2. G est connexe et possède $n-1$ arêtes ;
3. G est sans cycle et possède $n-1$ arêtes ;
4. entre deux sommets quelconques il existe un unique chemin.

De plus, tout arbre à $n \geq 2$ sommets possède au moins deux feuilles.

Démonstration. *Deux faits préliminaires.* (a) Si l'on retire une arête uv appartenant à un cycle d'un graphe, la connexité est préservée : tout chemin utilisant uv peut être dévié par le reste du cycle, qui relie aussi u à v. (b) Si l'on retire une feuille d'un graphe connexe, il reste connexe : un chemin entre deux autres sommets ne passe jamais par une feuille (un sommet intérieur d'un chemin a deux voisins sur ce chemin).

Un arbre à n sommets a $n-1$ arêtes et, si $n \geq 2$, au moins deux feuilles. Récurrence sur n ; c'est clair pour $n = 1$. Pour $n \geq 2$, considérons un plus long chemin $v_0 v_1 \cdots v_k$ ($k \geq 1$ car un arbre à au moins deux sommets a une arête, par connexité). Le sommet v_0 n'a pas d'autre voisin que v_1 : un voisin hors du chemin prolongerait celui-ci, un voisin v_i avec $i \geq 2$ créerait le cycle $v_0 v_1 \cdots v_i v_0$. Donc v_0 est une feuille, et de même v_k. En retirant v_0, on obtient un graphe connexe (b) et sans cycle, donc un arbre à $n-1$ sommets, qui a $n-2$ arêtes par hypothèse de récurrence ; d'où $n-1$ arêtes. En particulier, **une forêt à n sommets et c composantes connexes a $n-c$ arêtes** (on somme sur les composantes, qui sont des arbres).

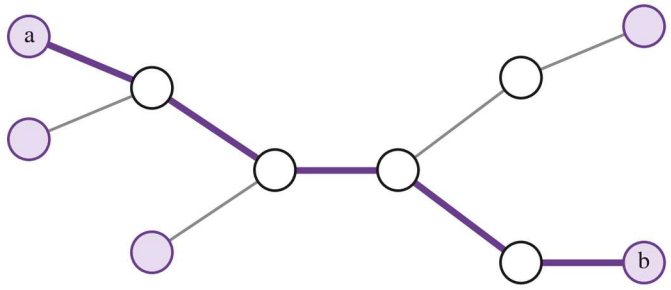
(1) ⇒ (2) et (3) : c'est ce qui précède.

(2) ⇒ (1). Si G, connexe à $n-1$ arêtes, contenait un cycle, on retirerait une arête de ce cycle (a) ; en répétant tant qu'il reste un cycle, on obtiendrait un arbre à n sommets ayant strictement moins de $n-1$ arêtes : absurde.

(3) ⇒ (1). G est une forêt ; si elle a c composantes, elle a $n-c$ arêtes, donc $c = 1$: G est connexe.

(1) ⇒ (4). Un chemin existe par connexité. S'il en existait deux distincts $P = (u = p_0, \dots, p_r = v)$ et $Q = (u = q_0, \dots, q_s = v)$, soit i le premier indice où ils diffèrent ($p_{i+1} \neq q_{i+1}$) et p_j le premier sommet de P après p_i qui appartient aussi à Q, disons $p_j = q_\ell$ (il existe, car v est commun). Les portions $p_i \cdots p_j$ et $q_i \cdots q_\ell$ n'ont en commun que leurs extrémités et forment un cycle : absurde.

(4) ⇒ (1). G est connexe. S'il contenait un cycle $w_0w_1 \cdots w_rw_0$, les sommets w_0, w_1 seraient reliés par deux chemins distincts : l'arête w_0w_1 et $w_0w_r w_{r-1} \cdots w_1$. ■



Un arbre à 10 sommets et 9 arêtes ; ses feuilles (en couleur) sont au nombre de 5. Entre deux sommets quelconques, il existe un unique chemin (en trait épais pour les sommets a et b).

Proposition 10.2.3 (Connexité et nombre d'arêtes)

Un graphe connexe à n sommets a au moins $n-1$ arêtes. Un graphe à n sommets et strictement plus de $\binom{n-1}{2}$ arêtes est connexe.

Démonstration. Pour la première assertion : tant que le graphe connexe contient un cycle, on peut retirer une arête de ce cycle sans rompre la connexité ; on aboutit à un arbre, qui a $n-1$ arêtes.

Pour la seconde assertion : si G n'est pas connexe, ses sommets se répartissent en deux parties non vides de tailles k et $n-k$ sans arête entre elles, d'où $m \leq \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} \leq \binom{n-1}{2}$ (la fonction $k \mapsto \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} = k^2 - nk + \binom{n}{2}$ est un trinôme convexe, donc son maximum sur $[\![1, n-1]\!]$ est atteint aux bornes $k = 1$ ou $k = n-1$, où il vaut $\binom{n-1}{2}$). On obtiendrait $m \leq \binom{n-1}{2}$, contrairement à l'hypothèse. ■

10.3 Graphes eulériens

Définition 10.3.1 (Chaîne et circuit eulériens)

Une chaîne eulérienne est un parcours empruntant chaque arête exactement une fois ; un circuit eulérien est une chaîne eulérienne fermée.

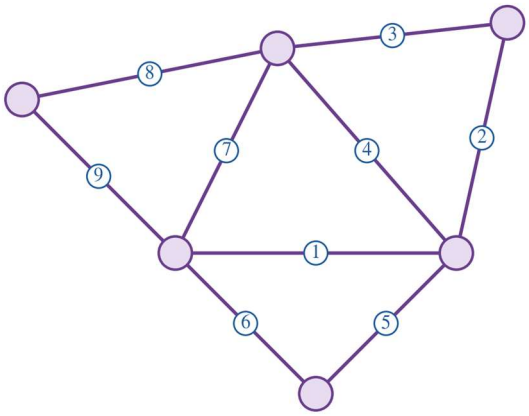
Théorème 10.3.2 (Théorème d'Euler)

Un graphe connexe admet un circuit eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair. Il admet une chaîne eulérienne non fermée si et seulement s'il possède exactement deux sommets de degré impair.

Démonstration. *Nécessité.* Parcourons un circuit eulérien : à chaque passage par un sommet, on arrive par une arête et on repart par une autre ; le point de départ est aussi un point d'arrivée. Toutes les arêtes étant utilisées une fois, les arêtes incidentes à chaque sommet sont appariées : les degrés sont pairs. Pour une chaîne non fermée d'extrémités $a \neq b$, le même argument apparie les arêtes en chaque sommet, sauf une en a et une en b : exactement a et b sont de degré impair.

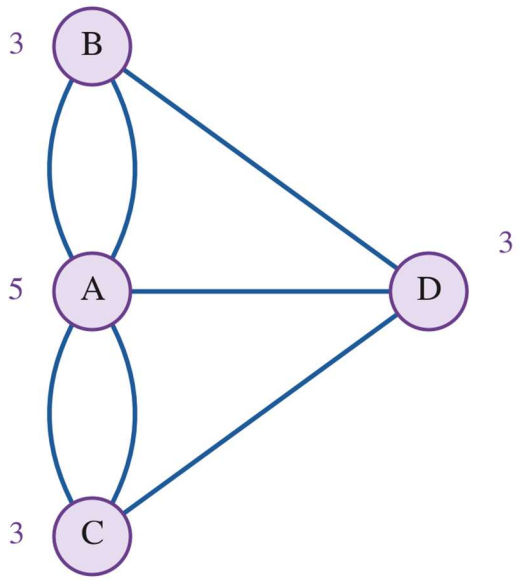
Suffisance. Supposons G connexe (avec au moins une arête) à degrés tous pairs, et soit W une chaîne de longueur maximale ne répétant aucune arête (il y en a un nombre fini). Si W n'était pas fermée, son extrémité finale v serait incidente à un nombre impair d'arêtes de W (deux par passage intermédiaire, une pour l'arrivée finale) ; $\deg(v)$ étant pair, il resterait une arête non utilisée en v, qui prolongerait W : absurde. Donc W est fermée. Si une arête xy n'était pas utilisée par W, la connexité fournirait une arête non utilisée incidente à un sommet u de W (si x n'est pas sur W, un chemin de x vers un sommet de W contient une arête joignant un sommet hors de W à un sommet de W, qui n'est pas dans W). En faisant commencer et finir le circuit W en u et en le prolongeant par cette arête, on obtiendrait une chaîne plus longue sans arête répétée : absurde. Donc W est un circuit eulérien.

Enfin, si exactement deux sommets a et b sont de degré impair, on ajoute un nouveau sommet z relié à a et à b : le graphe obtenu est connexe à degrés tous pairs, donc possède un circuit eulérien ; en retirant de ce circuit le sommet z et ses deux arêtes, on obtient une chaîne eulérienne de a à b. ■



Un circuit eulérien dans un graphe dont tous les sommets sont de degré pair : les arêtes sont numérotées dans l'ordre du parcours.

Exemple 10.3.3 (Les ponts de Königsberg). *La ville comporte quatre quartiers reliés par sept ponts, les degrés valant $3,3,3,5$. Quatre sommets de degré impair : il n'existe ni circuit, ni même chaîne eulérienne. On ne peut pas traverser chaque pont exactement une fois.*



Les ponts de Königsberg : quatre quartiers (sommets) et sept ponts (arêtes). Les degrés 3, 3, 3 et 5 sont tous impairs.

10.4 Graphes bipartis et couplages

Proposition 10.4.1 (Caractérisation des graphes bipartis)

Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

Démonstration. *Nécessité.* Dans un graphe biparti, les sommets d'un cycle alternent entre X et Y ; revenir au point de départ exige un nombre pair de pas.

Suffisance. Observons d'abord qu'**une marche fermée de longueur impaire contient un cycle impair** : par récurrence sur la longueur, si la marche $w_0 w_1 \cdots w_\ell = w_0$ ne repasse par aucun sommet, c'est un cycle ; sinon, si $w_i = w_j$ avec $0 < j - i < \ell$, elle se coupe en deux marches fermées de longueurs $j - i$ et $\ell - (j - i)$, dont l'une est impaire et plus courte. (Une marche fermée de longueur 1 est impossible, et une de longueur 3 sans répétition est un triangle.)

Supposons G connexe (sinon on raisonne composante par composante) sans cycle impair, fixons v_0 et plaçons dans X les sommets à distance paire de v_0, dans Y les autres. Si une arête uw reliait deux sommets de même parité, la marche formée d'un plus court chemin de v_0 à u, de l'arête uw et d'un plus court chemin de w à v_0 serait fermée de longueur $d(u) + d(w) + 1$, impaire : elle contiendrait un cycle impair. ■

Définition 10.4.2 (Couplage)

Un couplage est un ensemble d'arêtes deux à deux disjointes. Dans un graphe biparti $G = (X \sqcup Y, E)$, un couplage saturant X associe à chaque sommet de X un partenaire distinct dans Y.

Théorème 10.4.3 (Théorème de Hall)

Soit $G = (X \sqcup Y, E)$ biparti. Il existe un couplage saturant X si et seulement si

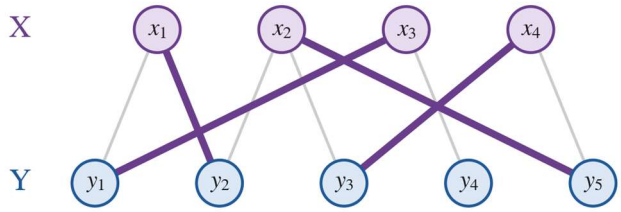
$$\forall S \subseteq X, \quad |N(S)| \geq |S|,$$

où $N(S)$ désigne l'ensemble des voisins des sommets de S.

Démonstration. La condition est clairement nécessaire. Réciproquement, récurrence forte sur $|X|$.

Cas 1 : $|N(S)| \geq |S| + 1$ pour toute partie propre non vide $S \subsetneq X$. Choisissons une arête xy quelconque et retirons x et y. Pour toute partie $S \subseteq X\backslash\{x\}$, on a $|N(S)| \geq |S| + 1$ dans G, donc $\geq |S|$ après suppression de y : la condition de Hall est préservée et l'hypothèse de récurrence fournit un couplage de $X\backslash\{x\}$, qu'on complète par xy.

Cas 2 : il existe $\varnothing \neq S \subsetneq X$ avec $|N(S)| = |S|$. Par récurrence, S admet un couplage vers $N(S)$ (la condition de Hall est héritée). Considérons ensuite le graphe induit sur $(X\backslash S) \sqcup \big(Y\backslash N(S)\big)$: pour $T \subseteq X\backslash S$, on a $|N(T)\backslash N(S)| = |N(S \cup T)| - |N(S)| \geq |S \cup T| - |S| = |T|$. La condition de Hall vaut encore, d'où un couplage de $X\backslash S$ disjoint du précédent. ■



Un graphe biparti vérifiant la condition de Hall et un couplage saturant X (arêtes épaisses) : chaque sommet de X reçoit un partenaire distinct dans Y.

Corollaire 10.4.4 (Graphes bipartis réguliers)

Tout graphe biparti k-régulier ($k \geq 1$) possède un couplage parfait.

Démonstration. Le comptage des arêtes issues de X et arrivant dans Y donne $k|X| = m = k|Y|$, donc $|X| = |Y|$. Pour $S \subseteq X$, les $k|S|$ arêtes issues de S aboutissent dans $N(S)$, qui en reçoit au plus $k|N(S)|$: d'où $|N(S)| \geq |S|$. Hall conclut. ■

Exemple 10.4.5 (Le jeu de cartes). *Un jeu de* 52 *cartes est réparti en* 13 *paquets de* 4 *cartes. Montrer qu'on peut choisir une carte dans chaque paquet de manière à obtenir les* 13 *valeurs (as,* 2*, …, roi).*

Solution. Construisons le graphe biparti $X =$ paquets, $Y =$ valeurs, avec une arête si le paquet contient au moins une carte de cette valeur. Pour $S \subseteq X$, les $4|S|$ cartes des paquets de S portent des valeurs de $N(S)$, et chaque valeur n'existe qu'en 4 exemplaires : $4|S| \leq 4|N(S)|$, donc $|N(S)| \geq |S|$. Hall fournit le couplage.

10.5 Graphes planaires

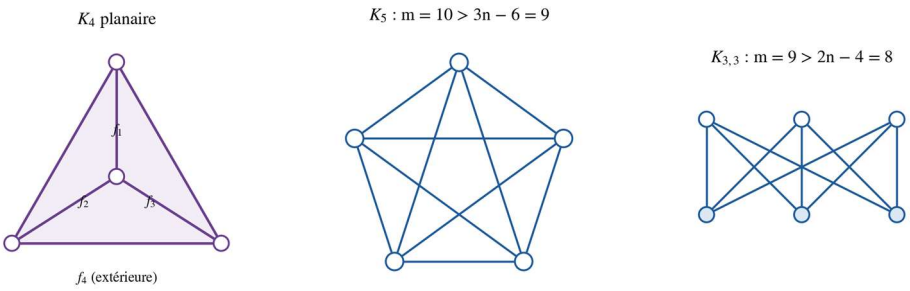
Définition 10.5.1 (Graphe planaire)

Un graphe est planaire s'il peut être dessiné dans le plan sans que deux arêtes se croisent. Un tel dessin découpe le plan en faces (dont une non bornée).

Théorème 10.5.2 (Formule d'Euler)

Pour tout graphe planaire connexe dessiné dans le plan, avec n sommets, m arêtes et f faces : $n - m + f = 2$.

Démonstration. Récurrence sur m. Si G est un arbre, $m = n - 1$ et $f = 1$ (un arbre dessiné ne sépare pas le plan) : la formule est vérifiée. Sinon G contient un cycle ; une arête e de ce cycle sépare deux faces distinctes (le cycle est une courbe fermée simple qui, par le théorème de Jordan, sépare le plan en deux régions, et les deux côtés de e sont dans des régions différentes). En supprimant e, le graphe reste connexe et ces deux faces fusionnent : m et f diminuent chacun de 1, et $n - m + f$ est inchangé. (Les faits topologiques utilisés — théorème de Jordan pour les courbes polygonales — sont admis.) ■



À gauche, un dessin planaire de K_4 : n = 4, m = 6, f = 4 (dont la face extérieure) et 4 − 6 + 4 = 2. À droite, K_5 et $K_{3,3}$, qui ne sont pas planaires.

Corollaire 10.5.3 (Conséquences de la formule d'Euler)

Pour un graphe planaire simple à $n \geq 3$ sommets : $m \leq 3n - 6$. S'il est de plus sans triangle : $m \leq 2n - 4$. En particulier K_5 et $K_{3,3}$ ne sont pas planaires, et tout graphe planaire possède un sommet de degré au plus 5.

Démonstration. Quitte à ajouter des arêtes reliant les composantes connexes entre elles (ce qui préserve la planarité, augmente m et ne crée aucun triangle), on peut supposer G connexe. Si G est un arbre, $m = n - 1 \leq 2n - 4 \leq 3n - 6$ puisque $n \geq 3$. Sinon, le bord de chaque face contient un cycle, donc chaque face est bordée par au moins 3 arêtes, et chaque arête borde au plus 2 faces, d'où $3f \leq 2m$; en injectant dans la formule d'Euler, $n - m + \frac{2m}{3} \geq 2$, soit $m \leq 3n - 6$. Pour K_5 : $m = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6$. Sans triangle, chaque face a au moins 4 côtés, d'où $4f \leq 2m$ et $m \leq 2n - 4$; pour $K_{3,3}$: $m = 9 > 8$. Enfin, si tous les degrés valaient au moins 6, on aurait $2m \geq 6n$, soit $m \geq 3n > 3n - 6$. ■

10.6 Coloration

Définition 10.6.1 (Coloration, nombre chromatique)

Une coloration propre de G affecte à chaque sommet une couleur, deux sommets adjacents recevant des couleurs distinctes. Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le nombre minimal de couleurs nécessaires.

Proposition 10.6.2 (Coloration gloutonne)

Pour tout graphe, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Démonstration. Colorions les sommets un à un dans un ordre quelconque : au moment de colorier v, ses voisins déjà coloriés occupent au plus $\Delta(G)$ couleurs, il en reste donc une disponible parmi $\Delta(G) + 1$. ■

À retenir (Résultats à connaître)

- **Brooks (1941)** : si G est connexe et n'est ni complet ni un cycle impair, alors $\chi(G) \leq \Delta(G)$.
- **Théorème des quatre couleurs** (Appel–Haken, 1976) : tout graphe planaire vérifie $\chi(G) \leq 4$. Ces deux théorèmes sont admis (le second repose sur une vérification par ordinateur). La version « cinq couleurs », elle, est démontrée ci-dessous.
- $\chi(G) = 2$ si et seulement si G est biparti (et possède au moins une arête) : une coloration à deux couleurs est exactement une bipartition $X \sqcup Y$.

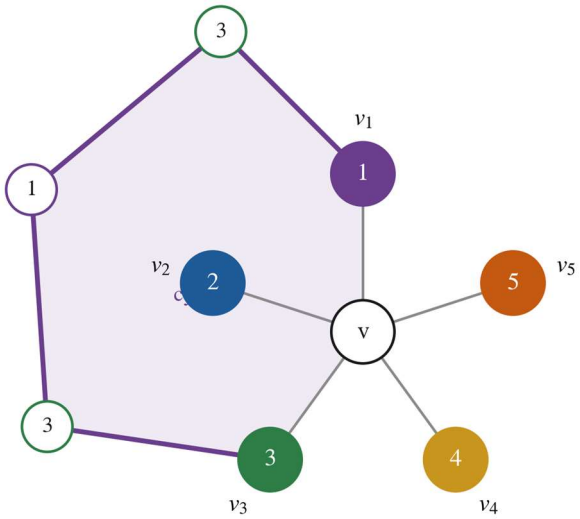
Théorème 10.6.3 (Théorème des cinq couleurs)

Tout graphe planaire vérifie $\chi(G) \leq 5$.

Démonstration. Récurrence sur n ; c'est clair si $n \leq 5$. Soit G planaire à $n \geq 6$ sommets, dessiné dans le plan. Par le corollaire 10.5.3, il possède un sommet v de degré au plus 5. Par hypothèse de récurrence, $G - v$ admet une coloration propre à 5 couleurs. Si les voisins de v utilisent au plus 4 couleurs, on colorie v avec la cinquième. Sinon v a exactement cinq voisins $v_1, \ldots, v_5$, rangés dans l'ordre où leurs arêtes partent de v dans le dessin, de couleurs respectives $1, \ldots, 5$.

Soit H_{13} le sous-graphe induit par les sommets de couleurs 1 et 3. Si v_1 et v_3 sont dans des composantes connexes différentes de H_{13}, on échange les couleurs 1 et 3 dans la composante de v_1 (**chaîne de Kempe**) : la coloration reste propre, v_1 prend la couleur 3, v_3 garde la sienne, et la couleur 1 devient libre pour v.

Sinon, un chemin de v_1 à v_3 colorié en 1 et 3, complété par $v_3 v$ et $v v_1$, forme un cycle C. Par l'ordre circulaire des voisins, v_2 et v_4 sont l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur de C (théorème de Jordan, admis). Tout chemin de v_2 à v_4 rencontre donc C, en un sommet de couleur 1 ou 3 (ou en v, absent de $G - v$) : v_2 et v_4 sont dans des composantes différentes de H_{24}. On échange alors les couleurs 2 et 4 dans la composante de v_2, ce qui libère la couleur 2 pour v. ■



Chaînes de Kempe dans la preuve du théorème des cinq couleurs : un chemin coloré 1–3 de v_1 à v_3 forme avec v un cycle qui sépare v_2 de v_4 ; la chaîne 2–4 issue de v_2 ne peut atteindre v_4.

10.7 Exercices

Exercice 10.1 ★. Dans un groupe de 9 personnes, est-il possible que chacune connaisse exactement 3 autres personnes ?

Exercice 10.2 ★★. Montrer qu'un graphe à n sommets dont tous les degrés sont $\geq \frac{n-1}{2}$ est connexe.

Exercice 10.3 ★★. Montrer que tout graphe connexe possédant au moins deux sommets contient un sommet dont la suppression laisse le graphe connexe.

Exercice 10.4 ★★. Un graphe possède n sommets et n arêtes. Montrer qu'il contient un cycle.

Exercice 10.5 ★★★. Soit $G = (X \sqcup Y, E)$ un graphe biparti sans sommet isolé dans X, tel que $\deg(x) \geq \deg(y)$ pour toute arête xy avec $x \in X$, $y \in Y$. Montrer que G possède un couplage saturant X.

Exercice 10.6 ★★★. Les arêtes de K_6 sont coloriées en rouge ou en bleu. Montrer qu'il existe un triangle monochrome. Montrer que ce n'est plus vrai pour K_5.

Exercice 10.7 ★★★. Montrer que tout graphe planaire admet une coloration propre avec 5 couleurs.

Exercice 10.8 ★★★★. Dans une réunion de $2n+1$ personnes, pour tout groupe de n personnes il existe, parmi les $n+1$ autres, quelqu'un qui les connaît toutes. Montrer qu'il existe une personne qui connaît tout le monde.

10.8 Corrigés

Solution de l'exercice 10.1. Non : la somme des degrés vaudrait $9 \times 3 = 27$, un nombre impair, alors qu'elle doit valoir $2m$.

Solution de l'exercice 10.2. Supposons G non connexe et soient C une composante connexe de cardinal k et $v \in C$. Tous les voisins de v sont dans C, donc $k - 1 \geq \deg(v) \geq \frac{n-1}{2}$, soit $k \geq \frac{n+1}{2}$. Le

même raisonnement s'applique à une autre composante C' : $|C'| \geq \frac{n+1}{2}$. D'où $n \geq |C| + |C'| \geq n+1$, absurde.

Solution de l'exercice 10.3. Considérons un chemin $v_0 v_1 \cdots v_k$ de longueur maximale dans G (avec $k \geq 1$ puisque G est connexe et possède au moins deux sommets). Tous les voisins de v_0 sont sur ce chemin. Supprimons v_0 : tout sommet $u \neq v_0$ reste relié à v_1. En effet, un chemin de u à v_1 dans G qui passerait par v_0 y arriverait et en repartirait par des voisins de v_0, tous situés sur le chemin maximal, donc reliés entre eux le long de ce chemin sans passer par v_0. Ainsi $G - v_0$ est connexe.

> **Remarque.**
> Variante plus courte : prendre une feuille d'un arbre couvrant de G.

Solution de l'exercice 10.4. Si G était sans cycle, ce serait une forêt ; une forêt à n sommets et $c \geq 1$ composantes a exactement $n - c \leq n - 1$ arêtes, ce qui contredit $m = n$.

Solution de l'exercice 10.5. Vérifions la condition de Hall par un double comptage pondéré. Soit $S \subseteq X$; toute arête issue de S aboutit dans $N(S)$. Comme $\deg(x) \geq 1$ pour tout $x \in X$,

$$|S| = \sum_{x \in S} 1 = \sum_{x \in S} \sum_{y \sim x} \frac{1}{\deg(x)} = \sum_{\substack{xy \in E \\ x \in S}} \frac{1}{\deg(x)} \leq \sum_{\substack{xy \in E \\ x \in S}} \frac{1}{\deg(y)},$$

et

$$\sum_{\substack{xy \in E \\ x \in S}} \frac{1}{\deg(y)} \leq \sum_{y \in N(S)} \sum_{x \sim y} \frac{1}{\deg(y)} = \sum_{y \in N(S)} 1 = |N(S)|,$$

où la première inégalité utilise $\deg(x) \geq \deg(y)$ pour toute arête xy. La condition de Hall est satisfaite : il existe un couplage saturant X.

Solution de l'exercice 10.6. Fixons un sommet v de K_6 : il possède 5 arêtes, donc au moins 3 de la même couleur, disons rouges, vers a, b, c. Si l'une des arêtes ab, bc, ca est rouge, elle forme un triangle rouge avec v ; sinon abc est un triangle bleu.

Pour K_5, le contre-exemple est le pentagone : colorions en rouge les côtés du pentagone régulier $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$ et en bleu ses diagonales. Les côtés forment un cycle de longueur 5 (sans triangle) et les diagonales aussi : aucun triangle monochrome.

Solution de l'exercice 10.7. Récurrence sur n, le résultat étant clair pour $n \leq 5$. Soit G planaire à n sommets ; il possède un sommet v de degré ≤ 5. Par récurrence, $G - v$ se colorie avec 5 couleurs.

Si $\deg(v) \leq 4$, ou si les voisins de v n'utilisent pas les 5 couleurs, on colorie v avec une couleur libre. Sinon v a exactement 5 voisins $v_1, \ldots, v_5$ (dans l'ordre cyclique du dessin), de couleurs $1, \ldots, 5$. Considérons le sous-graphe H_{13} induit par les sommets de couleurs 1 et 3. Si v_1 et v_3 sont dans des composantes connexes différentes de H_{13}, on échange les couleurs 1 et 3 dans la composante de v_1 : la coloration reste propre et la couleur 1 devient libre pour v. Sinon, il existe une chaîne de v_1 à v_3 n'utilisant que les couleurs 1 et 3 ; refermée par v, elle forme un cycle qui sépare v_2 de v_4 (planarité). Le même argument appliqué à H_{24} fonctionne alors : v_2 et v_4 sont dans des composantes distinctes de H_{24}, et en échangeant les couleurs 2 et 4 dans la composante de v_2, on libère la couleur 2 pour v.

Solution de l'exercice 10.8. Travaillons dans le graphe complémentaire H : les sommets sont les $2n+1$ personnes, et uv est une arête de H lorsque u et v ne se connaissent pas. L'hypothèse se

traduit ainsi : pour toute partie S de n sommets, il existe $Q \notin S$ n'ayant aucun voisin dans S (au sens de H). La conclusion cherchée est : H possède un sommet isolé.

Supposons que H n'ait aucun sommet isolé et montrons qu'il existe alors une partie S de n sommets dominante pour H, c'est-à-dire telle que tout sommet hors de S ait un voisin dans S : ce sera la contradiction voulue.

Lemme (Ore). Si H n'a aucun sommet isolé et si D est un ensemble dominant minimal de H (aucune de ses parties propres n'est dominante), alors $V \backslash D$ est également dominant.

Preuve du lemme. Soit $v \in D$; montrons que v a un voisin hors de D. Sinon, tous les voisins de v sont dans D. Par minimalité, $D \backslash \{v\}$ n'est pas dominant : il existe w non dominé par $D \backslash \{v\}$, avec $w \notin D \backslash \{v\}$. Si $w = v$, alors v n'a aucun voisin dans $D \backslash \{v\}$, ni hors de D : v serait isolé, exclu. Si $w \neq v$, alors $w \notin D$ et le seul voisin de w dans D est v ; mais w est alors un voisin de v situé hors de D, contredisant l'hypothèse.

Appliquons ce lemme : H possède un ensemble dominant minimal D, et $V \backslash D$ est dominant aussi. L'un des deux a un cardinal $\leq \frac{2n+1}{2}$, donc $\leq n$. Complétons-le arbitrairement en une partie S de cardinal exactement n : S reste dominante, donc tout sommet hors de S possède un voisin dans S, c'est-à-dire ignore quelqu'un de S. Cela contredit l'hypothèse de l'énoncé.

Donc H possède un sommet isolé : cette personne connaît tout le monde.

À retenir (L'essentiel du chapitre)

- $\sum_v \deg(v) = 2m$: le premier réflexe de tout problème de graphe.
- Arbre ⇔ connexe sans cycle ⇔ connexe à $n-1$ arêtes ; tout arbre à au moins deux sommets a une feuille (à retirer pour récurrer).
- Euler : circuit eulérien ⇔ tous les degrés pairs (pour un graphe connexe).
- Hall : couplage saturant X ⇔ $|N(S)| \geq |S|$ pour tout $S \subseteq X$.
- Planaire : $n - m + f = 2$, donc $m \leq 3n - 6$ et un sommet de degré ≤ 5.
- Pour majorer χ : glouton ($\Delta + 1$) ; pour minorer : exhiber une clique ou un cycle impair.

CHAPITRE 11

11 Combinatoire extrémale

Objectifs du chapitre. Répondre aux questions du type « quelle est la taille maximale d'une structure n'ayant pas telle propriété ? ». Théorèmes de Mantel et Turán, théorie de Ramsey, théorèmes de Sperner et d'Erdős–Ko–Rado, chaînes et antichaînes. Ce sont des théorèmes que l'on redémontre dans un problème d'OIM plus qu'on ne les cite.

11.1 Le problème de Turán

Théorème 11.1.1 (Mantel)

Un graphe à n sommets sans triangle possède au plus $\lfloor n^2/4 \rfloor$ arêtes. Cette borne est atteinte par le graphe biparti complet $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$.

Démonstration. Soit G sans triangle et uv une arête. Comme u et v n'ont aucun voisin commun, $\deg(u) + \deg(v) \leq n$. En sommant sur les m arêtes :

$$\sum_{uv \in E} (\deg u + \deg v) = \sum_{w \in V} \deg(w)^2 \leq nm.$$

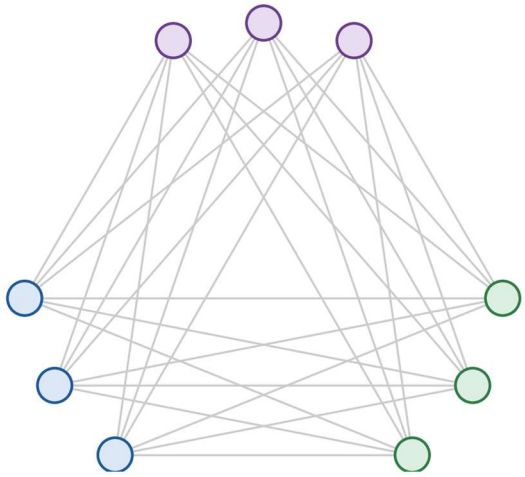
Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, $\sum_w \deg(w)^2 \geq \frac{(\sum_w \deg w)^2}{n} = \frac{4m^2}{n}$. D'où $\frac{4m^2}{n} \leq nm$, soit $m \leq \frac{n^2}{4}$, et donc $m \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$ puisque m est entier. ■

Théorème 11.1.2 (Turán)

Soit $r \geq 2$. Un graphe à n sommets ne contenant pas K_{r+1} possède au plus $\left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}$ arêtes. La borne est atteinte par le graphe r-parti complet équilibré (graphe de Turán) lorsque r divise n.

Démonstration. Récurrence sur n. Pour $n \leq r$, $m \leq \frac{n(n-1)}{2} \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}$ (car $\frac{n-1}{n} \leq \frac{r-1}{r}$). Soit $n \geq r+1$; il suffit de majorer le nombre d'arêtes d'un graphe G sans K_{r+1} ayant un nombre maximal d'arêtes. Alors G contient une clique A à r sommets : sinon, G n'étant pas complet (il contiendrait K_{r+1}), on pourrait lui ajouter une arête uv ; un K_{r+1} du nouveau graphe contiendrait uv, et en lui retirant u on obtiendrait un K_r de G : contradiction avec la maximalité. Chaque sommet hors de A a au plus $r-1$ voisins dans A (sinon K_{r+1}). Le graphe $G - A$ est sans K_{r+1} et possède $n - r$ sommets, donc au plus $\left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{(n-r)^2}{2}$ arêtes. Au total :

$$m \leq \binom{r}{2} + (n-r)(r-1) + \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{(n-r)^2}{2} = \frac{r-1}{2r}\left[r^2 + 2r(n-r) + (n-r)^2\right] = \frac{r-1}{2r}\,n^2. \quad ■$$



Le graphe de Turán T(9, 3) : trois classes de 3 sommets, toutes les arêtes entre classes différentes. Il a 27 = (1 − 1/3) · 9²/2 arêtes et ne contient pas K_4 (deux des quatre sommets seraient dans la même classe).

À retenir (À quoi sert Turán en olympiade ?)

Rarement à être cité : presque toujours à être réutilisé. Retenez surtout les deux mécanismes de sa preuve :

- sommer $\deg u + \deg v$ sur les arêtes, puis Cauchy–Schwarz ;
- extraire une clique maximale et compter les arêtes vers l'extérieur.

Et la contraposée, très utile : beaucoup d'arêtes ⇒ grosse clique.

11.2 Théorie de Ramsey

Définition 11.2.1 (Nombres de Ramsey)

$R(s,t)$ est le plus petit entier N tel que tout coloriage des arêtes de K_N en rouge et bleu contienne un K_s rouge ou un K_t bleu.

Théorème 11.2.2 (Ramsey ; majoration d'Erdős–Szekeres)

$R(s,t)$ existe pour tous $s,t \geq 2$, et

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1) \leq \binom{s+t-2}{s-1}.$$

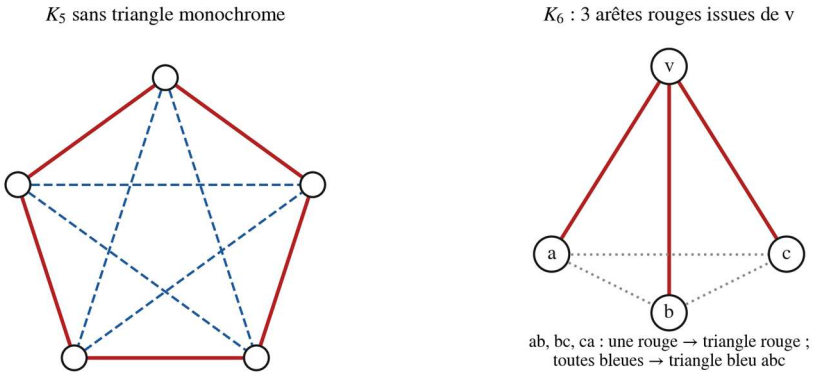
En particulier $R(k,k) \leq 4^k$.

Démonstration. Posons $N = R(s-1,t) + R(s,t-1)$ et colorions K_N. Fixons un sommet v : ses $N-1$ arêtes se répartissent en r rouges et b bleues avec $r + b = N - 1 = R(s-1,t) + R(s,t-1) - 1$. Donc $r \geq R(s-1,t)$ ou $b \geq R(s,t-1)$.

Dans le premier cas, parmi les voisins rouges de v on trouve un K_{s-1} rouge (qui, avec v, donne un K_s rouge) ou un K_t bleu. Le second cas est symétrique. L'existence de $R(s,t)$ s'obtient ainsi par récurrence sur $s+t$, à partir de $R(s,2) = s$ et $R(2,t) = t$ (dans K_s bicolore, ou bien toutes les arêtes sont rouges, ou bien une arête bleue forme un K_2 bleu). La majoration binomiale s'obtient par la

même récurrence : $R(s,t) \leq \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1}$ (Pascal), les cas de base étant $\binom{s}{s-1} = s$ et $\binom{t}{1} = t$. Enfin $R(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq 4^{k-1}$. ■

Exemple 11.2.3 ($R(3,3)=6$). *Dans K_6 bicolore, un sommet v possède 5 arêtes, donc au moins 3 de la même couleur, disons rouges, vers a, b, c : soit l'une des arêtes ab, bc, ca est rouge (triangle rouge avec v), soit abc est un triangle bleu. Le pentagone (côtés rouges, diagonales bleues) montre que 5 ne suffit pas : $R(3,3) = 6$.*



À gauche : K_5 colorié sans triangle monochrome (côtés rouges, diagonales bleues). À droite : dans K_6, un sommet v a au moins 3 arêtes de même couleur, vers a, b, c ; le triangle abc crée alors un triangle monochrome.

Théorème 11.2.4 (Erdős–Szekeres)

Toute suite de $mn + 1$ réels deux à deux distincts contient une sous-suite croissante de longueur $m + 1$ ou une sous-suite décroissante de longueur $n + 1$.

Démonstration. À chaque terme a_i associons le couple (c_i, d_i) où c_i est la longueur de la plus longue sous-suite croissante commençant en a_i, et d_i celle de la plus longue décroissante commençant en a_i. Si $i < j$, alors $a_i < a_j$ entraîne $c_i > c_j$ (on place a_i devant une plus longue sous-suite croissante commençant en a_j), et de même $a_i > a_j$ entraîne $d_i > d_j$: les couples (c_i, d_i) sont deux à deux distincts. Si aucune sous-suite croissante de longueur $m + 1$ ni décroissante de longueur $n + 1$ n'existait, on aurait $c_i \in [\![1, m]\!]$ et $d_i \in [\![1, n]\!]$, soit au plus mn couples pour $mn + 1$ indices : contradiction avec le principe des tiroirs. ■

À retenir (Le message de Ramsey)

Le désordre total est impossible. Toute structure suffisamment grande contient une sous-structure parfaitement ordonnée. En olympiade, dès qu'un énoncé fait apparaître deux catégories (amis / inconnus, rouge / bleu, croissant / décroissant) et un cardinal « suspect » (6, 9, 17, $mn + 1$), pensez Ramsey.

11.3 Familles d'ensembles

Définition 11.3.1 (Antichaîne)

Une famille $\mathcal{F}$ de parties de $[\![1, n]\!]$ est une antichaîne si aucun de ses membres n'est inclus dans un autre.

Théorème 11.3.2 (Sperner ; inégalité LYM)

Si $\mathcal{F}$ est une antichaîne de parties de $[\![1,n]\!]$, alors

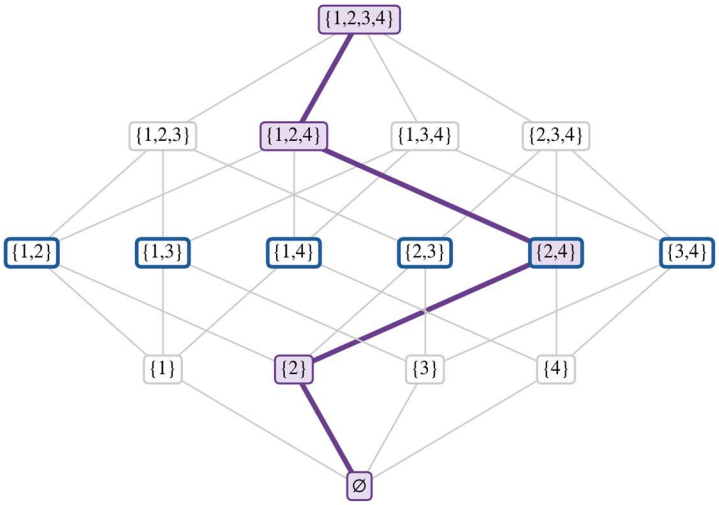
$$\sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \le 1, \qquad \text{donc} \qquad |\mathcal{F}| \le \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}.$$

Démonstration. Appelons chaîne maximale une suite $\varnothing = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_n = [\![1,n]\!]$ avec $|C_i| = i$; il y en a exactement $n!$ (une par permutation). Une chaîne maximale contient une unique partie de chaque cardinal, donc au plus un membre de l'antichaîne $\mathcal{F}$.

Comptons de deux façons les couples (C, A) où C est une chaîne maximale et $A \in \mathcal{F} \cap C$. D'une part ce nombre est $\le n!$. D'autre part, une partie A de cardinal k appartient à exactement $k!\,(n-k)!$ chaînes maximales. D'où

$$\sum_{A\in\mathcal{F}} |A|!\,(n-|A|)! \le n!,$$

ce qui est exactement l'inégalité LYM après division par $n!$. Comme $\binom{n}{k} \le \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ pour tout k, on en déduit $|\mathcal{F}| \le \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$. ∎



Le treillis des parties de {1, 2, 3, 4} : une chaîne maximale (en couleur) monte de ∅ à {1, 2, 3, 4} en ajoutant un élément à la fois ; la couche du milieu (6 parties, encadrées) est une antichaîne de taille maximale C(4, 2).

Théorème 11.3.3 (Erdős–Ko–Rado)

Soient $n \ge 2k$ et $\mathcal{F}$ une famille de parties de $[\![1,n]\!]$, toutes de cardinal k, deux à deux d'intersection non vide. Alors

$$|\mathcal{F}| \le \binom{n-1}{k-1},$$

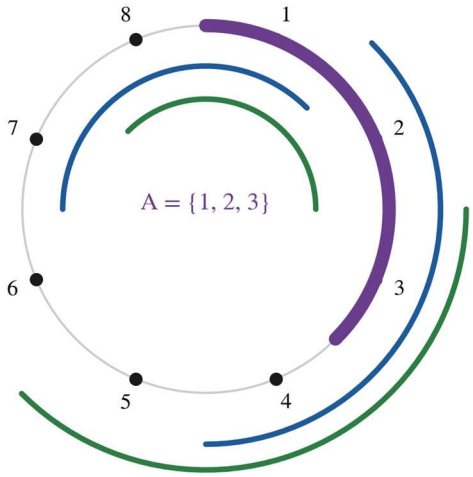
borne atteinte par la famille de toutes les parties de cardinal k contenant un élément fixé.

Démonstration (preuve de Katona, par double comptage). Considérons les $(n-1)!$ dispositions circulaires des n éléments. Comptons les couples (σ, A) où σ est une disposition circulaire et $A \in \mathcal{F}$ occupe k positions consécutives sur le cercle (on dit que A est un arc de σ).

Pour σ fixée, au plus k membres de $\mathcal{F}$ sont des arcs. En effet, supposons qu'un membre A de $\mathcal{F}$ soit un arc, occupant les positions $1, \dots, k$ (numérotées le long du cercle). Tout autre membre de $\mathcal{F}$ qui est un arc rencontre A ; c'est donc, pour un $i \in [\![1, k-1]\!]$, soit l'arc « finissant en i » (positions $i-k+1, \dots, i$), soit l'arc « commençant en $i+1$ » (positions $i+1, \dots, i+k$). Ces deux arcs sont disjoints puisque $n \geq 2k$: un seul des deux peut appartenir à $\mathcal{F}$. D'où au plus $1 + (k-1) = k$ arcs.

Pour A fixé, le nombre de dispositions circulaires où A est un arc vaut $k!\ (n-k)!$ (on ordonne le bloc A, puis on dispose circulairement le bloc et les $n-k$ autres éléments). D'où

$|\mathcal{F}| \cdot k!\ (n-k)! \leq k\,(n-1)!$, c'est-à-dire $|\mathcal{F}| \leq \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$. ■



La preuve de Katona pour n = 8, k = 3 : l'arc A (en couleur) et, pour chaque frontière intérieure de A, les deux arcs disjoints qui la chevauchent ; un seul arc de chaque paire peut appartenir à la famille.

À retenir (Mirsky et Dilworth)

Soit $(P, \leq)$ un ensemble fini partiellement ordonné.

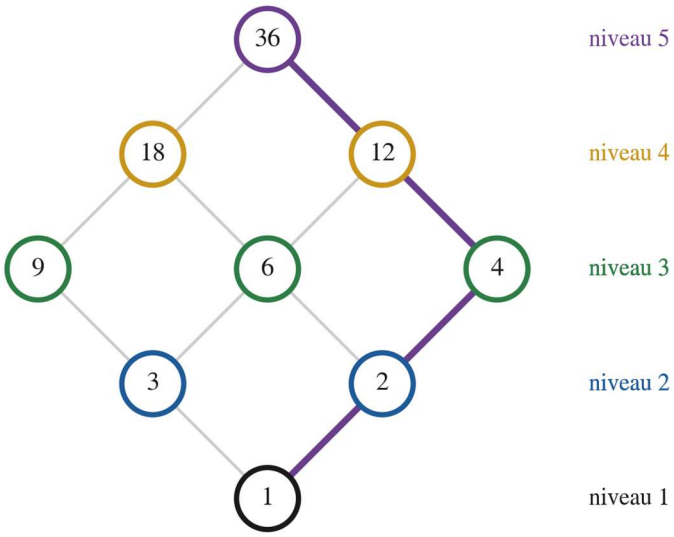
- **Mirsky** : si la plus longue chaîne a h éléments, P se partitionne en h antichaînes.
- **Dilworth** : si la plus grande antichaîne a a éléments, P se partitionne en a chaînes.

Mirsky. Pour $x \in P$, notons $\lambda(x)$ la longueur maximale d'une chaîne de plus grand élément x. Alors λ prend ses valeurs dans $[\![1, h]\!]$ et $x < y \Rightarrow \lambda(x) < \lambda(y)$: chaque niveau $\lambda^{-1}(i)$ est une antichaîne (si $x < y$, une chaîne maximale finissant en x, prolongée par y, montre $\lambda(y) \geq \lambda(x) + 1$).

Dilworth (démonstration de Galvin). Une antichaîne rencontre chaque chaîne en au plus un élément, donc il faut au moins a chaînes ; montrons que a suffisent, par récurrence sur $|P|$ (le cas $P = \varnothing$ est clair). Soit x un élément maximal de P et $P' = P \backslash \{x\}$, de largeur k (taille maximale d'une antichaîne) ; par hypothèse de récurrence, P' est réunion de k chaînes disjointes $C_1, \dots, C_k$. Toute antichaîne de taille k de P' rencontre chaque C_i en exactement un point. Soit x_i le plus grand élément de C_i appartenant à une antichaîne de taille k de P'. Alors $\{x_1, \dots, x_k\}$ est une antichaîne : si l'on avait $x_i < x_j$, une antichaîne de taille k contenant x_j rencontrerait C_i en un $y \leq x_i$ (définition de x_i), et l'on aurait $y < x_j$ dans une antichaîne : absurde.

- Si $\{x, x_1, \dots, x_k\}$ est une antichaîne, P est de largeur $k+1$ et se partitionne en les $k+1$ chaînes $C_1, \dots, C_k, \{x\}$.

- Sinon, x est comparable à un x_i, donc $x > x_i$ (x est maximal). La partie $K = \{x\} \cup \{z \in C_i : z \leq x_i\}$ est une chaîne. Dans $P \backslash K$, il n'y a plus d'antichaîne de taille k : une telle antichaîne serait dans P' et rencontrerait C_i en un point $\leq x_i$, donc dans K. Par hypothèse de récurrence, $P \backslash K$ est réunion de $k-1$ chaînes ; avec K, on obtient k chaînes, et P est de largeur k (il contient $\{x_1, \ldots, x_k\}$).



Les diviseurs de 36 ordonnés par divisibilité : la plus longue chaîne 1 | 2 | 4 | 12 | 36 a 5 éléments, et les 5 niveaux λ (couleurs) sont des antichaînes ; la plus grande antichaîne {4, 6, 9} a 3 éléments, et 3 chaînes suffisent.

Remarque.

Un ensemble ordonné de $mn+1$ éléments contient une chaîne de $m+1$ éléments ou une antichaîne de $n+1$ éléments : sinon, par Mirsky, il se partitionne en au plus m antichaînes, dont l'une a au moins $n+1$ éléments (tiroirs). C'est Erdős–Szekeres en habit d'ordre partiel.

11.4 Exercices

Exercice 11.1 ★★. Montrer que tout graphe à n sommets possédant strictement plus de $\frac{n^2}{4}$ arêtes contient un triangle, et que la borne $\lfloor n^2/4 \rfloor$ est optimale.

Exercice 11.2 ★★. Montrer que toute famille de $n+1$ entiers choisis dans $[\![1,2n]\!]$ contient deux entiers dont l'un divise l'autre. En déduire la taille maximale d'une famille d'entiers de $[\![1,2n]\!]$ deux à deux non divisibles.

Exercice 11.3 ★★. Montrer que parmi $n+1$ entiers de $[\![1,2n]\!]$, deux au moins sont premiers entre eux.

Exercice 11.4 ★★★. Montrer que $R(3,4) \leq 9$.

Exercice 11.5 ★★★. Soit $\mathcal{F}$ une famille de parties de $[\![1,n]\!]$ deux à deux d'intersection non vide. Montrer que $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$, et que la borne est atteinte.

Exercice 11.6 ★★★ (Klein). Montrer que parmi cinq points du plan en position générale (trois jamais alignés), quatre forment toujours un quadrilatère convexe.

Exercice 11.7 ★★★★. Soit S un ensemble de n points du plan. Montrer que le nombre de paires de points de S situés à distance exactement 1 est au plus $n^{3/2}$.

Exercice 11.8 ★★★★. Soit $\mathcal{F}$ une antichaîne de parties de $[\![1,n]\!]$ telle que tout membre ait un cardinal compris entre k et $n-k$. Montrer que $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ et discuter le cas d'égalité.

11.5 Corrigés

Solution de l'exercice 11.1. C'est le théorème de Mantel démontré dans le cours, dans sa forme contraposée. Pour l'optimalité, le graphe biparti complet $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$ est sans triangle (tout triangle aurait deux sommets dans la même part) et possède $\lfloor n/2 \rfloor \cdot \lceil n/2 \rceil = \lfloor n^2/4 \rfloor$ arêtes.

Solution de l'exercice 11.2. Écrivons chaque entier $x \in [\![1,2n]\!]$ sous la forme $x = 2^\alpha q$ avec q impair. Il y a exactement n valeurs impaires possibles pour q dans $[\![1,2n]\!]$, à savoir $1,3,\ldots,2n-1$. Avec $n+1$ entiers, deux d'entre eux ont la même partie impaire q : $x = 2^\alpha q$ et $y = 2^\beta q$ avec $\alpha < \beta$, donc $x \mid y$.

Une famille deux à deux non divisible a donc au plus n éléments, et $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ montre que n est atteint (si $n+1 \leq x < y \leq 2n$ alors $y < 2x$, donc $x \nmid y$).

Solution de l'exercice 11.3. Répartissons $[\![1,2n]\!]$ en n paires d'entiers consécutifs $\{1,2\}, \{3,4\}, \ldots, \{2n-1, 2n\}$. Parmi $n+1$ entiers, deux appartiennent à la même paire : ce sont deux entiers consécutifs k et $k+1$, donc premiers entre eux.

Solution de l'exercice 11.4. Colorions les arêtes de K_9 en rouge et bleu et supposons qu'il n'y ait ni triangle rouge, ni K_4 bleu. Soit v un sommet, $r(v)$ son degré rouge et $b(v)$ son degré bleu, avec $r(v) + b(v) = 8$.

$r(v) \leq 3$: si $r(v) \geq 4$, quatre voisins rouges de v ne peuvent être reliés entre eux par une arête rouge (sinon triangle rouge) : ils formeraient un K_4 bleu.

$b(v) \leq 5$: si $b(v) \geq 6$, alors parmi ces six voisins bleus, $R(3,3) = 6$ fournit un triangle rouge (exclu) ou un triangle bleu, lequel forme avec v un K_4 bleu (exclu).

Donc $r(v) = 8 - b(v) \geq 3$ et $r(v) \leq 3$: tous les degrés rouges valent exactement 3. La somme des degrés rouges vaut alors $9 \times 3 = 27$, un nombre impair, ce qui contredit le lemme des poignées de main. Donc $R(3,4) \leq 9$.

Solution de l'exercice 11.5. Groupons les 2^n parties de $[\![1,n]\!]$ en 2^{n-1} paires $\{A, \complement A\}$. Comme $A \cap \complement A = \varnothing$, la famille $\mathcal{F}$ contient au plus un membre de chaque paire : $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$.

La borne est atteinte par la famille de toutes les parties contenant un élément fixé, de cardinal 2^{n-1} ; ou, si n est impair, par la famille des parties de cardinal $> n/2$.

Solution de l'exercice 11.6. Considérons l'enveloppe convexe des cinq points.

- Si elle a 4 ou 5 sommets, quatre d'entre eux forment un quadrilatère convexe.
- Si elle a 3 sommets A, B, C, les deux autres points D, E sont à l'intérieur du triangle. La droite (DE) laisse deux des sommets A, B, C du même côté, disons A et B. Alors A, B, D, E forment un quadrilatère convexe : D et E étant du même côté de (AB) et A, B du même côté de (DE), aucun des quatre points n'est intérieur au triangle formé par les trois autres.

Solution de l'exercice 11.7. Construisons le graphe des distances unité G : sommets $= S$, arêtes $=$ paires à distance 1. Notons m son nombre d'arêtes et $d(u)$ le degré de u. Comptons les « cerises »,

c'est-à-dire les triplets $(u; v, w)$ avec $v \neq w$ tous deux voisins de u (la paire $\{v, w\}$ n'étant pas ordonnée) : il y en a

$$\sum_{u \in S} \binom{d(u)}{2}.$$

Fixons la paire $\{v, w\}$: les sommets u voisins de v et de w sont sur l'intersection de deux cercles de rayon 1 distincts, qui compte au plus 2 points. Donc $\sum_{u \in S} \binom{d(u)}{2} \leq 2\binom{n}{2} = n(n-1)$.

La fonction $x \mapsto \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$ étant convexe, l'inégalité de Jensen donne, avec $\bar{d} = \frac{2m}{n}$ le degré moyen,

$$n \cdot \frac{\bar{d}(\bar{d}-1)}{2} \leq n(n-1) \Longrightarrow \bar{d}^2 - \bar{d} - 2(n-1) \leq 0 \Longrightarrow \bar{d} \leq \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}.$$

Pour $n \geq 2$, $\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \leq 2\sqrt{n}$, d'où $m = \frac{n\bar{d}}{2} \leq n^{3/2}$.

Solution de l'exercice 11.8. L'inégalité LYM démontrée dans le cours donne $\sum_{A \in \mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1$. Comme $\binom{n}{j} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ pour tout j, on obtient

$$\frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \leq \sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1.$$

L'égalité impose $\binom{n}{|A|} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ pour tout $A \in \mathcal{F}$: si n est pair, tous les membres ont pour cardinal $n/2$ et $\mathcal{F}$ est la famille entière des parties de cardinal $n/2$; si n est impair, $\mathcal{F}$ est constituée de parties de cardinal $\frac{n-1}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$, et l'on montre (par le théorème des mariages appliqué au graphe biparti d'inclusion entre ces deux niveaux) que $\mathcal{F}$ est l'un des deux niveaux complets.

À retenir (Ce qu'il faut retenir)

- Mantel/Turán : trop d'arêtes force une clique. Les deux mécanismes de preuve valent plus que les énoncés.
- Ramsey : $R(3,3) = 6$, $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$; Erdős–Szekeres et son couple (c_i, d_i).
- Sperner/LYM : compter les chaînes maximales.
- Erdős–Ko–Rado : la preuve de Katona — une disposition circulaire aléatoire — est le prototype du double comptage astucieux.
- Un problème extrémal se traite toujours en deux temps : une construction (la borne est atteinte) et une majoration (on ne peut pas faire mieux). N'en oubliez jamais la moitié.

CHAPITRE 12

12 Jeux mathématiques

Objectifs du chapitre. Décider qui gagne, et surtout le démontrer. Positions gagnantes et perdantes, stratégies de symétrie, vol de stratégie, jeu de Nim et théorie de Sprague–Grundy.

12.1 Le cadre

Définition 12.1.1 (Jeu impartial)

Deux joueurs jouent alternativement. Un jeu impartial vérifie :

- l'ensemble des coups autorisés ne dépend que de la position, pas du joueur ;
- aucune partie ne peut durer indéfiniment (pas de position répétée) ;
- le joueur qui ne peut plus jouer a perdu (convention normale).

Théorème 12.1.2 (Détermination)

Dans un jeu impartial fini, l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante.

Démonstration. Récurrence sur la longueur maximale ℓ d'une partie issue de la position courante. Si $\ell = 0$, le joueur au trait a perdu : le second joueur gagne. Si $\ell \geq 1$, chaque coup mène à une position de longueur $\leq \ell - 1$, pour laquelle l'hypothèse de récurrence s'applique. Si l'un des coups mène à une position perdante pour l'adversaire, le joueur au trait gagne en le jouant ; sinon tous les coups mènent à des positions gagnantes pour l'adversaire, et c'est l'adversaire qui a une stratégie gagnante. ■

Définition 12.1.3 (Positions P et N)

Une position est dite :

- P (*previous*, perdante pour celui qui doit jouer) si le joueur au trait perd face à un adversaire parfait ;
- N (*next*, gagnante) sinon.

Elles sont caractérisées par les règles suivantes : position finale $\in P$; position $\in N \Leftrightarrow$ au moins un coup mène à P ; position $\in P \Leftrightarrow$ tous les coups mènent à N.

Méthode 12.1.4 — Comment trouver les positions perdantes

1. Calculer les petits cas à la main : $0,1,2,3,4,\ldots$ jetons. On tabule P/N de proche en proche.
2. Conjecturer un motif (souvent une congruence, une parité, un ensemble de la forme $\{k(k+1)\}$, une écriture en base $2\ldots$).
3. Démontrer par la double règle : depuis un élément de P conjecturé, tout coup en sort ; depuis un élément hors de P, un coup y entre.

Ce schéma tabuler / conjecturer / vérifier les deux implications résout la grande majorité des problèmes de jeux posés en olympiade.

Exemple 12.1.5 (Jeu de Bachet). *Il y a n jetons ; chaque joueur retire de 1 à k jetons ; celui qui prend le dernier gagne. Qui gagne ?*

Solution. Affirmation : $P = \{n : (k+1) \mid n\}$. En effet, depuis un multiple de $k+1$, tout coup laisse un non-multiple (on retire entre 1 et k) ; depuis un non-multiple $n = q(k+1)+r$ avec $1 \leq r \leq k$, retirer r jetons laisse un multiple. Comme 0 est un multiple de $k+1$, la double règle est vérifiée. Le premier joueur gagne si et seulement si $(k+1) \nmid n$; sa stratégie est de laisser toujours un multiple de $k+1$.

Exemple 12.1.6 (Coups ${1,3,4}$). *Chaque joueur retire 1, 3 ou 4 jetons ; celui qui ne peut plus jouer perd.* Tabulons (P = perdante) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	P	N	P	N	N	N	N	P	N	P	N

Le motif est périodique de période 7 : $P = \{n \equiv 0 \text{ ou } 2 \pmod 7\}$. Vérifions les deux implications, en raisonnant modulo 7. Depuis $n \equiv 0$, les coups mènent à des restes $6,4,3$; depuis $n \equiv 2$, à $1,6,5$ (quand ils sont légaux) : jamais à 0 ou 2. Inversement, depuis $n \equiv 1$ (resp. 3, 4, 5, 6), retirer 1 (resp. 3, 4, 3, 4) jeton(s) — coup légal car n est au moins égal à son reste — mène à un reste 0 ou 2. Enfin la position 0 est finale, donc perdante.



Positions perdantes (P, en couleur) et gagnantes (N) du jeu de soustraction {1, 3, 4} pour 0 ≤ n ≤ 27 : le motif P N P N N N N se répète avec la période 7.

12.2 La stratégie de symétrie

Méthode 12.2.1 — Symétrie et appariement

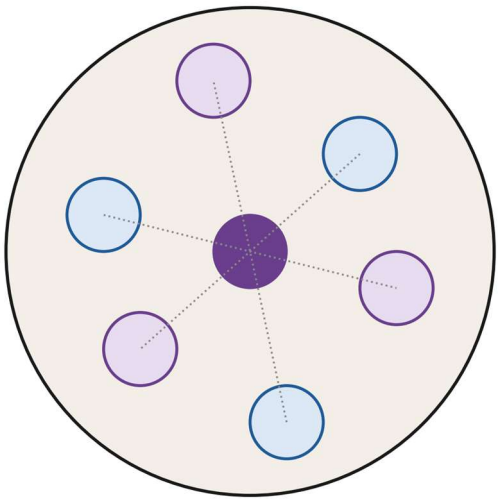
Si l'on peut apparier les coups $(c, \bar{c})$ de sorte que répondre $\bar{c}$ à c soit toujours légal, le second joueur gagne : il a toujours un coup disponible. Trois formes usuelles :

- symétrie centrale (plateau symétrique, centre neutralisé) ;
- appariement des cases (partition du plateau en dominos, en paires) ;
- copie sur l'autre tas (deux tas identiques).

Et retenez la variante pour le premier joueur : il joue un coup qui rend la position symétrique, puis copie.

Exemple 12.2.2 (Les pièces sur la table ronde). *Deux joueurs posent à tour de rôle une pièce de monnaie sur une table ronde, sans chevauchement ; le premier qui ne peut plus jouer perd. Qui gagne ?*

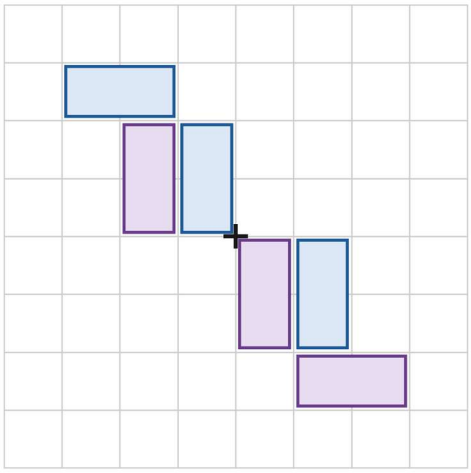
Solution. Le premier joueur gagne : il pose sa première pièce exactement au centre, puis répond à chaque coup de l'adversaire par le symétrique par rapport au centre. Ce coup est toujours légal : la table est symétrique, et la pièce centrale est le seul obstacle possible — or elle est déjà à lui. De plus, la pièce symétrique D' ne peut chevaucher la pièce adverse D : si un point x était dans $D \cap D'$, son symétrique $-x$ y serait aussi, et le disque D, convexe, contiendrait le milieu 0 de $[x, -x]$, c'est-à-dire le centre, déjà recouvert par la première pièce : le coup adverse aurait été illégal. Enfin D' ne chevauche aucune autre pièce, car la position était symétrique avant le coup adverse. Comme la partie est finie, l'adversaire est le premier bloqué.



Stratégie de symétrie centrale pour les pièces sur la table ronde : le premier joueur occupe le centre, puis répond à chaque pièce adverse (bleu) par sa symétrique (violet).

Exemple 12.2.3 (Les dominos sur l'échiquier). *Deux joueurs placent à tour de rôle un domino* 1×2 *sur un échiquier* 8×8*, sans chevauchement ; le dernier à jouer gagne. Qui gagne ?*

Solution. Le second joueur gagne, par symétrie centrale. Si le premier place un domino D, le second place son image D' par la rotation de $180°$ autour du centre du plateau. Ce coup est légal : D et D' ne se chevauchent jamais, car aucun domino n'est invariant par cette rotation : la case (i, j) $(0 \leq i, j \leq 7)$ est échangée avec $(7 - i, 7 - j)$, et ces cases ne sont jamais adjacentes puisque $|7 - 2i| + |7 - 2j| \geq 2$ ($7 - 2i$ et $7 - 2j$ sont impairs). Si D et D' avaient une case c commune, D contiendrait c et son image, donc serait invariant ; et si la position était symétrique avant le coup de l'adversaire, elle le redevient après la réponse.



Réponse du second joueur par symétrie centrale sur l'échiquier : chaque domino de l'adversaire (bleu) est suivi de son image par la rotation de 180° (violet).

12.3 Le vol de stratégie

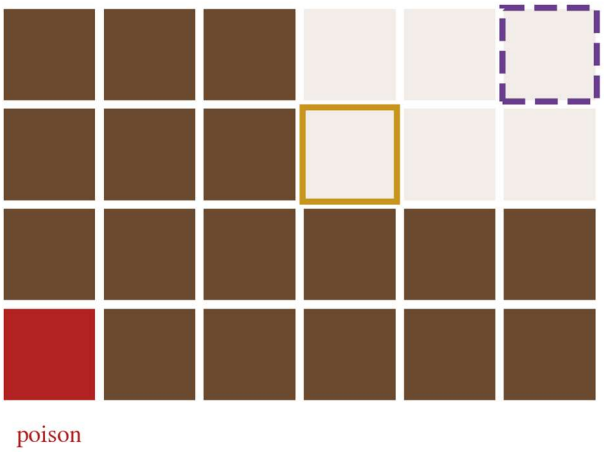
Théorème 12.3.1 (Vol de stratégie)

Dans un jeu où disposer d'un coup supplémentaire ne nuit jamais, et où la partie nulle est impossible, le second joueur ne peut pas avoir de stratégie gagnante. Donc, par le théorème de détermination, c'est le premier joueur qui gagne.

Démonstration. Supposons que le second joueur possède une stratégie gagnante Σ. Le premier joueur joue alors un coup arbitraire c_0, puis oublie ce coup et applique Σ à la position ainsi obtenue en se considérant comme second joueur. Chaque fois que Σ lui demande de jouer c_0 (déjà joué), il joue de nouveau un coup arbitraire. Le coup supplémentaire ne pouvant lui nuire, il gagne — contradiction, les deux joueurs ne pouvant gagner simultanément. ∎

Exemple 12.3.2 (Chomp). *Une tablette de chocolat rectangulaire $m \times n$; un coup consiste à choisir un carré et à manger tout le quart de plan situé au-dessus et à droite de lui. Le carré en bas à gauche est empoisonné : celui qui le mange perd. Montrer que le premier joueur gagne (pour $(m,n) \neq (1,1)$).*

Solution. Vol de stratégie. Supposons que le second joueur ait une stratégie gagnante. Le premier joueur mange le carré supérieur droit. Le second répond par un certain coup c. Mais le premier joueur aurait pu jouer c dès le départ : la position obtenue est la même, avec le trait à l'adversaire. Il aurait donc, lui aussi, une stratégie gagnante : contradiction.



Chomp sur une tablette 4 × 6 : choisir un carré mange tout le quart de plan au-dessus et à droite. Le carré empoisonné est en bas à gauche ; manger le carré en haut à droite est le coup « volé ».

Remarque.

Cet argument ne donne aucune indication sur le coup gagnant — c'est une preuve purement non constructive, ce qui fait tout son charme.

12.4 Le jeu de Nim

Définition 12.4.1 (Jeu de Nim)

Plusieurs tas de jetons, de tailles $a_1, \dots, a_k$. Un coup consiste à retirer un nombre quelconque (≥ 1) de jetons d'un seul tas. Celui qui prend le dernier jeton gagne.

Théorème 12.4.2 (Bouton)

La position $(a_1, \dots, a_k)$ est perdante pour le joueur au trait si et seulement si

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k = 0,$$

où $\oplus$ désigne le « ou exclusif » bit à bit (addition en base 2 sans retenue). Cette quantité s'appelle la somme de Nim.

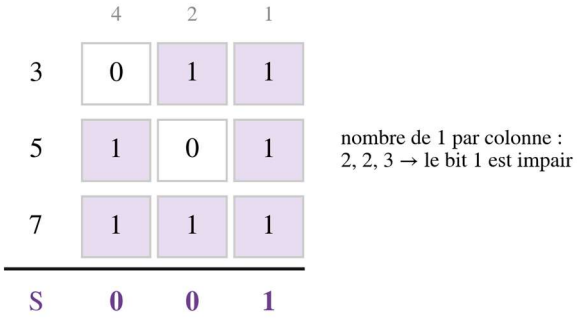
Démonstration. Notons $S = a_1 \oplus \cdots \oplus a_k$.

(i) Si $S = 0$, tout coup donne $S' \neq 0$. Un coup modifie un seul tas, remplaçant a_i par ${a_i}' < a_i$. Alors $S' = S \oplus a_i \oplus {a_i}' = a_i \oplus {a_i}' \neq 0$.

(ii) Si $S \neq 0$, il existe un coup donnant $S' = 0$. Soit 2^d le bit de poids fort de S. Il existe un tas a_i dont le d-ième bit vaut 1 (sinon ce bit de S serait nul). Posons ${a_i}' = a_i \oplus S$: le bit 2^d de a_i passe de 1 à 0 et les bits supérieurs sont inchangés, donc ${a_i}' < a_i$: le coup est légal. Et $S' = S \oplus a_i \oplus {a_i}' = S \oplus S = 0$.

Comme la position finale $(0, \dots, 0)$ vérifie $S = 0$, la double règle des positions P est établie. ■

Exemple 12.4.3 (Trouver le coup gagnant). *Tas de tailles* $3,5,7$. On calcule $3 \oplus 5 = 6$ puis $6 \oplus 7 = 1 \neq 0$: le premier joueur gagne. Pour annuler la somme de Nim, il cherche i tel que $a_i \oplus S < a_i$: ici $S = 1$, et $7 \oplus 1 = 6 < 7$. Un coup gagnant est donc de retirer 1 jeton au tas de 7, laissant $(3,5,6)$, dont la somme de Nim est nulle. Comme $3 \oplus 1 = 2 < 3$ et $5 \oplus 1 = 4 < 5$, retirer 1 jeton à l'un des deux autres tas convient aussi.



Somme de Nim de (3, 5, 7) en binaire : colonne par colonne, on compte la parité des 1 ; seul le bit de poids 1 est impair, d'où S = 1. Après le coup 7 → 6, toutes les colonnes sont paires.

12.5 Sprague–Grundy

Définition 12.5.1 (Valeur de Grundy)

Pour un jeu impartial fini, la valeur de Grundy $g(P)$ d'une position se définit par récurrence :

$$g(P) = \operatorname{mex}\{g(Q) : P \to Q\},$$

où $\mathrm{mex}(A)$ est le plus petit entier naturel n'appartenant pas à A et $P \to Q$ signifie qu'un coup mène de P à Q.

Théorème 12.5.2 (Sprague–Grundy)

P est une position perdante si et seulement si $g(P) = 0$. De plus, la valeur de Grundy d'une somme de jeux indépendants (on joue dans une composante de son choix) est le « ou exclusif » des valeurs de Grundy des composantes :

$$g(P_1 + \cdots + P_k) = g(P_1) \oplus \cdots \oplus g(P_k).$$

Démonstration. *Première assertion*, par récurrence sur la longueur maximale d'une partie issue de P. Si $g(P) = 0$, aucun coup ne mène à une position de valeur 0 (sinon 0 serait dans l'ensemble dont on prend le mex) : tous les coups mènent à des positions de valeur non nulle, gagnantes par hypothèse de récurrence ; donc P est perdante. Si $g(P) \neq 0$, alors 0 appartient à $\{g(Q) : P \to Q\}$: un coup mène à une position perdante, et P est gagnante. (Une position finale a pour valeur $\mathrm{mex}\varnothing = 0$.)

Seconde assertion. Deux propriétés du mex : pour toute position P, **aucun coup ne mène à une position de même valeur**, et **pour tout $t < g(P)$, un coup mène à une position de valeur t**. Réciproquement, un entier possédant ces deux propriétés relativement aux options de P est le mex. Posons $s = g(P_1) \oplus \cdots \oplus g(P_k)$ et raisonnons par récurrence sur la longueur maximale d'une partie issue de la somme ; par hypothèse de récurrence, une option de la somme, obtenue en remplaçant P_i par Q_i, a pour valeur $s \oplus g(P_i) \oplus g(Q_i)$.

- Cette valeur n'est jamais s, car $g(Q_i) \neq g(P_i)$.
- Soit $t < s$ et $u = s \oplus t \neq 0$, de bit de poids fort 2^d. Comme $t < s$ et que s, t coïncident au-dessus du bit d, le bit d de s vaut 1 ; il existe donc i tel que le bit d de $g(P_i)$ vaille 1. Alors $g(P_i) \oplus u < g(P_i)$ (le bit d passe à 0, les bits supérieurs sont inchangés), et par la seconde propriété du mex, P_i a une option Q_i de valeur $g(P_i) \oplus u$. L'option correspondante de la somme a pour valeur $s \oplus u = t$.

Ainsi $g(P_1 + \cdots + P_k) = s$. (Le théorème de Bouton est le cas particulier où chaque P_i est un tas de Nim, de valeur a_i.) ■

Autrement dit : tout jeu impartial est équivalent à un tas de Nim de taille $g(P)$. C'est le théorème le plus puissant du domaine, et il transforme un jeu compliqué composé de plusieurs plateaux en un simple calcul de somme de Nim.

Exemple 12.5.3 (Jeu de soustraction ${1,2,3}$ sur trois tas). *Pour le jeu où l'on retire 1, 2 ou 3 jetons d'un tas, on a $g(n) = n \bmod 4$: par récurrence, les options de n ont pour valeurs les restes de $n-1, n-2, n-3$ (ceux qui sont ≥ 0), c'est-à-dire exactement les restes modulo 4 autres que $n \bmod 4$ qui sont $< n$; leur mex est $n \bmod 4$. Avec trois tas de tailles $5, 9, 12$:*

$$g = (5 \bmod 4) \oplus (9 \bmod 4) \oplus (12 \bmod 4) = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0.$$

La position est perdante pour le joueur au trait.

12.6 Exercices

Exercice 12.1 ★. Cent jetons sont sur la table ; chaque joueur en retire de 1 à 6. Celui qui prend le dernier gagne. Qui a une stratégie gagnante, et laquelle ?

Exercice 12.2 ★★. Deux joueurs retirent alternativement des jetons d'un tas de n jetons ; les coups autorisés sont les puissances de 2 $(1,2,4,8,\ldots)$. Celui qui ne peut plus jouer perd. Déterminer les positions perdantes.

Exercice 12.3 ★★. Sur une table rectangulaire, deux joueurs posent à tour de rôle une carte à jouer (toutes identiques, alignées avec les bords) sans chevauchement. Le premier bloqué perd. Qui gagne ?

Exercice 12.4 ★★. Au jeu de Nim avec les tas $(1,4,5,7)$, le premier joueur gagne-t-il ? Si oui, donner tous ses coups gagnants.

Exercice 12.5 ★★★. Deux joueurs écrivent alternativement un entier de $[\![1,9]\!]$; on additionne au fur et à mesure. Celui qui atteint exactement 100 gagne ; celui qui dépasse 100 perd. Qui gagne ?

Exercice 12.6 ★★★. Deux tas de m et n jetons. Un coup consiste à retirer un nombre quelconque de jetons d'un tas, ou le même nombre dans les deux tas (jeu de Wythoff). Montrer que les positions perdantes (a_k, b_k), avec $a_k \leq b_k$, vérifient $b_k - a_k = k$ et que, pour $k \geq 1$, les a_k et les b_k parcourent $\mathbb{N}^*$ sans répétition ni omission.

Exercice 12.7 ★★★★ (Nim misère). Mêmes règles que le Nim, mais celui qui prend le dernier jeton perd. Montrer que le premier joueur gagne si et seulement si : soit un tas contient au moins 2 jetons et la somme de Nim est non nulle, soit tous les tas contiennent au plus 1 jeton et le nombre de tas non vides est pair.

Exercice 12.8 ★★★★. Sur un échiquier $n \times n$, deux joueurs colorient à tour de rôle une case blanche encore libre. Un joueur perd s'il complète un carré 2×2 entièrement colorié. Pour $n = 4$, qui gagne ?

12.7 Corrigés

Solution de l'exercice 12.1. C'est le jeu de Bachet avec $k = 6$: les positions perdantes sont les multiples de 7. Comme $100 = 7 \times 14 + 2$, la position initiale est gagnante : le premier joueur retire 2 jetons (laissant $98 = 7 \times 14$), puis complète chaque coup c de l'adversaire par $7 - c$.

Solution de l'exercice 12.2. Les positions perdantes sont les multiples de 3. En effet, aucune puissance de 2 n'est divisible par 3 ($2^n \equiv (-1)^n \equiv \pm 1 \pmod 3$), donc depuis un multiple de 3 tout coup mène à un non-multiple. Réciproquement, depuis $n \equiv 1 \pmod 3$ on retire 1, et depuis $n \equiv 2 \pmod 3$ on retire 2 : on atteint un multiple de 3. Enfin 0 est un multiple de 3 et c'est la position finale.

Solution de l'exercice 12.3. Le premier joueur gagne : il place sa première carte exactement au centre de la table (le centre de la carte sur le centre de la table), puis répond à chaque coup par l'image de la carte adverse par la symétrie centrale. Ce coup est toujours disponible : la seule carte qui pourrait gêner est sa propre carte centrale, laquelle est invariante par la symétrie. Enfin, la carte symétrique ne chevauche pas la carte adverse : sinon celle-ci contiendrait le centre de la table, déjà recouvert par la carte centrale.

Solution de l'exercice 12.4. Somme de Nim : $1 \oplus 4 = 5$, $5 \oplus 5 = 0$, $0 \oplus 7 = 7 \neq 0$. Le premier joueur gagne. Un coup gagnant consiste à remplacer a_i par $a_i \oplus S$ avec $S = 7$, lorsque $a_i \oplus 7 < a_i$:

$$1 \oplus 7 = 6 > 1, \qquad 4 \oplus 7 = 3 < 4, \qquad 5 \oplus 7 = 2 < 5, \qquad 7 \oplus 7 = 0 < 7.$$

Il y a donc trois coups gagnants : ramener le tas de 4 à 3, celui de 5 à 2, ou vider le tas de 7. On vérifie par exemple $1 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 7 = 0$.

Solution de l'exercice 12.5. Les positions perdantes (pour celui qui doit jouer) sont les totaux multiples de 10 strictement inférieurs à 100, c'est-à-dire $0,10,20,\ldots,90$. Depuis un tel total, tout ajout de $c \in [\![1,9]\!]$ mène à un total non multiple de 10, qui n'est pas 100 ; depuis un total t non multiple de 10 et inférieur à 100, on ajoute $c \in [\![1,9]\!]$ pour atteindre le multiple de 10 suivant (qui est 100 si $t > 90$, ce qui gagne immédiatement).

La position initiale 0 est perdante : c'est le second joueur qui gagne. Il complète chaque coup c de l'adversaire par $10 - c$, atteignant successivement $10,20,\ldots,90$, puis 100 ; l'adversaire, au trait sur 90, est contraint de laisser un total entre 91 et 99, et le second joueur conclut en atteignant 100.

Solution de l'exercice 12.6. Définissons par récurrence, pour $k \geq 1$,

$$a_k = \operatorname{mex}\{a_i, b_i : 0 \leq i < k\}, \qquad b_k = a_k + k, \qquad \text{avec } a_0 = b_0 = 0.$$

Trois faits immédiats :

1. la suite (a_k) est strictement croissante (l'ensemble dont on prend le mex grandit avec k, et contient a_{k-1} ainsi que tous les entiers inférieurs à a_{k-1}, donc $a_k > a_{k-1}$) ;
2. les ensembles $\{a_k : k \geq 1\}$ et $\{b_k : k \geq 1\}$ sont disjoints et recouvrent $\mathbb{N}^*$: a_k est par définition le plus petit entier non encore employé, et $b_k = a_k + k$ n'a jamais été employé auparavant (il dépasse a_k et b_{k-1}) ;
3. les différences $b_k - a_k = k$ sont deux à deux distinctes.

Tout coup depuis (a_k, b_k) sort de la liste.

- On diminue le grand tas : la position (a_k, b) avec $b < b_k$. Si c'était un (a_i, b_i) avec $a_i = a_k$, alors $i = k$ et $b = b_k$: exclu. Si $b < a_k$, la position triée est (b, a_k) et il faudrait $b_i = a_k$, impossible par (2).
- On diminue le petit tas : (a, b_k) avec $a < a_k$. Si $(a, b_k) = (a_i, b_i)$, alors $i = b_i - a_i = b_k - a > b_k - a_k = k$, donc $i > k$ et $a_i > a_k > a$ par (1) : contradiction.
- On diminue les deux de $t \geq 1$: la différence reste k, donc par (3) il faudrait $i = k$, donc $t = 0$: exclu.

Depuis toute autre position, on rejoint la liste. Soit (x, y), $x \leq y$, non dans la liste. Si $x = a_k$ pour un k, alors $y \neq b_k$; si $y > b_k$ on diminue y jusqu'à b_k ; si $y < b_k$, la différence $d = y - x$ vérifie $d < k$, donc $a_d < a_k = x$ par (1), et l'on diminue les deux tas de $x - a_d$ pour atteindre (a_d, b_d) (toute différence $d \geq 0$ est réalisée par un unique couple (a_d, b_d)). Si $x = b_k$ pour un $k \geq 1$, alors $y \geq x = b_k > a_k$ et l'on diminue le grand tas jusqu'à a_k, ce qui donne la position (a_k, b_k). Dans tous les cas un coup mène à une position de la liste.

> **Remarque.**
>
> On démontre que $a_k = \lfloor k\varphi \rfloor$ et $b_k = \lfloor k\varphi^2 \rfloor$ où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: ce sont les deux suites de Beatty associées au nombre d'or, qui partitionnent bien $\mathbb{N}^*$ puisque $\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} = 1$.

Solution de l'exercice 12.7. Séparons deux cas.

Cas A : tous les tas ont au plus 1 jeton. La partie est entièrement déterminée : avec t tas de 1 jeton, les joueurs les prennent l'un après l'autre et celui qui prend le t-ième perd. Le premier joueur perd si t est impair, gagne si t est pair.

Cas B : au moins un tas a ≥ 2 jetons. Montrons que le premier joueur gagne si et seulement si $S = a_1 \oplus \cdots \oplus a_k \neq 0$.

Si $S \neq 0$, le joueur au trait joue comme au Nim normal tant qu'il reste au moins deux tas de taille ≥ 2. Lorsqu'il ne reste qu'un seul tas $a_i \geq 2$, tous les autres valant 0 ou 1, il ramène ce tas à 0 ou 1 de manière à laisser un nombre impair de tas de taille 1 : l'adversaire se retrouve dans le cas A perdant. Cette stratégie est bien applicable : lorsqu'il reste au moins deux tas ≥ 2, le coup de Nim normal ne modifie qu'un tas, donc laisse au moins un tas ≥ 2 avec $S' = 0$, donc au moins deux tas ≥ 2 (voir le paragraphe suivant) ; l'adversaire, qui ne modifie lui aussi qu'un tas, rend alors une position ayant encore un tas ≥ 2 et une somme de Nim non nulle.

Si $S = 0$, il y a en fait au moins deux tas ≥ 2 (un seul tas ≥ 2 donnerait à S un bit non nul de poids ≥ 2) ; tout coup du joueur au trait donne donc $S' \neq 0$ et laisse encore un tas ≥ 2 : c'est l'adversaire qui applique la stratégie précédente.

Solution de l'exercice 12.8. Le second joueur B gagne. Numérotons les lignes de 1 à 4 et apparions les cases situées dans la même colonne et distantes de deux lignes (lignes 1 et 3, lignes 2 et 4). Stratégie de B : répondre au coup de A en coloriant l'autre case de la même paire. Ce coup est toujours disponible, donc B n'est jamais bloqué. Après chaque coup de B, la figure coloriée est une réunion de paires complètes.

Montrons que B ne complète jamais le premier carré 2×2. Supposons que le coup de B sur une case X complète un carré S ; les trois autres cases de S étaient donc déjà coloriées avant le coup de A (car A venait de colorier Y, partenaire de X, et $Y \notin S$: deux cases d'une paire sont distantes de deux lignes, donc jamais dans un même carré 2×2). À ce moment-là, la figure était réunion de paires complètes : les partenaires de ces trois cases étaient donc coloriés eux aussi.

Notons X' la case de S voisine de X sur la même ligne, Y' sa partenaire, et Z, Z' les deux cases de S situées sur l'autre ligne. Les cases Y et Y' occupent les deux colonnes de S, sur une ligne ℓ de même parité que la ligne de X. Les deux lignes de parité opposée sont la ligne de Z, Z' et celle de leurs partenaires, et l'une d'elles est adjacente à ℓ. Les cases Y, Y' et les deux cases de cette ligne adjacente situées dans les colonnes de S forment donc un carré 2×2, dont toutes les cases sauf Y étaient coloriées avant le coup de A. Autrement dit, A a complété un carré en jouant Y, avant B. C'est donc A qui perd.

À retenir (Ce qu'il faut retenir)

- Tabuler, conjecturer, vérifier les deux implications : c'est la méthode universelle.
- Symétrie : le second joueur copie ; ou le premier joue au centre puis copie.
- Vol de stratégie : preuve d'existence non constructive, quand un coup en plus ne nuit pas.
- Nim : perdant ⇔ somme de Nim nulle ; Sprague–Grundy : tout jeu impartial = un tas de Nim de taille $g(P)$, et les jeux s'additionnent par $\oplus$.
- En rédaction, ne dites jamais « il est clair que le premier joueur gagne » : décrivez la stratégie et prouvez qu'elle est toujours applicable.

CHAPITRE 13

13 Méthodes probabiliste et algébrique

Objectifs du chapitre. Trois techniques qui font gagner des points à l'OIM quand le comptage direct échoue : l'estimation par convexité, la méthode probabiliste (« un objet moyen existe, donc un objet au moins aussi bon existe ») et les méthodes algébriques (algèbre linéaire sur $\mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{R}$, méthode du polynôme).

13.1 Estimer par convexité

À retenir (Cauchy–Schwarz et Jensen, forme combinatoire)

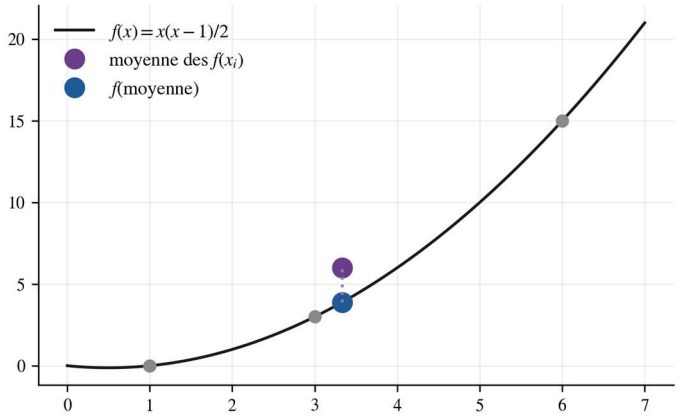
Pour des réels $x_1, \dots, x_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2,$$

et plus généralement, pour f convexe, $\frac{1}{n}\sum_i f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{n}\sum_i x_i\right)$.

Démonstration. *Première inégalité.* Avec $\mu = \frac{1}{n}\sum x_i$, on a $0 \leq \sum_i (x_i - \mu)^2 = \sum_i x_i^2 - 2\mu \sum_i x_i + n\mu^2 = \sum_i x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_i x_i)^2$.

Inégalité de Jensen. Montrons plus généralement $f(\sum_i \lambda_i x_i) \leq \sum_i \lambda_i f(x_i)$ pour des poids $\lambda_i \geq 0$ de somme 1, par récurrence sur n. Pour $n = 1$ c'est une égalité, pour $n = 2$ c'est la définition de la convexité. Si $\lambda_n < 1$, posons $y = \sum_{i<n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i$; alors $f(\sum_i \lambda_i x_i) = f\big((1-\lambda_n)y + \lambda_n x_n\big) \leq (1-\lambda_n) f(y) + \lambda_n f(x_n)$, et l'hypothèse de récurrence majore $f(y)$ par $\sum_{i<n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} f(x_i)$. On prend enfin $\lambda_i = \frac{1}{n}$. ■



Inégalité de Jensen pour f(x) = x(x − 1)/2 : la moyenne des f(xᵢ) (point violet, sur la corde) est au-dessus de f appliquée à la moyenne (point bleu, sur la courbe).

Méthode 13.1.1 — Le réflexe

Dès qu'un double comptage produit une somme de la forme $\sum_i \binom{d_i}{2}$ ou $\sum_i d_i^2$ avec $\sum_i d_i$ connu, la convexité transforme l'égalité en une borne uniforme. C'est le passage obligé de tous les problèmes du type « m objets, n boîtes, deux objets partagent au plus une boîte ».

Exemple 13.1.2 (Amitiés communes). *Dans un groupe de n personnes, deux personnes quelconques ont au plus un ami commun. Montrer que le nombre m d'amitiés est $O(n^{3/2})$.*

Solution. Notons $d(u)$ le nombre d'amis de u. Comptons les « cerises » $(u;\{v,w\})$ où v,w sont deux amis distincts de u :

$$\sum_u \binom{d(u)}{2} \leq \binom{n}{2},$$

car chaque paire $\{v,w\}$ a au plus un ami commun. Par convexité de $x \mapsto \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$, avec $\bar{d} = \frac{2m}{n}$:

$$n\binom{\bar{d}}{2} \leq \binom{n}{2} \Longrightarrow \bar{d}(\bar{d}-1) \leq n-1 \Longrightarrow \bar{d} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{n - 3/4} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{n} \Longrightarrow m = \frac{n\bar{d}}{2} = O(n^{3/2}).$$

13.2 La méthode probabiliste

Théorème 13.2.1 (Principe du premier moment)

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini. Alors il existe une issue pour laquelle $X \geq \mathbb{E}[X]$, et une issue pour laquelle $X \leq \mathbb{E}[X]$. De plus, si $\mathbb{P}(A) > 0$, alors l'événement A est réalisable.

Démonstration. Notons Ω l'ensemble fini des issues. Si l'on avait $X(\omega) < \mathbb{E}[X]$ pour toute issue ω de probabilité non nulle, alors $\mathbb{E}[X] = \sum_\omega \mathbb{P}(\omega)X(\omega) < \sum_\omega \mathbb{P}(\omega)\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X]$: absurde. De même pour l'autre inégalité. Enfin, si aucune issue ne réalisait A, on aurait $\mathbb{P}(A) = 0$. ∎

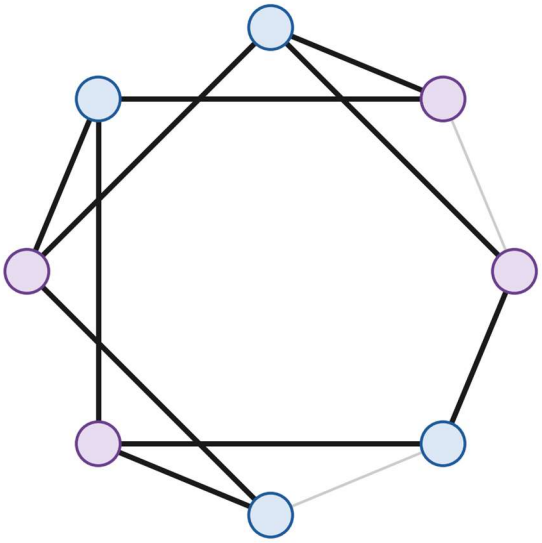
Ce principe, d'apparence anodine, est un outil d'existence redoutable : pour prouver qu'un objet ayant une propriété existe, on en tire un au hasard et on montre que la probabilité d'échec est < 1.

Méthode 13.2.2 — Mode d'emploi

1. Choisir une loi sur l'ensemble des objets (le plus souvent : uniforme, ou bien chaque élément indépendamment avec probabilité p).
2. Définir la variable X qui compte ce qu'on veut optimiser, ou l'événement « mauvais » B.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$ par linéarité de l'espérance — en décomposant X en somme d'indicatrices. L'indépendance n'est jamais nécessaire pour cela.
4. Conclure : il existe un objet au moins aussi bon que la moyenne ; ou $\mathbb{P}(B) < 1$, donc un objet évite tous les défauts.

Exemple 13.2.3 (Coupe maximale). *Tout graphe à m arêtes possède une partition de ses sommets en deux parts telle qu'au moins $m/2$ arêtes les traversent.*

Solution. Plaçons chaque sommet indépendamment dans A ou B avec probabilité $\frac{1}{2}$. Pour une arête e, notons X_e l'indicatrice de « e traverse » : $\mathbb{E}[X_e] = \frac{1}{2}$. Par linéarité, $\mathbb{E}[\sum_e X_e] = \frac{m}{2}$. Il existe donc une partition avec au moins $m/2$ arêtes traversantes.



Une coupe d'un graphe à 12 arêtes : les sommets sont répartis en A (violet) et B (bleu) ; les 10 arêtes traversantes (épaisses) dépassent largement m/2 = 6.

Exemple 13.2.4 (Erdős, 1947 : minoration de R(k,k)). *Si $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, alors $R(k,k) > n$. En particulier $R(k,k) > 2^{k/2}$ pour $k \geq 3$.*

Solution. Colorions chaque arête de K_n en rouge ou bleu indépendamment avec probabilité $\frac{1}{2}$. Pour un ensemble fixé S de k sommets, la probabilité que S soit monochrome vaut $2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}$. Donc

$$\mathbb{P}(\exists S \text{ monochrome}) \leq \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1.$$

Il existe donc un coloriage sans K_k monochrome : $R(k,k) > n$. Avec $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$, on a $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{n^k}{k!}\, 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} \leq \frac{2^{1+k/2}}{k!}$, qui est < 1 pour $k \geq 3$; donc $R(k,k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$, c'est-à-dire $R(k,k) > 2^{k/2}$ puisque $R(k,k)$ est entier.

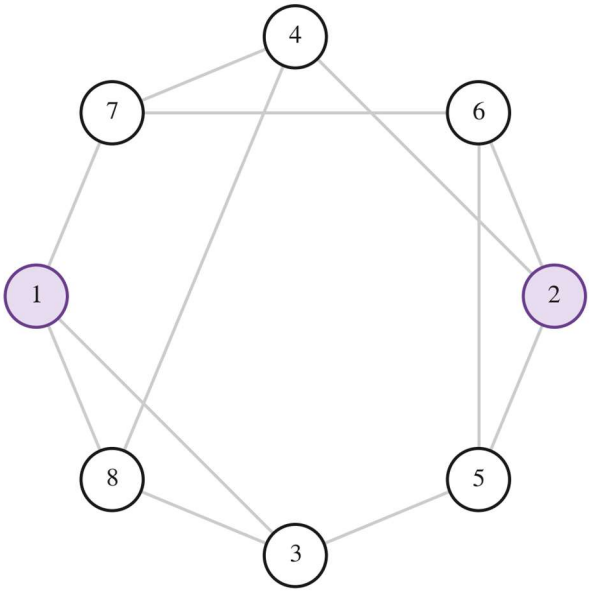
Remarque (Ce que dit vraiment cet exemple).
Erdős démontre l'existence d'un coloriage de K_n sans K_k monochrome sans en exhiber aucun. Aujourd'hui encore, on ne sait pas construire explicitement de tels coloriages avec une aussi bonne borne. C'est l'acte de naissance de la méthode probabiliste (1947).

Théorème 13.2.5 (Caro–Wei)

Tout graphe $G = (V, E)$ possède un ensemble indépendant de cardinal au moins $\sum_{v \in V} \frac{1}{d(v)+1}$. En particulier, au moins $\frac{n}{\bar{d}+1}$, où $\bar{d}$ est le degré moyen (théorème de Turán, version duale).

Démonstration. Tirons une permutation aléatoire uniforme des sommets, et posons $I = \{v : v \text{ précède tous ses voisins}\}$. I est indépendant : si $u, v \in I$ étaient voisins, chacun précéderait

l'autre. Or $\mathbb{P}(v \in I) = \frac{1}{d(v)+1}$: parmi v et ses $d(v)$ voisins, v a une chance sur $d(v)+1$ d'arriver en tête. Par linéarité, $\mathbb{E}[|I|] = \sum_v \frac{1}{d(v)+1}$, d'où l'existence. La seconde minoration découle de l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe $t \mapsto \frac{1}{t+1}$. ■



Caro–Wei : les sommets sont numérotés selon un ordre aléatoire ; ceux qui précèdent tous leurs voisins (en couleur) forment un ensemble indépendant.

Remarque (Lemme local de Lovász, énoncé).

Si $B_1, \dots, B_N$ sont des événements « mauvais », chacun de probabilité $\le p$, et si chacun est indépendant de la famille des autres privée d'au plus d d'entre eux, alors $\mathrm{e}\,p(d+1) \le 1$ entraîne $\mathbb{P}\big(\bigcap_i \overline{B_i}\big) > 0$.

Démonstration. Précisons l'hypothèse : pour chaque i, il existe $D_i \subseteq [\![1, N]\!] \setminus \{i\}$ avec $|D_i| \le d$ tel que B_i soit indépendant de toute intersection d'événements $\overline{B_j}$, $j \notin D_i \cup \{i\}$. Si $d = 0$, les $\overline{B_i}$ sont indépendants et $\mathbb{P}\big(\bigcap \overline{B_i}\big) = \prod\big(1 - \mathbb{P}(B_i)\big) \ge (1-p)^N > 0$ (car $p \le \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$). Supposons $d \ge 1$ et notons $\overline{B}_S = \bigcap_{j \in S} \overline{B_j}$.

Lemme : pour toute partie S ne contenant pas i, avec $\mathbb{P}(\overline{B}_S) > 0$, on a $\mathbb{P}\big(B_i \,\big|\, \overline{B}_S\big) \le \frac{1}{d+1}$. Récurrence sur $|S|$. Écrivons $S = S_1 \sqcup S_2$ avec $S_1 = S \cap D_i$. Si $S_1 = \varnothing$, la probabilité vaut $\mathbb{P}(B_i) \le p \le \frac{1}{\mathrm{e}(d+1)}$. Sinon, $S_1 = \{j_1, \dots, j_r\}$ avec $1 \le r \le d$, et

$$\mathbb{P}\big(B_i \,\big|\, \overline{B}_S\big) = \frac{\mathbb{P}\big(B_i \cap \overline{B}_{S_1} \,\big|\, \overline{B}_{S_2}\big)}{\mathbb{P}\big(\overline{B}_{S_1} \,\big|\, \overline{B}_{S_2}\big)}.$$

Le numérateur est au plus $\mathbb{P}\big(B_i \,\big|\, \overline{B}_{S_2}\big) = \mathbb{P}(B_i) \le p$. Le dénominateur vaut $\prod_{t=1}^{r}\Big(1 - \mathbb{P}\big(B_{j_t} \,\big|\, \overline{B}_{S_2} \cap \overline{B_{j_1}} \cap \cdots \cap \overline{B_{j_{t-1}}}\big)\Big)$, et chaque probabilité conditionnelle porte sur une partie de cardinal $< |S|$, donc est $\le \frac{1}{d+1}$ par hypothèse de récurrence. Le dénominateur est ainsi au moins $\left(\frac{d}{d+1}\right)^r \ge \left(\frac{d}{d+1}\right)^d = \left(1 + \frac{1}{d}\right)^{-d} \ge \frac{1}{\mathrm{e}}$ (car $1 + \frac{1}{d} \le \mathrm{e}^{1/d}$). D'où $\mathbb{P}\big(B_i \,\big|\, \overline{B}_S\big) \le \mathrm{e}\,p \le \frac{1}{d+1}$.

Conclusion. $\mathbb{P}\big(\bigcap_{i=1}^N \overline{B_i}\big) = \prod_{i=1}^N \Big(1 - \mathbb{P}\big(B_i \,\big|\, \overline{B}_{\{1,\dots,i-1\}}\big)\Big) \ge \left(\frac{d}{d+1}\right)^N > 0$, chaque conditionnement étant licite puisque le produit partiel précédent est strictement positif.

13.3 La méthode algébrique

L'idée : coder les objets combinatoires par des vecteurs, puis invoquer un argument de dimension. C'est spectaculairement efficace pour majorer des familles d'ensembles.

Théorème 13.3.1 (Oddtown)

Dans une ville de n habitants, on forme des clubs tels que : chaque club a un nombre impair de membres, et deux clubs distincts ont un nombre pair de membres communs. Alors il y a au plus n clubs.

Démonstration. Notons $A_1, \dots, A_m$ les clubs. À chaque club A_i associons son vecteur caractéristique $v_i \in \mathbb{F}_2^n$. Le produit scalaire sur $\mathbb{F}_2$ donne

$$\langle v_i, v_i \rangle = |A_i| \bmod 2 = 1, \qquad \langle v_i, v_j \rangle = \big|A_i \cap A_j\big| \bmod 2 = 0 \quad (i \ne j).$$

Montrons que $v_1, \dots, v_m$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{F}_2$. Si $\sum_i \lambda_i v_i = 0$, alors en prenant le produit scalaire avec v_j : $0 = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle = \lambda_j$. Donc $m \le \dim \mathbb{F}_2^n = n$. ∎

	1	2	3	4
$\{1,2,3\}$	1	1	1	0
$\{1,2,4\}$	1	1	0	1
$\{1,3,4\}$	1	0	1	1
$\{2,3,4\}$	0	1	1	1

Oddtown pour n = 4 : quatre clubs de cardinal impair, deux à deux d'intersection paire ; leurs vecteurs caractéristiques (lignes du tableau) sont orthogonaux sur $\mathbb{F}_2$ et forment une base.

Remarque (La variante trompeuse : Eventown).

Si l'on impose cette fois que tous les cardinaux et toutes les intersections soient pairs, la borne explose : on peut former $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ clubs (prendre les réunions de paires $\{1,2\},\{3,4\},\ldots$). La « petite » différence de parité change tout : l'espace W engendré par les vecteurs caractéristiques est alors totalement isotrope ($W \subseteq W^{\perp}$), et comme $\dim W + \dim W^{\perp} = n$ (la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est non dégénérée sur $\mathbb{F}_2^n$), $\dim W \leq n/2$: il y a au plus $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ clubs, et la construction montre que cette borne est atteinte.

13.4 La méthode du polynôme

Remarque (Combinatorial Nullstellensatz, Alon 1999, énoncé).

Soit K un corps et $P \in K[x_1,\ldots,x_n]$ de degré total $\sum_i t_i$, dont le coefficient de $x_1^{t_1}\cdots x_n^{t_n}$ est non nul. Si $S_1,\ldots,S_n$ sont des parties de K avec $|S_i| > t_i$, alors il existe $(s_1,\ldots,s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ tel que $P(s_1,\ldots,s_n) \neq 0$.

Démonstration. **Lemme** : si Q vérifie $\deg_{x_i} Q < |S_i|$ pour tout i et s'annule sur $S_1 \times \cdots \times S_n$, alors $Q = 0$. Récurrence sur n : pour $n = 1$, un polynôme de degré $< |S_1|$ ayant $|S_1|$ racines est nul. Pour $n \geq 2$, écrivons $Q = \sum_{j<|S_n|} Q_j(x_1,\ldots,x_{n-1}) x_n^j$; pour $(s_1,\ldots,s_{n-1})$ fixé, le polynôme en x_n obtenu s'annule sur S_n, donc tous les $Q_j(s_1,\ldots,s_{n-1})$ sont nuls, et $Q_j = 0$ par hypothèse de récurrence.

Quitte à réduire les S_i, supposons $|S_i| = t_i + 1$, et par l'absurde que P s'annule sur $S_1 \times \cdots \times S_n$. Posons $g_i(x_i) = \prod_{s \in S_i}(x_i - s) = x_i^{t_i+1} - \sum_{j \leq t_i} g_{ij}\, x_i^j$. Sur S_i, on a $x_i^{t_i+1} = \sum_{j \leq t_i} g_{ij}\, x_i^j$. Remplaçons dans P, tant que c'est possible, chaque puissance x_i^k avec $k > t_i$ à l'aide de cette relation : on obtient un polynôme $\overline{P}$ de degré $\leq t_i$ en chaque x_i, égal à P sur $S_1 \times \cdots \times S_n$, donc nul par le lemme. Or chaque remplacement transforme un monôme en monômes de degré total strictement plus petit ; le monôme $x_1^{t_1}\cdots x_n^{t_n}$, de degré maximal $\deg P$ et d'exposants $\leq t_i$, n'est jamais remplacé ni créé. Son coefficient dans $\overline{P}$ est donc celui de P, non nul : contradiction.

Théorème 13.4.1 (Cauchy–Davenport)

Si p est premier et $A, B \subseteq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont non vides, alors $|A+B| \geq \min(p,\ |A| + |B| - 1)$.

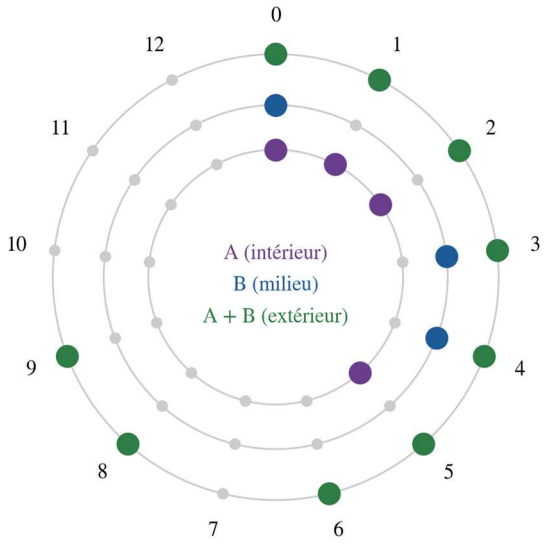
Démonstration. *(Démonstration élémentaire par la transformation de Davenport.)* Récurrence sur $|B|$. Si $|B| = 1$, $|A + B| = |A|$. Supposons $|B| \geq 2$; si $|A| = p$, alors $A + B = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Sinon, pour $e \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, posons

$$A(e) = A \cup (B + e), \qquad B(e) = B \cap (A - e).$$

On a $A(e) + B(e) \subseteq A + B$: si $x \in A$ et $y \in B$, c'est clair ; si $x = b + e$ $(b \in B)$ et $y = a - e$ $(a \in A)$, alors $x + y = a + b$. Et $|A(e)| + |B(e)| = |A| + |B| - |A \cap (B + e)| + |B \cap (A - e)| = |A| + |B|$, car $B \cap (A - e)$ est le translaté de $(B + e) \cap A$ par $-e$.

Cherchons e tel que $1 \leq |B(e)| < |B|$, c'est-à-dire $e \in A - B$ et $B + e \not\subseteq A$. Si aucun $e \in A - B$ ne convenait, alors pour $a \in A$ et $b, b' \in B$, avec $e = a - b$, on aurait $a + (b' - b) \in B + e \subseteq A$: l'ensemble A serait stable par translation de $\delta = b' - b \neq 0$ (on prend $b \neq b'$), donc par tous ses multiples, qui décrivent $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier) ; ainsi $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, exclu. Pour un tel e, l'hypothèse de récurrence donne

$$|A + B| \geq |A(e) + B(e)| \geq \min(p,\ |A(e)| + |B(e)| - 1) = \min(p,\ |A| + |B| - 1). \quad \blacksquare$$



Cauchy–Davenport dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$: $A = \{0, 1, 2, 5\}$ et $B = \{0, 3, 4\}$; la somme $A + B$ (couronne extérieure) a $9 \geq 4 + 3 - 1$ éléments.

Exemple 13.4.2 (Erdős–Ginzburg–Ziv, cas premier). *Soit p premier. Parmi $2p - 1$ entiers quelconques, on peut en choisir p dont la somme est divisible par p.*

Solution. Réduisons modulo p et ordonnons les résidus $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2p-1}$. Si $a_i = a_{i+p-1}$ pour un certain i, alors les p résidus $a_i, \ldots, a_{i+p-1}$ sont égaux et leur somme vaut $p\,a_i \equiv 0$. Sinon, posons $A_i = \{a_i, a_{i+p-1}\}$ pour $i = 1, \ldots, p - 1$: chaque A_i a deux éléments. Par Cauchy–Davenport appliqué $p - 2$ fois (par récurrence, $|A_1 + \cdots + A_i| \geq \min(p,\ i + 1)$),

$$\left|A_1 + A_2 + \cdots + A_{p-1}\right| \geq \min\big(p,\ 2(p-1) - (p-2)\big) = p,$$

donc $A_1 + \cdots + A_{p-1} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Il existe ainsi un choix $x_i \in A_i$ avec $\sum_{i=1}^{p-1} x_i \equiv -a_{2p-1}$, et les p nombres $x_1, \ldots, x_{p-1}, a_{2p-1}$ (qui correspondent à p entiers distincts de la liste) ont une somme divisible par p.

13.5 Exercices

Exercice 13.1 ★★. Montrer que tout graphe à m arêtes contient un sous-graphe biparti ayant au moins $m/2$ arêtes.

Exercice 13.2 ★★. Dans une ville de n habitants, on forme m clubs de cardinal impair, deux clubs distincts ayant un nombre pair de membres communs. Montrer que $m \leq n$, et construire un exemple avec $m = n$.

Exercice 13.3 ★★★. Montrer que pour tout k, il existe un tournoi dans lequel, pour tout ensemble de k joueurs, un autre joueur les bat tous.

Exercice 13.4 ★★★. Soient $A_1, \dots, A_m$ des parties d'un ensemble à n éléments, toutes de cardinal k. Montrer qu'on peut colorier les n éléments en deux couleurs de sorte qu'aucun A_i ne soit monochrome, dès que $m < 2^{k-1}$.

Exercice 13.5 ★★★. Montrer que tout ensemble A de n entiers non nuls contient une partie sans somme (aucune relation $x + y = z$ entre ses éléments) de cardinal $> \frac{n}{3}$.

Exercice 13.6 ★★★. Soit G un graphe à n sommets et m arêtes. Montrer que G contient un ensemble indépendant de cardinal au moins $\frac{n^2}{2m+n}$.

Exercice 13.7 ★★★★ (Erdős–Ginzburg–Ziv général). Déduire du cas premier que parmi $2n-1$ entiers quelconques, on peut en choisir n dont la somme est divisible par n.

13.6 Corrigés

Solution de l'exercice 13.1. C'est exactement l'exemple de la coupe : la partition aléatoire $V = A \sqcup B$ laisse traverser $m/2$ arêtes en moyenne. Le sous-graphe formé des arêtes traversantes est biparti et possède au moins $m/2$ arêtes pour un choix convenable de la partition.

Solution de l'exercice 13.2. La majoration est le théorème d'Oddtown démontré dans le cours. Pour $m = n$: prendre les n singletons $\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$ — cardinaux impairs, intersections vides donc paires.

Solution de l'exercice 13.3. Tirons un tournoi aléatoire sur $n > k$ joueurs : pour chaque paire, on oriente l'arête dans un sens ou l'autre avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment. Pour un ensemble fixé S de k joueurs, la probabilité qu'un joueur donné $v \notin S$ ne batte pas tous les membres de S vaut $1 - 2^{-k}$, et ces événements sont indépendants pour des v distincts. Donc

$$\mathbb{P}(\text{aucun joueur ne bat tout } S) = \left(1 - 2^{-k}\right)^{n-k},$$

et $\mathbb{P}(\exists S \text{ mauvais}) \leq \binom{n}{k}\left(1 - 2^{-k}\right)^{n-k}$.

Pour k fixé, $\binom{n}{k}$ croît polynomialement en n tandis que $\left(1 - 2^{-k}\right)^{n-k}$ décroît exponentiellement : le majorant est < 1 pour n assez grand. Un tel tournoi existe donc.

Solution de l'exercice 13.4. Colorions chaque élément indépendamment en rouge ou bleu avec probabilité $\frac{1}{2}$. Pour un A_i fixé, $\mathbb{P}(A_i \text{ monochrome}) = 2 \cdot 2^{-k} = 2^{1-k}$. Donc

$$\mathbb{P}(\exists i,\ A_i \text{ monochrome}) \leq m\, 2^{1-k} < 2^{k-1} \cdot 2^{1-k} = 1.$$

Un coloriage sans ensemble monochrome existe donc.

Solution de l'exercice 13.5. Notons $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Soit p un nombre premier de la forme $p = 3k + 2$ strictement supérieur à $2\max_i |a_i|$ (il en existe une infinité). L'ensemble $C = \{k+1, k+2, \dots, 2k+1\} \subset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est sans somme dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: la somme de deux de ses éléments est comprise entre $2k+2$ et $4k+2 = p+k$, donc, modulo p, appartient à $\{2k+2, \dots, p-1\} \cup \{0, \dots, k\}$, disjoint de C. De plus $|C| = k+1 > \frac{p}{3}$.

Tirons x uniformément dans $\{1, \dots, p-1\}$ et posons $A_x = \{a_i : xa_i \bmod p \in C\}$. Comme $a_i \not\equiv 0 \pmod p$, l'application $x \mapsto xa_i \bmod p$ est une bijection de $\{1, \dots, p-1\}$ sur lui-même, donc

$$\mathbb{P}(a_i \in A_x) = \frac{|C|}{p-1} = \frac{k+1}{3k+1} > \frac{1}{3}.$$

Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}[|A_x|] > \frac{n}{3}$: il existe x avec $|A_x| > \frac{n}{3}$. Enfin A_x est sans somme : si $a_i + a_j = a_\ell$ avec $a_i, a_j, a_\ell \in A_x$, alors $xa_i + xa_j = xa_\ell$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec les trois valeurs dans C, ce qui contredit le caractère sans somme de C.

Solution de l'exercice 13.6. D'après Caro–Wei, il existe un ensemble indépendant de cardinal au moins $\sum_v \frac{1}{d(v)+1}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t+1}$ étant convexe sur $\mathbb{R}_+$, l'inégalité de Jensen donne, avec $\bar{d} = \frac{2m}{n}$,

$$\sum_v \frac{1}{d(v)+1} \geq \frac{n}{\bar{d}+1} = \frac{n}{\frac{2m}{n}+1} = \frac{n^2}{2m+n}.$$

Solution de l'exercice 13.7. Montrons la propriété $E(n)$: « parmi $2n-1$ entiers, n ont une somme divisible par n », par récurrence forte, en utilisant la multiplicativité. Le cas $n = 1$ est trivial.

Si $n = p$ est premier, c'est le cas traité dans le cours. Si $n = ab$ avec $a, b > 1$, supposons $E(a)$ et $E(b)$ acquises. Soient $2ab-1$ entiers. Tant qu'il en reste au moins $2a-1$ non utilisés, on peut extraire un paquet de a entiers de somme divisible par a ; comme $2ab - 1 = (2b-1)a + (a-1)$, on peut extraire successivement $2b-1$ paquets disjoints $P_1, \dots, P_{2b-1}$, chacun de a éléments et de somme $a\,s_j$. Appliquons $E(b)$ aux entiers $s_1, \dots, s_{2b-1}$: il existe b indices j tels que $\sum s_j \equiv 0 \pmod b$. La réunion des paquets correspondants compte $ab = n$ entiers et sa somme vaut $a\sum s_j$, divisible par $ab = n$.

À retenir (L'essentiel du chapitre)

- Convexité : $\sum_i \binom{d_i}{2} \geq n\binom{\bar{d}}{2}$ transforme un double comptage en borne.
- Premier moment : il existe un objet au moins aussi bon que la moyenne. Décomposer en indicatrices et utiliser la linéarité — jamais besoin d'indépendance.
- Probabilité < 1 d'échec ⇒ existence.
- Algèbre linéaire : vecteurs caractéristiques sur $\mathbb{F}_2$, argument de dimension. Le prototype : Oddtown.
- Ces méthodes donnent des existences non constructives : parfaitement acceptables en compétition, à condition de rédiger rigoureusement chaque étape (loi choisie, calcul d'espérance, conclusion).

PARTIE IV — Objectif OIM

CHAPITRE 14

14 Chercher et rédiger : la méthode de travail

Objectifs du chapitre. Ce chapitre ne contient presque aucune mathématique nouvelle. Il contient ce qui sépare, en pratique, l'élève qui connaît la combinatoire de l'élève qui résout un problème de combinatoire à l'OIM : une méthode de recherche systématique, un catalogue de réflexes et une discipline de rédaction.

14.1 Ce qui rend la combinatoire différente

En géométrie ou en algèbre, la connaissance d'un théorème suffit souvent à débloquer un problème. En combinatoire, presque jamais. Les jurys de l'OIM choisissent précisément les problèmes de combinatoire pour leur indépendance vis-à-vis du programme : ce qui est testé est la capacité à comprendre une structure inconnue.

Il en résulte trois conséquences pratiques.

1. **On ne reconnaît pas un problème de combinatoire, on l'apprivoise.** Le temps passé à manipuler l'énoncé (petits cas, exemples, contre-exemples) n'est pas du temps perdu avant la recherche : c'est la recherche.
2. **La réponse précède la preuve.** Dans un problème du type « déterminer la plus grande valeur de k », on trouve d'abord la réponse expérimentalement, on devine ensuite la construction extrémale, et la preuve d'optimalité vient en dernier.
3. **Les outils sont peu nombreux.** Il y a une dizaine de techniques, toutes vues dans ce cours. La difficulté n'est pas de les connaître, mais de savoir laquelle essayer, et dans quel ordre.

14.2 Le protocole des vingt premières minutes

Méthode 14.2.1 — Protocole de démarrage

1. Recopier l'énoncé en notation personnelle, avec des noms de variables. Souligner chaque hypothèse séparément. Une hypothèse non utilisée à la fin est presque toujours le signe d'une erreur.
2. Traiter les petits cas : $n = 1,2,3,4$. Sans exception, même s'ils paraissent triviaux. Écrire les résultats dans un tableau.
3. Conjecturer la réponse ou la forme de la solution.
4. Chercher l'exemple extrémal : la configuration qui rend la conclusion presque fausse. Elle contient toujours l'idée de la preuve.
5. Reformuler : le problème parle-t-il en réalité de graphes ? de mots ? d'un tableau à double entrée ? d'une permutation ?

Exemple 14.2.2 (Le protocole en action). *Soit $n \geq 2$. On place n jetons sur une ligne de n cases. À chaque étape, on choisit deux jetons situés sur des cases voisines et on les déplace tous les deux d'une case vers la droite. Peut-on amener tous les jetons sur la dernière case ?*

Solution. *Petits cas.* $n = 2$: les jetons sont en $1,2$; on les pousse ensemble et on obtient $2,3$: impossible, il n'y a que deux cases. On comprend alors que l'énoncé est mal posé tant qu'on n'a pas

fixé si la ligne est infinie à droite. C'est le premier bénéfice des petits cas : ils révèlent ce que l'énoncé dit vraiment.

Reformulation. Numérotons les cases $1,2,3,\dots$ et notons S la somme des numéros des cases occupées (avec multiplicité). Chaque opération augmente S de 2 : la parité de S est un invariant. Au départ $S = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$; à l'arrivée, tous les jetons sur la case c donnent $S = nc$.

Conclusion. Une condition nécessaire est $nc \equiv \frac{n(n+1)}{2} \pmod 2$, ce qui est impossible dès que $n \equiv 2 \pmod 4$. L'invariant a été trouvé en trois lignes parce que la reformulation numérique avait été faite.

14.3 Le catalogue des réflexes

Le tableau suivant est à connaître par cœur. Il associe à chaque signal présent dans un énoncé les outils à essayer en priorité.

Signal dans l'énoncé	Outils à essayer, dans l'ordre
« Montrer qu'il existe deux… »	Principe des tiroirs (ch. 6) ; bien choisir chaussettes et tiroirs
« Montrer qu'on ne peut pas… », « est-il possible… ? »	Invariant, coloriage, argument de parité, poids (ch. 8)
« Déterminer le plus grand/petit k »	Construction + majoration : deux preuves indépendantes
Une opération répétée, un processus	Monovariant (ch. 8), principe de l'extremum (ch. 9)
« Montrer que le processus s'arrête »	Entier positif strictement décroissant ; descente infinie
Deux familles d'objets et une relation	Double comptage (ch. 7) : compter les couples de deux manières
« Au plus un / exactement un » entre deux objets	Double comptage suivi de convexité (ch. 13)
Une relation d'amitié, de connaissance, de match	Graphe (ch. 10) : lemme des poignées de main, degrés
« Parmi n objets, trois deux à deux… »	Ramsey, Turán (ch. 11)
Un dénombrement compliqué	Bijection (ch. 3), récurrence (ch. 5), inclusion–exclusion (ch. 4)
Deux joueurs alternent	Positions gagnantes, symétrie, vol de stratégie (ch. 12)
« Il existe un objet vérifiant… » sans construction évidente	Méthode probabiliste, argument de moyenne (ch. 13)
Un pavage, un découpage	Coloriage adapté à la forme du pavé (ch. 8)
Des sous-ensembles d'un ensemble fini	Sperner, LYM, algèbre linéaire sur $\mathbb{F}_2$ (ch. 11, 13)

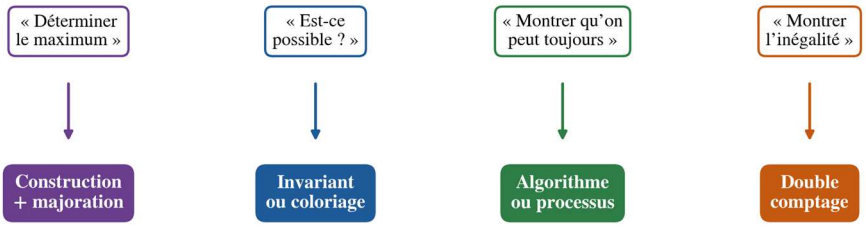
Signal dans l'énoncé	Outils à essayer, dans l'ordre

À retenir (Un ordre de priorité)

Si aucun signal n'est net, l'ordre statistiquement le plus rentable à l'OIM est : petits cas → extremum → invariant → double comptage → récurrence. Les quatre premiers ne coûtent que quelques minutes chacun.

14.4 Les quatre architectures de solution

Presque toutes les solutions de combinatoire olympique ont l'une des quatre formes suivantes. Identifier la forme visée oriente la recherche.



Les quatre architectures de solution et la question de l'énoncé qui oriente vers chacune : « déterminer le maximum », « est-ce possible ? », « montrer qu'on peut toujours », « montrer l'inégalité ».

Méthode 14.4.1 — Architecture 1 : construction + majoration

C'est la forme de tout problème « déterminer la valeur maximale de k ». La solution comporte deux moitiés indépendantes : une construction explicite montrant que $k = k_0$ est atteignable ; une majoration montrant que $k > k_0$ est impossible.

Attention (Erreur classique).

Rédiger la construction et croire le problème fini. Une construction seule vaut typiquement 1 à 2 points sur 7 à l'OIM. Inversement, si la majoration résiste, écrire quand même la construction : les points partiels existent.

Méthode 14.4.2 — Architecture 2 : invariant ou coloriage

Forme des problèmes d'impossibilité. La solution tient en trois lignes une fois l'invariant trouvé, et la recherche consiste entièrement à le trouver. La liste des candidats est courte : parité, somme modulo m, coloriage en 2, 3 ou 4 couleurs, poids $x^i y^j$, nombre d'inversions, position modulo k.

Méthode 14.4.3 — Architecture 3 : algorithme ou processus

Forme des problèmes d'existence constructive : « montrer qu'on peut toujours… ». On décrit une procédure gloutonne, puis on montre qu'elle ne peut pas échouer — soit parce qu'un décompte montre qu'un choix reste toujours disponible, soit parce qu'un monovariant garantit la terminaison.

Méthode 14.4.4 — Architecture 4 : double comptage

Forme des problèmes où apparaît une inégalité numérique inattendue. On identifie un ensemble d'incidences I, on le compte de deux façons, et la comparaison des deux expressions donne l'inégalité (voir le chapitre 7).

14.5 Travailler les petits cas avec méthode

Méthode 14.5.1 — Comment exploiter un petit cas

1. **Compter** : produire le tableau des valeurs $n \mapsto f(n)$ pour $n = 1, \ldots, 6$. Chercher la suite obtenue dans sa mémoire : 2^n, $n!$, $\binom{2n}{n}$, Fibonacci, Catalan, $\frac{n(n-1)}{2}$…
2. **Extrémaliser** : construire à la main la meilleure configuration possible pour $n = 3, 4, 5$. La forme de cette configuration est presque toujours celle de la construction générale.
3. **Casser** : essayer de construire un contre-exemple à l'énoncé. L'endroit précis où la tentative échoue est l'idée de la preuve.
4. **Généraliser** : remplacer une constante de l'énoncé (2021, 100, n^2) par un paramètre. Un énoncé avec une constante bizarre cache toujours une inégalité ; le paramètre la révèle.

Exemple 14.5.2 (La constante cachée). *« Soit $n \geq 100$ un entier. Montrer que parmi les entiers de $[\![n, 2n]\!]$… »* La constante 100 n'a aucun rôle structurel : elle sert uniquement à rendre valide une inégalité polynomiale du type $k^2 - 8k - 3 \geq 0$ apparaissant à la fin de la preuve. Le réflexe correct est donc : ignorer la constante pendant toute la recherche, puis vérifier à la fin quelle borne elle impose.

14.6 Rédiger une solution qui vaut 7 points

À retenir (Les cinq blocs d'une solution complète)

1. **Réponse annoncée en une phrase** : « Nous montrons que la valeur cherchée est $k_0 = \cdots$ ».
2. **Notations** : toutes les lettres utilisées sont définies avant usage.
3. **Construction** (si le problème en demande une), décrite explicitement et vérifiée.
4. **Preuve de la majoration ou de l'impossibilité**, structurée en lemmes.
5. **Conclusion** qui relie les deux moitiés à l'énoncé initial.

Attention (Les sept fautes qui coûtent des points).

1. « Sans perte de généralité » employé sans justifier la symétrie invoquée.
2. « On continue ainsi », « de la même façon » : toute itération doit être une récurrence explicitement rédigée.
3. Récurrence dont l'hypothèse n'est pas énoncée, ou dont le cas initial est absent.
4. Cas limites oubliés : $n = 1$, ensemble vide, égalité dans une inégalité stricte.
5. Confusion entre « il existe une stratégie » et « toute stratégie » dans les problèmes de jeux.
6. Construction décrite mais non vérifiée : il faut prouver qu'elle satisfait toutes les contraintes.
7. Dans un problème de maximum : oublier de prouver que la borne est atteinte.

À retenir (Le test du relecteur)

Avant de rendre, relire la copie en se posant une seule question à chaque paragraphe : un lecteur qui ne connaît pas la solution serait-il *obligé* d'être d'accord ? Si la réponse est « il comprendrait » mais pas « il serait obligé », le paragraphe doit être réécrit.

14.7 Gérer une épreuve de 4 h 30

Une épreuve d'OIM comporte trois problèmes (numérotés 1, 2, 3 par difficulté croissante) et dure 4 h 30. Un partage raisonnable :

Temps	Action	Objectif
0–15 min	Lire les trois énoncés, petits cas mentaux	Choisir l'ordre d'attaque
15–75 min	Problème le plus abordable	Le finir et le rédiger
75–150 min	Deuxième problème	Trouver l'idée principale
150–240 min	Achever, puis attaquer le troisième	Points partiels
240–270 min	Relecture, ajout des cas limites	Sécuriser les points

À retenir (Points partiels en combinatoire)

Contrairement à la géométrie, la combinatoire est généreuse en points partiels lorsque la copie contient : la bonne réponse conjecturée avec la construction associée ; le traitement complet d'un cas particulier significatif (n pair, par exemple) ; un lemme non trivial démontré. Écrire ces éléments, même sans solution complète, est toujours rentable.

14.8 S’entraîner efficacement

À retenir (Les trois règles de l'entraînement)

1. Quarante-cinq minutes minimum de recherche effective avant de lire une correction. En dessous, l’exercice n’a produit aucun apprentissage.
2. Le carnet d’idées : après chaque correction lue, écrire en une phrase l’idée qui manquait — « colorier en diagonales », « compter les couples (élève, problème) », « considérer la configuration minimisant la somme des distances ». Relire ce carnet avant chaque compétition.
3. Rédiger entièrement au moins un problème sur trois. Une solution trouvée mais jamais rédigée ne se transforme pas en points le jour de l’épreuve.

À retenir (L'essentiel du chapitre)

- Petits cas d’abord, toujours : ils donnent la réponse, la construction et souvent l’idée de la preuve.
- Un problème de maximum exige deux preuves : construction et majoration.
- Le catalogue signal → outil doit être un réflexe.
- Une solution vaut 7 points si un lecteur hostile est obligé d’être d’accord avec chaque phrase.

CHAPITRE 15

15 Problèmes d'OIM intégralement corrigés

Voici quatre problèmes de combinatoire posés à l'Olympiade internationale de mathématiques, résolus intégralement, suivis d'une banque de problèmes supplémentaires à chercher. Travaillez chaque problème au moins une heure avant de lire la solution.

15.1 Problème 1 — OIM 1987, problème 1

Problème 15.1 (OIM 1987, problème 1). Pour tout entier $n \geq 1$, soit $p_n(k)$ le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ ayant exactement k points fixes. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k\ p_n(k) = n!$.

Solution du problème 15.1. Comptons de deux façons les couples (σ, i) où σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$ et i est un point fixe de σ, c'est-à-dire $\sigma(i) = i$.

Comptage par permutation. Une permutation ayant exactement k points fixes contribue pour k couples. En sommant sur toutes les permutations :

$$\#\{(\sigma, i)\} = \sum_{k=0}^{n} k\ p_n(k).$$

Comptage par point fixe. Fixons $i \in [\![1, n]\!]$. Les permutations σ telles que $\sigma(i) = i$ sont en bijection avec les permutations de $[\![1, n]\!] \setminus \{i\}$ (on fixe i, et l'on permute librement les $n - 1$ autres éléments) : il y en a $(n-1)!$. En sommant sur les n valeurs de i :

$$\#\{(\sigma, i)\} = n \cdot (n-1)! = n!.$$

En égalant les deux comptages, $\sum_{k=0}^{n} k\ p_n(k) = n!$.

> **Remarque.**
> Ce résultat dit qu'une permutation aléatoire uniforme de $[\![1, n]\!]$ a, en moyenne, exactement un point fixe — et ce, pour tout n, aussi surprenant que cela paraisse pour n grand. La technique — compter un ensemble de couples de deux façons — est le double comptage du chapitre 7 ; c'est l'archétype même du procédé.

15.2 Problème 2 — OIM 1989, problème 6

Problème 15.2 (OIM 1989, problème 6). Une permutation $(x_1, \ldots, x_{2n})$ de $(1, 2, \ldots, 2n)$ est dite posséder la propriété P s'il existe au moins un indice $i \in [\![1, 2n-1]\!]$ tel que $|x_i - x_{i+1}| = n$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il y a strictement plus de permutations possédant la propriété P que de permutations ne la possédant pas.

Solution du problème 15.2. Munissons l'ensemble des $(2n)!$ permutations de la loi uniforme, et pour $k = 1, \ldots, n$ notons Y_k l'indicatrice de l'événement « les valeurs k et $k+n$ sont adjacentes dans la permutation ». Posons $X = Y_1 + \cdots + Y_n$: c'est le nombre de paires $\{k, k+n\}$ apparaissant en positions adjacentes. La permutation possède la propriété P si et seulement si $X \geq 1$.

Calcul de $\mathbb{E}[X]$. Pour un k fixé, la probabilité que les valeurs k et $k+n$ occupent deux positions adjacentes (dans un ordre ou dans l'autre) vaut

$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \frac{2 \cdot (2n-1)!}{(2n)!} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$$

(en regroupant k et $k+n$ en un seul « bloc » pouvant s'orienter de 2 façons, on obtient $2 \cdot (2n-1)!$ permutations favorables). Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\,(Y_k = 1) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Calcul de $\mathbb{E}[X^2]$. Comme $Y_k^2 = Y_k$,

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X] + 2 \sum_{1 \le k < \ell \le n} \mathbb{P}\,(Y_k = 1 \text{ et } Y_\ell = 1).$$

Pour $k \neq \ell$ fixés, regrouper à la fois $\{k, k+n\}$ et $\{\ell, \ell+n\}$ en blocs (chacun orientable de 2 façons) donne

$$\mathbb{P}(Y_k = 1 \text{ et } Y_\ell = 1) = \frac{4 \cdot (2n-2)!}{(2n)!} = \frac{4}{2n(2n-1)} = \frac{2}{n(2n-1)}.$$

Il y a $\binom{n}{2}$ choix de la paire $\{k, \ell\}$, donc

$$2 \sum_{k<\ell} \mathbb{P}\,(Y_k = 1,\, Y_\ell = 1) = 2\binom{n}{2} \cdot \frac{2}{n(2n-1)} = n(n-1) \cdot \frac{2}{n(2n-1)} = \frac{2(n-1)}{2n-1}.$$

D'où

$$\mathbb{E}[X^2] = 1 + \frac{2(n-1)}{2n-1} = \frac{(2n-1) + 2(n-1)}{2n-1} = \frac{4n-3}{2n-1}.$$

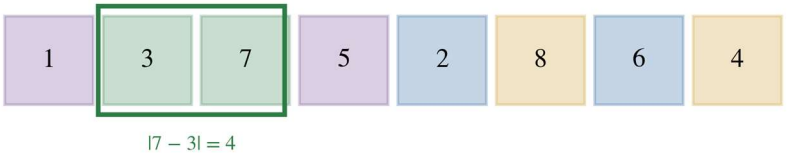
L'inégalité de Cauchy–Schwarz (Paley–Zygmund). Comme $X \geq 0$,

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\big[X \cdot \mathbf{1}_{\{X>0\}}\big] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]} \cdot \sqrt{\mathbb{P}(X>0)}$$

par Cauchy–Schwarz, donc

$$\mathbb{P}(X>0) \geq \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]} = \frac{1}{\frac{4n-3}{2n-1}} = \frac{2n-1}{4n-3}.$$

Conclusion. Il reste à vérifier $\frac{2n-1}{4n-3} > \frac{1}{2}$, ce qui équivaut à $2(2n-1) > 4n-3$, soit $4n-2 > 4n-3$, toujours vrai. Donc $\mathbb{P}(X>0) > \frac{1}{2}$: strictement plus de la moitié des permutations possèdent la propriété P, c'est-à-dire qu'il y en a strictement plus avec la propriété P que sans.



OIM 1989 pour n = 4 : une permutation de ⟦1, 8⟧ possède la propriété P dès qu'une paire {k, k + 4} (même couleur) occupe deux positions voisines ; ici la paire {3, 7}.

À retenir (Le second moment)

La méthode probabiliste du chapitre 13 ne sert pas qu'à montrer qu'un objet *existe* : le second moment permet ici de comparer directement deux effectifs. L'inégalité $\mathbb{P}(X>0) \geq \mathbb{E}[X]^2/\mathbb{E}[X^2]$,

parfois appelée inégalité de Paley–Zygmund, est un outil à connaître : dès que $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[X^2]$ se calculent tous deux par linéarité, elle transforme ces deux nombres en une minoration de probabilité.

15.3 Problème 3 — OIM 1998, problème 2

Problème 15.3 (OIM 1998, problème 2). Dans une compétition, a juges ($a \geq 3$ impair) attribuent à chacun de b candidats la mention « admis » ou « refusé ». On suppose que deux juges quelconques s'accordent sur au plus k candidats. Montrer que $\frac{k}{b} \geq \frac{a-1}{2a}$.

Solution du problème 15.3. Pour chaque candidat c, notons $x_c \in [\![0, a]\!]$ le nombre de juges qui l'admettent. Le nombre de paires de juges d'accord sur c (tous deux « admis » ou tous deux « refusé ») vaut

$$f(x_c) = \binom{x_c}{2} + \binom{a - x_c}{2}.$$

Minoration de f. La fonction $x \mapsto \binom{x}{2} + \binom{a-x}{2}$ est convexe (somme de deux fonctions convexes de x), donc minimale, sur les entiers, au point le plus proche de $a/2$. Comme a est impair, ce minimum est atteint en $x = \frac{a-1}{2}$ ou $x = \frac{a+1}{2}$, et vaut

$$\binom{\frac{a-1}{2}}{2} + \binom{\frac{a+1}{2}}{2} = \frac{(a-1)(a-3)}{8} + \frac{(a+1)(a-1)}{8} = \frac{(a-1)[(a-3)+(a+1)]}{8} = \frac{(a-1)^2}{4}.$$

Donc $f(x_c) \geq \frac{(a-1)^2}{4}$ pour tout candidat c.

Sommation. En sommant sur les b candidats, le nombre total de triplets (juge, juge, candidat) en accord vaut $\sum_{c=1}^{b} f(x_c) \geq \frac{b(a-1)^2}{4}$.

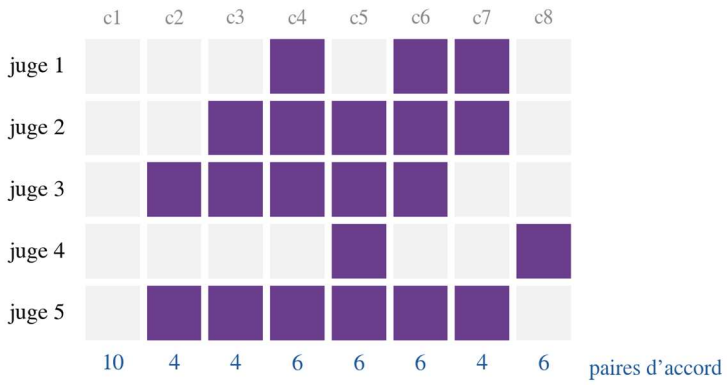
Majoration par l'hypothèse. Ce même total s'écrit aussi comme une somme, sur les $\binom{a}{2}$ paires de juges, du nombre de candidats sur lesquels ils s'accordent ; par hypothèse, chaque terme est $\leq k$, donc le total est $\leq k\binom{a}{2} = \frac{ka(a-1)}{2}$.

Conclusion. En combinant les deux estimations du même total :

$$\frac{b(a-1)^2}{4} \leq \frac{ka(a-1)}{2}.$$

Comme $a \geq 3$, on peut diviser par $\frac{a-1}{4} > 0$: $b(a-1) \leq 2ka$, c'est-à-dire

$$\frac{k}{b} \geq \frac{a-1}{2a}.$$



OIM 1998 : le tableau juges × candidats (violet = admis). Pour chaque candidat (colonne), le nombre de paires de juges d'accord est minimal lorsque les verdicts sont les plus partagés possible.

Remarque.

La parité impaire de a est essentielle : elle seule garantit que le minimum de f vaut exactement $(a-1)^2/4$ (un entier), alors que pour a pair le minimum serait $a(a-2)/4$, ce qui changerait la constante de la conclusion. La clé du problème est de reconnaître un problème de codes binaires déguisé : les verdicts de chaque juge forment un mot de $\{0,1\}^b$, la contrainte « accord $\leq k$ » borne inférieurement la distance de Hamming entre deux mots quelconques, et l'on double compte la somme de ces distances — une fois par paire de juges, une fois par candidat.

15.4 Problème 4 — OIM 2003, problème 1

Problème 15.4 (OIM 2003, problème 1). Soit $S = \{1,2,\dots,10^6\}$ et A une partie de S à 101 éléments. Montrer qu'il existe des entiers $t_1, t_2, \dots, t_{100} \in S$ tels que les ensembles

$$A_j = \{x + t_j : x \in A\}, \qquad j = 1, \dots, 100,$$

soient deux à deux disjoints.

Solution du problème 15.4. Nous construisons $t_1, \dots, t_{100}$ un par un, en choisissant à chaque étape une valeur qui évite un ensemble fini d'interdictions.

Traduction de la condition de disjonction. Pour $j \neq j'$, $A_j \cap A_{j'} = \varnothing$ signifie qu'il n'existe pas $x, x' \in A$ avec $x + t_j = x' + t_{j'}$, c'est-à-dire $t_{j'} - t_j \neq x - x'$ pour tous $x, x' \in A$. Autrement dit, en notant $D = A - A = \{x - x' : x, x' \in A\}$ l'ensemble des différences (y compris 0), il faut $t_{j'} \notin t_j + D$ pour tout $j \neq j'$.

Taille de D. L'ensemble A a 101 éléments, donc $101 \times 100 = 10\,100$ couples (x, x') avec $x \neq x'$; ces couples produisent au plus $10\,100$ différences non nulles distinctes. En ajoutant la différence 0 (obtenue pour $x = x'$) :

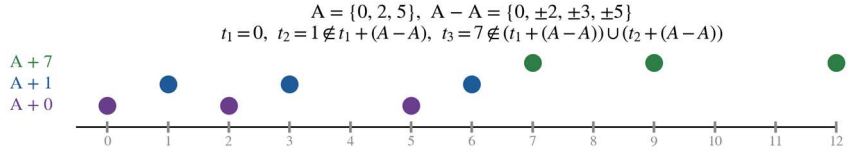
$$|D| \leq 10\,100 + 1 = 10\,101.$$

Construction gloutonne. Choisissons $t_1, t_2, \dots, t_{100}$ successivement. Ayant déjà choisi $t_1, \dots, t_{k-1}$ (avec $k - 1 \leq 99$), l'ensemble des valeurs interdites pour t_k (afin d'assurer $A_k \cap A_j = \varnothing$ pour tout $j < k$) est

$$\bigcup_{j=1}^{k-1} (t_j + D),$$

de cardinal au plus $(k-1)\,|D| \le (k-1) \times 10\,101$.

Pour $k = 100$ (le pire cas), ce cardinal est au plus $99 \times 10\,101 = 999\,999$. Comme $|S| = 1\,000\,000 > 999\,999$, il reste toujours au moins une valeur disponible dans S pour t_k, quel que soit $k \le 100$. On peut donc choisir successivement $t_1, \ldots, t_{100} \in S$ tels que les A_j soient deux à deux disjoints.



OIM 2003 : le translaté A + t_k doit éviter chacun des translatés déjà placés ; les valeurs interdites pour t_k forment au plus (k − 1)·|A − A| valeurs.

À retenir (Une borne au plus juste)

La borne est volontairement — et remarquablement — serrée : $99 \times 10\,101 = 999\,999$, exactement un de moins que $|S| = 10^6$. C'est le signe que les constantes de l'énoncé (101 éléments, 100 translations, univers de taille 10^6) ont été choisies avec précision par les auteurs du problème : toute dégradation (un élément de plus dans A, un translaté de plus à placer) ferait échouer l'argument glouton tel quel. Repérer ce type de coïncidence numérique est un signal : la construction gloutonne directe, sans finesse supplémentaire, est probablement la solution attendue.

15.5 Banque de problèmes d'OIM à chercher

Pour aller plus loin : les problèmes suivants sont des classiques de la combinatoire olympique, plus difficiles ou plus longs à rédiger intégralement. Cherchez-les sérieusement ; un indice est donné entre parenthèses, à ne lire qu'après un effort réel.

Problème 15.A (OIM 2011, problème 2 — le « moulin à vent »). Soit S un ensemble fini d'au moins deux points du plan, trois quelconques n'étant jamais alignés. Un « moulin » est un processus qui part d'une droite passant par un unique point $P \in S$; la droite tourne dans le sens horaire autour de P jusqu'à rencontrer un autre point Q de S, qui devient le nouveau pivot, et ainsi de suite indéfiniment. Montrer qu'on peut choisir P et une direction initiale de sorte que chaque point de S serve de pivot une infinité de fois.

(Indice : fixez une droite initiale passant par un seul point de S et laissant autant de points (à une unité près) de chaque côté, puis suivez, tout au long du processus, le nombre de points situés d'un côté fixé de la droite tournante : ce nombre reste remarquablement constant. Un classique de la combinatoire géométrique, réputé difficile malgré un énoncé élémentaire.)

Problème 15.B (OIM 2015, problème 1). Un ensemble fini S de points du plan est dit équilibré si, pour tous $A, B \in S$ distincts, il existe $C \in S$ avec $CA = CB$. Il est dit sans centre si aucun point de S n'est équidistant de trois autres points de S. Montrer qu'il existe un ensemble équilibré de n points pour tout $n \ge 3$, et déterminer pour quels n il existe un ensemble équilibré et sans centre.

(Indice : montrer d'abord qu'un polygone régulier à un nombre impair de sommets est équilibré, en étudiant la médiatrice d'une corde ; c'est le cas facile. La difficulté se concentre sur la construction pour n pair et sur la preuve d'impossibilité du cas sans centre pour n pair.)

Problème 15.C (OIM 2021, problème 1). Soit $n \geq 100$ un entier. Ivan écrit les nombres $n, n+1, \ldots, 2n$ chacun sur une carte différente, mélange les $n+1$ cartes et les répartit en deux piles. Montrer qu'une des deux piles contient toujours deux cartes dont la somme des nombres est un carré parfait.

(Indice : cherchez trois nombres a, b, c dans $\{n, \ldots, 2n\}$ tels que les trois sommes $a+b$, $b+c$, $a+c$ soient simultanément des carrés : un triangle ne peut pas être bicolorié sans arête monochrome.)

Problème 15.D (OIM 2007, problème 3). Dans une compétition, certains participants sont amis (relation symétrique). On appelle clique un groupe de participants deux à deux amis, et taille de la clique son cardinal. On suppose que la plus grande taille de clique est paire. Montrer qu'on peut répartir les participants en deux salles de sorte que la plus grande clique contenue dans chaque salle ait la même taille.

(Indice : partez d'une clique de taille maximum, répartissez-la en deux moitiés égales, une par salle, puis ajoutez les autres participants un à un en choisissant à chaque fois la salle qui préserve un déséquilibre minimal entre les deux plus grandes cliques.)

Problème 15.E (OIM 1990, problème 3). Déterminer tous les entiers $n > 1$ tels que $n^2 \mid 2^n + 1$.

(Un problème-frontière entre arithmétique et combinatoire, traité en détail dans le tome Arithmétique de cette collection (exemple 14.3.4 et exercice 4.6) : plus petit facteur premier de n, puis lemme LTE.)

À retenir (Le mot de la fin)

Un problème de combinatoire d'OIM se reconnaît rarement à un mot-clé : il se reconnaît à ce qu'aucune des techniques du cours ne s'applique immédiatement telle quelle. La bonne nouvelle est que la combinaison de deux ou trois outils — un double comptage, un invariant bien choisi, un argument d'extremum — suffit presque toujours. La mauvaise nouvelle est qu'il faut d'abord avoir cherché longtemps, seul, pour reconnaître laquelle. Bon travail, et bonne chance.

PARTIE V — Annexes

ANNEXE A

A Formulaire de combinatoire

A.1 Dénombrement élémentaire

Soit E un ensemble à n éléments.

Objet compté	Formule
Parties de E	2^n
Applications de $[\![1,k]\!]$ dans E (listes avec répétition)	n^k
Injections de $[\![1,k]\!]$ dans E (arrangements)	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
Bijections de E dans E (permutations)	$n!$
Parties à k éléments (combinaisons)	$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$
Multi-ensembles à k éléments pris dans E	$\binom{n+k-1}{k}$
Solutions de $x_1 + \cdots + x_n = k$ en entiers ≥ 0	$\binom{n+k-1}{n-1}$
Solutions de $x_1 + \cdots + x_n = k$ en entiers ≥ 1	$\binom{k-1}{n-1}$
Anagrammes d'un mot à lettres de multiplicités $k_1, \ldots, k_r$	$\dfrac{n!}{k_1! \cdots k_r!}$
Permutations circulaires de n objets	$(n-1)!$
Surjections de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,k]\!]$	$\displaystyle\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$
Dérangements de $[\![1,n]\!]$	$D_n = n! \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \dfrac{(-1)^j}{j!}$
Partitions de $[\![1,n]\!]$ en k blocs	$S(n,k)$ (nombre de Stirling de seconde espèce)
Partitions de $[\![1,n]\!]$	$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$ (nombre de Bell)
Chemins de Dyck de longueur $2n$	$C_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$
Arbres étiquetés sur n sommets	n^{n-2} (Cayley)

À retenir (premiers nombres utiles)

Catalan : 1,1,2,5,14,42,132,429,1430,4862, …

Fibonacci : 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89, …

Dérangements : $D_1 = 0$, $D_2 = 1$, $D_3 = 2$, $D_4 = 9$, $D_5 = 44$, $D_6 = 265$, …

Bell : 1,1,2,5,15,52,203,877, …

A.2 Coefficients binomiaux

À retenir

- Symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
- Absorption : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
- Binôme de Newton : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.
- Sommes : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ $(n \geq 1)$.
- Vandermonde : $\sum_k \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$.
- Somme des carrés : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
- Crosse de hockey : $\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$.
- Moment : $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$.
- Série génératrice : $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.
- Newton généralisé : $(1-x)^{-m} = \sum_{k \geq 0} \binom{m+k-1}{k} x^k$.

À retenir (encadrements)

Pour $1 \leq k \leq n$, et pour tout $n \geq 1$:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k, \qquad \frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n, \qquad n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

À retenir (arithmétique)

Si p est premier, alors $p \mid \binom{p}{k}$ pour $0 < k < p$; théorème de Lucas : $\binom{n}{k} \equiv \prod_i \binom{n_i}{k_i} \pmod{p}$, où les n_i et les k_i sont les chiffres de n et de k en base p ; formule de Legendre : $v_p(n!) = \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$.

A.3 Les grands principes

Principe	Énoncé
Tiroirs	$n+1$ objets dans n tiroirs ⇒ un tiroir contient ≥ 2 objets.
Tiroirs généralisé	n objets dans k tiroirs ⇒ un tiroir en contient ≥ $\lceil n/k \rceil$.
Valeur moyenne	Une famille de réels contient un élément ≥ sa moyenne et un élément ≤ sa moyenne.
Inclusion–exclusion	$\lvert \cup_i A_i \rvert = \sum_{\varnothing \neq I} (-1)^{\lvert I \rvert + 1} \lvert \cap_{i \in I} A_i \rvert$
Bonferroni	$\sum_i \lvert A_i \rvert - \sum_{i<j} \lvert A_i \cap A_j \rvert \leq \lvert \cup_i A_i \rvert \leq \sum_i \lvert A_i \rvert$
Double comptage	$\sum_{a \in A} \lvert \{b : (a,b) \in R\} \rvert = \lvert R \rvert = \sum_{b \in B} \lvert \{a : (a,b) \in R\} \rvert$

Principe	Énoncé
Extremum	Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément ; tout ensemble fini non vide de réels a un maximum.
Descente infinie	Il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels.
Invariance	Si une quantité est conservée par chaque opération, deux configurations n'ayant pas la même valeur ne sont pas reliées.
Premier moment	Il existe une issue pour laquelle $X \geq \mathbb{E}[X]$.

A.4 Graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, $n = |V|$, $m = |E|$.

À retenir

- **Poignées de main** : $\sum_v \deg(v) = 2m$; le nombre de sommets de degré impair est pair.
- **Arbres** : G est un arbre ⇔ G connexe et $m = n - 1$ ⇔ G sans cycle et $m = n - 1$. Tout arbre à $n \geq 2$ sommets a au moins deux feuilles.
- **Connexité** : si $m > \binom{n-1}{2}$, alors G est connexe.
- **Eulérien** : G connexe admet un circuit eulérien ⇔ tous les degrés sont pairs ; un chemin eulérien ⇔ au plus deux sommets de degré impair.
- **Biparti** : G est biparti ⇔ G n'a aucun cycle de longueur impaire.
- **Hall** : un graphe biparti (X, Y) admet un couplage saturant X ⇔ $|N(S)| \geq |S|$ pour toute partie $S \subseteq X$.
- **Kőnig** : dans un graphe biparti, taille maximale d'un couplage = taille minimale d'un transversal.
- **Planaire** : $n - m + f = 2$ (Euler) ; $m \leq 3n - 6$ $(n \geq 3)$; $m \leq 2n - 4$ si G est de plus sans triangle ; K_5 et $K_{3,3}$ ne sont pas planaires ; quatre couleurs suffisent.
- **Mantel** : G sans triangle ⇒ $m \leq n^2/4$.
- **Turán** : G sans K_{r+1} ⇒ $m \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}$.
- **Ramsey** : $R(3,3) = 6$, $R(4,4) = 18$, $R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$, $R(s,s) > 2^{s/2}$ $(s \geq 3)$.
- **Coloration** : $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$; $\chi(G) \leq \Delta(G)$ si G est connexe, non complet et n'est pas un cycle impair (Brooks) ; $\chi'(G) \in \{\Delta, \Delta + 1\}$ (Vizing).
- **Tournois** : tout tournoi possède un chemin hamiltonien et un « roi » (sommet atteignant tout autre en au plus deux arcs).

A.5 Familles d'ensembles et méthodes algébriques

À retenir

- **Sperner** : une antichaîne de parties de $[\![1, n]\!]$ a au plus $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ éléments.
- **LYM** : pour une antichaîne $\mathcal{F}$ de parties de $[\![1, n]\!]$, $\sum_{A \in \mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1$.

- **Erdős–Ko–Rado** : une famille de parties à k éléments de $[\![1,n]\!]$, deux à deux d'intersection non vide, avec $n \geq 2k$, a au plus $\binom{n-1}{k-1}$ éléments.
- **Dilworth** : dans un ensemble ordonné fini, la taille maximale d'une antichaîne est égale au nombre minimal de chaînes recouvrantes.
- **Erdős–Szekeres** : toute suite de $(p-1)(q-1)+1$ réels contient une sous-suite croissante de longueur p ou décroissante de longueur q.
- **Oddtown** : m parties distinctes de $[\![1,n]\!]$, de cardinal impair, d'intersections deux à deux paires $\Rightarrow m \leq n$.
- **Fisher** : m parties distinctes de $[\![1,n]\!]$ dont les intersections deux à deux ont toutes le même cardinal $\lambda \geq 1 \Rightarrow m \leq n$.
- **Combinatorial Nullstellensatz** : si $\deg P = \sum t_i$ et si le coefficient de $\prod x_i^{t_i}$ dans P est non nul, alors pour toutes parties S_i avec $|S_i| > t_i$, il existe $(s_1, \ldots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ tel que $P(s_1, \ldots, s_n) \neq 0$.
- **Cauchy–Davenport** : $|A+B| \geq \min(p, |A|+|B|-1)$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier, A et B non vides).

A.6 Jeux combinatoires

À retenir

- Une position est perdante (P) si toutes ses options sont gagnantes ; gagnante (N) si elle possède au moins une option perdante.
- **Nim** : la position $(a_1, \ldots, a_k)$ est perdante $\Leftrightarrow a_1 \oplus \cdots \oplus a_k = 0$ (somme binaire sans retenue).
- **Sprague–Grundy** : $g(\text{position}) = \operatorname{mex}\{g(\text{options})\}$ et la somme de jeux a pour valeur le XOR des valeurs.
- **Symétrie** : si le second joueur peut toujours répondre par une opération symétrique, il gagne (ou fait au moins nulle).
- **Vol de stratégie** : dans un jeu symétrique sans nulle où un coup supplémentaire ne nuit jamais, le premier joueur ne perd pas : il a donc une stratégie gagnante.

ANNEXE B

B Mémento : quel outil pour quel énoncé ?

L'énoncé demande…	Premiers gestes
de compter des objets	bijection avec un objet connu ; récurrence ; inclusion–exclusion ; fonction génératrice
de montrer qu'il existe deux objets égaux/proches	tiroirs : définir explicitement chaussettes et tiroirs
de montrer qu'une configuration est inatteignable	invariant : parité, somme modulo m, coloriage, poids
de montrer qu'un processus se termine	monovariant entier positif strictement décroissant
de déterminer un maximum ou un minimum	construction et majoration, séparément
de prouver une inégalité entre effectifs	double comptage, puis convexité
de montrer qu'un objet « moyen » suffit	premier moment, argument probabiliste
d'étudier une relation binaire (amitié, match)	modéliser par un graphe ; degrés ; parité
de trouver une structure dans tout coloriage	Ramsey ; principe des tiroirs itéré
de décider qui gagne un jeu	petites positions à la main ; positions P/N ; symétrie ; Nim
de paver ou découper une figure	coloriage adapté au pavé ; comptage de cases par couleur
de traiter des sous-ensembles d'un ensemble	Sperner, LYM, algèbre linéaire sur $\mathbb{F}_2$

À retenir (les dix questions à se poser devant un problème bloqué)

1. Ai-je traité les cas $n = 1,2,3,4$ à la main ?
2. Quelle hypothèse de l'énoncé n'ai-je pas encore utilisée ?
3. Puis-je deviner la réponse, puis la configuration extrémale ?
4. Y a-t-il une quantité conservée par l'opération ?
5. Y a-t-il une quantité strictement décroissante ?
6. Puis-je compter quelque chose de deux façons ?
7. Le problème parle-t-il en réalité d'un graphe ?
8. Que se passe-t-il si je considère l'élément le plus grand ? le plus petit ?
9. Puis-je résoudre le problème pour $n - 1$ et ajouter un objet ?
10. Puis-je résoudre un problème plus faible, ou un problème plus fort ?

ANNEXE C

C Plan d'entraînement en vingt semaines

Le plan suivant suppose environ six heures de travail hebdomadaire. La colonne « Problèmes » indique le nombre de problèmes à chercher sérieusement (au moins 45 minutes chacun avant toute lecture de correction).

Sem.	Contenu	Chap.	Pro-blèmes
1–2	Dénombrement, bijections élémentaires	1	10
3–4	Coefficients binomiaux, identités	2	10
5	Bijections, Catalan, codages	3	8
6	Inclusion–exclusion	4	8
7	Récurrences, fonctions génératrices	5	8
8–9	Principe des tiroirs	6	12
10	Double comptage	7	10
11–12	Invariants, monovariants, coloriages	8	14
13	Extremum, descente, récurrence constructive	9	10
14–15	Théorie des graphes	10	12
16	Combinatoire extrémale (Turán, Ramsey, Sperner)	11	10
17	Jeux mathématiques	12	8
18	Méthodes probabiliste et algébrique	13	8
19	Méthodologie et rédaction	14	6
20	Problèmes d'OIM en temps limité	15	6

À retenir (rythme hebdomadaire conseillé)

- **Jour 1** (2 h) : lecture active du cours, démonstrations refaites sans le texte.
- **Jours 2 et 3** (2 × 1 h 30) : recherche de problèmes, sans correction.
- **Jour 4** (1 h) : lecture des corrections, mise à jour du carnet d'idées.
- **Toutes les quatre semaines** : une épreuve blanche de 4 h 30 sur trois problèmes non vus, entièrement rédigée.

ANNEXE D

D Bibliographie et ressources

D.1 Ouvrages de référence

- A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer. Le chapitre *The Box Principle* et le chapitre *The Invariance Principle* sont les meilleurs recueils d'exercices existants sur ces deux thèmes.
- C. C. Chen, K. M. Koh, *Principles and Techniques in Combinatorics*, World Scientific. Traitement systématique du dénombrement, du crible et des fonctions génératrices, avec des exercices très progressifs.
- M. Aassila, *Objectif Olympiades de Mathématiques* — Tome 3 : Combinatoire 1 et Tome 4 : Combinatoire 2. Cours en français couvrant ensembles, dénombrement, tiroirs, inclusion–exclusion, double comptage, récurrence, invariants, puis graphes, combinatoire géométrique et jeux ; plus de 650 exercices corrigés.
- D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović, *The IMO Compendium*, Springer : tous les énoncés d'OIM et de listes courtes, avec solutions.

  NB : Ce livre est à but éducatif uniquement. Il a été réalisé avec recours à l'IA.

D.2 Ressources en ligne

- **Mathraining** (mathraining.be) : plateforme francophone d'entraînement olympique. La section Combinatoire est organisée en chapitres avec théorie et exercices auto-corrigés : Principe des tiroirs, Dénombrement, Pavages, Coefficients binomiaux (les essentiels) ; Invariants et (mono)variants, Théorie des graphes, Dénombrement (suite) (les classiques) ; Double comptage (les pointus). Ces chapitres couvrent l'essentiel de la progression suivie dans le présent cours ; la correspondance précise est donnée en D.3.
- **Art of Problem Solving** : forums et archives de solutions pour tous les problèmes d'OIM et de listes courtes.
- **Site officiel de l'OIM** : énoncés officiels de toutes les éditions.

D.3 Correspondance avec les chapitres de Mathraining

Chapitre Mathraining	Chapitre du présent cours
Dénombrement	1
Coefficients binomiaux	2
Dénombrement (suite)	3, 4, 5
Principe des tiroirs	6
Double comptage	7
Invariants et (mono)variants	8
Pavages	8 (section coloriages)
Théorie des graphes	10, 11

À propos de l'auteur

Ali AKIR

Ali AKIR est formateur bénévole depuis 2017 au sein de l'Association Tunisienne de Compétitions et de Culture Mathématique (ATCCM), où il prépare des élèves tunisiens aux olympiades internationales de mathématiques (IMO, PAMO, AMO, OFM…). Il a occupé le rôle de coordinateur régional du Pan-African Mathematical Olympiad (PAMO) pour l'Afrique, ainsi que celui de coordinateur de l'Olympiade Francophone de Mathématiques (OFM). Il forme également des formateurs dans le cadre de programmes régionaux de préparation olympique.

La collection ATOMATH rassemble l'ensemble de son enseignement olympique, organisé en quatre tomes : Algèbre, Géométrie, Arithmétique et Combinatoire.

ATOMATH

TOME IV : COMBINATOIRE

La collection ATOMATH propose un parcours complet de préparation aux Olympiades internationales de mathématiques. Ce quatrième et dernier tome est entièrement consacré à la combinatoire olympique, de la première formule de dénombrement au problème 3 de l'OIM.

La combinatoire occupe une place à part dans les compétitions internationales : c'est, de toutes les branches olympiques, celle qui récompense le moins la connaissance pure et le plus l'ingéniosité. On ne résout pas un problème de combinatoire en appliquant un théorème, mais en trouvant le bon point de vue — ce qui en fait, pour beaucoup d'élèves, la discipline à la fois la plus redoutée et la plus formatrice.

Conçu pour accompagner l'élève depuis le niveau junior jusqu'au niveau senior exigé par l'IMO, cet ouvrage ne suppose aucun prérequis au-delà d'une bonne maîtrise du calcul algébrique élémentaire et du raisonnement par récurrence. Chaque technique est rigoureusement introduite, démontrée, puis mise à l'épreuve sur des exemples résolus et une large banque d'exercices gradués.

Au programme :

- **Compter :** principes fondamentaux du dénombrement, coefficients binomiaux, bijections, inclusion–exclusion, récurrences et fonctions génératrices.
- **Les grands principes :** principe des tiroirs, double comptage, invariants et monovariants, principe de l'extremum.
- **Structures combinatoires :** théorie des graphes, combinatoire extrémale, jeux mathématiques, méthodes algébrique et probabiliste.
- **Objectif OIM :** stratégie de recherche, méthode de rédaction et problèmes d'OIM entièrement corrigés.

Ali AKIR
Formateur olympique