COLLECTION ATOMATH

Préparation progressive aux Olympiades internationales de mathématiques

TOME II

GÉOMÉTRIE

De la chasse aux angles à la géométrie projective

ÉDITION DÉTAILLÉE · TOUS LES THÉORÈMES DÉMONTRÉS

Ali AKIR

FORMATEUR OLYMPIQUE

Première édition

COLLECTION ATOMATH

ATOMATH

Préparation progressive aux Olympiades internationales de mathématiques

TOME II

Géométrie

De la chasse aux angles à la géométrie projective

Cours complet, exemples résolus et problèmes corrigés

Ali AKIR

Formateur olympique

Première édition

ATOMATH — Tome II : Géométrie

Collection ATOMATH, préparation aux Olympiades internationales de mathématiques.

Tous droits réservés. Toute reproduction, même partielle, par quelque procédé que ce soit, est interdite sans autorisation préalable, à l'exception des courtes citations dans le cadre d'un usage pédagogique, conformément aux dispositions légales en vigueur.

Table des matières

Introduction **1**

Mode d'emploi de ce tome **2**

Comment ce tome a été conçu 2
Les encadrés 2
Le parcours conseillé 2
Code de difficulté 2
Notations utilisées 3

1 Notations, conventions et boîte à outils **4**

1.1 Notations générales 4
1.2 Longueurs algébriques 5
1.3 Angles orientés de droites 6
1.4 Les six réflexes du géomètre 8
1.5 Le formulaire minimal 8

PARTIE I — Les essentiels **10**

2 La chasse aux angles **11**

2.1 Les égalités d'angles fondamentales 11
2.2 Le théorème de l'angle inscrit 12
2.3 Angles orientés : la rigueur sans les cas 15
2.4 Bissectrices : les angles à ne pas rater 16
2.5 Exemples résolus 18
2.6 Exercices 19
2.7 Corrigés 20
2.8 Problèmes d'entraînement 21

3 Quadrilatères cycliques **23**

3.1 Caractérisations 23
3.2 Le théorème de Ptolémée 26
3.3 Points cocycliques et puissances 28
3.4 Exercices 30
3.5 Corrigés 31
3.6 Problèmes d'entraînement 32

4 Le triangle : points remarquables et relations métriques **34**

4.1 Les deux lois fondamentales 34
4.2 Les quatre points remarquables classiques 36
4.3 Bissectrices, cercle inscrit et cercles exinscrits 37
4.4 Relations métriques utiles 40
4.5 Exemples résolus 41
4.6 Exercices 42
4.7 Corrigés 43
4.8 Problèmes d'entraînement 44

PARTIE II — Les classiques **46**

5 Puissance d'un point, axe radical, centre radical **47**
5.1 Définition et propriétés 47
5.2 Axe radical 48
5.3 Exemples résolus 51
5.4 Exercices 53
5.5 Corrigés 54
5.6 Problèmes d'entraînement 56

6 Céviennes : théorèmes de Ceva et de Ménélaüs **57**
6.1 Rapports orientés et céviennes 57
6.2 Le théorème de Ceva 57
6.3 Le théorème de Ménélaüs 59
6.4 Les formes trigonométriques 61
6.5 Exemples résolus 63
6.6 Exercices 64
6.7 Corrigés 65
6.8 Problèmes d'entraînement 66

7 Droite d'Euler, cercle des neuf points, droites de Simson **67**
7.1 Rappel : la formule mère 67
7.2 Le cercle des neuf points, revisité 68
7.3 Les réflexions de l'orthocentre 68
7.4 Le triangle orthique 69
7.5 Droites de Simson et de Steiner 70
7.6 Exemples résolus 73
7.7 Exercices 73
7.8 Corrigés 74
7.9 Problèmes d'entraînement 75

8 Transformations : homothéties, rotations, similitudes **76**
8.1 Homothéties 76
8.2 Rotations et symétries 78
8.3 La similitude directe : l'outil décisif 80
8.4 Exemples résolus 82
8.5 Exercices 83
8.6 Corrigés 84
8.7 Problèmes d'entraînement 84

9 Méthodes calculatoires : trigonométrie, complexes, coordonnées barycentriques **86**
9.1 Choisir sa méthode 86
9.2 Trigonométrie 86
9.3 Les nombres complexes 87
9.4 Les coordonnées barycentriques 90
9.5 Exemples résolus 93
9.6 Exercices 93
9.7 Corrigés 93

9.8 Problèmes d'entraînement 94

PARTIE III — Les techniques pointues 96

10 L'inversion 97
10.1 Définition et premières propriétés 97
10.2 Bien choisir son pôle 100
10.3 Exemples résolus 103
10.4 Exercices 104
10.5 Corrigés 104
10.6 Problèmes d'entraînement 105

11 Cercle d'Apollonius, division harmonique et symédianes 107
11.1 Le cercle d'Apollonius 107
11.2 Le quadrilatère harmonique 110
11.3 Les symédianes 111
11.4 Exemples résolus 113
11.5 Exercices 114
11.6 Corrigés 114
11.7 Problèmes d'entraînement 115

12 Éléments de géométrie projective 116
12.1 Birapport 116
12.2 Pôle et polaire 117
12.3 Desargues, Pascal, Brianchon 119
12.4 Exemples résolus 122
12.5 Exercices 123
12.6 Corrigés 124
12.7 Problèmes d'entraînement 124

PARTIE IV — Objectif IMO 126

13 Le bestiaire des lemmes de configuration 127
13.1 Autour de l'incentre et du milieu d'arc 127
13.2 Symédiane et quadrilatère harmonique 129
13.3 Similitude spirale et point de Miquel 130
13.4 Les faits sur l'orthocentre 130
13.5 Le cercle mixtilinéaire 131
13.6 Points de Humpty et de Dumpty 132
13.7 Exercices 134
13.8 Corrigés 135

14 Stratégie, méthode et rédaction 136
14.1 Les sept étapes face à un problème 136
14.2 Choisir sa méthode 136
14.3 Trois techniques de déblocage 137
14.4 Rédiger une solution qui vaut 7/7 137
14.5 Gestion du temps en épreuve 138
14.6 Programme d'entraînement 138

15 Problèmes de l'OIM entièrement corrigés 139
15.1 OIM 2000, problème 1 139
15.2 OIM 2006, problème 1 140
15.3 OIM 2008, problème 1 140
15.4 OIM 2012, problème 1 141
15.5 OIM 2013, problème 4 142
15.6 OIM 2018, problème 1 144
15.7 OIM 2020, problème 1 145
15.8 Problèmes proposés 146

PARTIE V — Annexes 148

A Formulaire complet 149
A.1 Notations 149
A.2 Relations métriques dans le triangle 149
A.3 Identités trigonométriques utiles 149
A.4 Nombres complexes : le cercle unité 150
A.5 Coordonnées barycentriques 150
A.6 Les théorèmes à connaître par cœur 151
A.7 Bibliographie 151

À propos de l'auteur 153

Introduction

La collection ATOMATH propose un parcours complet de préparation aux Olympiades internationales de mathématiques, organisé en quatre tomes indépendants mais complémentaires : Algèbre, Géométrie, Arithmétique et Combinatoire. Chaque tome couvre, de façon autonome, l'un des quatre grands domaines abordés lors des compétitions internationales.

Ce deuxième tome est consacré à la **géométrie olympique**. Deux des six problèmes de l'Olympiade internationale de mathématiques sont, presque chaque année, des problèmes de géométrie. Ce n'est pas un hasard : la géométrie est le seul domaine où un élève peut, avec un bagage théorique fini et parfaitement délimité, atteindre un niveau de maîtrise qui lui garantit des points. Contrairement à la combinatoire, où l'idée décisive peut venir de nulle part, la géométrie olympique repose sur un corpus de configurations : une centaine de lemmes, une dizaine de techniques, et une méthode de travail.

Le secret tient en deux points, et il n'y en a pas de troisième :

1. **Connaître les bonnes techniques.** Résoudre un problème inconnu, c'est le ramener à une situation connue. Si l'on ne connaît rien, on ne peut rien y ramener.
2. **S'entraîner intensivement.** La reconnaissance de configuration est une compétence motrice : elle s'acquiert par répétition, pas par lecture.

Ce tome contient l'intégralité de la théorie exigible pour l'IMO, avec démonstrations complètes, figures, exemples résolus commentés, et exercices corrigés en détail. Les problèmes proposés sont issus des olympiades nationales et internationales (IMO, listes courtes de l'IMO, olympiades russe, chinoise, iranienne, USAMO, etc.).

Ce que ce livre ne peut pas faire à votre place : chercher. Lisez l'énoncé, faites une grande figure soignée, et cherchez au moins trente minutes avant d'ouvrir le corrigé. Un corrigé lu sans avoir cherché n'apprend rien.

À retenir (Une règle absolue)

En compétition, une figure fausse ou minuscule est la première cause d'échec en géométrie. Utilisez une page entière, une règle et un compas. Placez les points dans une configuration générique (pas de triangle presque isocèle, pas d'angle presque droit) : les coïncidences accidentelles vous feront perdre des heures.

Bon travail, et bonne route vers l'IMO.

Mode d'emploi de ce tome

Comment ce tome a été conçu

La progression suit l'architecture classique de l'entraînement olympique : les essentiels (chasse aux angles, quadrilatères cycliques, triangle), les classiques (puissance d'un point, Ceva et Ménélaüs, transformations, méthodes calculatoires), les techniques pointues (inversion, polarité, cercles d'Apollonius, birapport et géométrie projective), puis un dernier bloc *Objectif IMO* rassemblant les lemmes de configuration incontournables, la méthodologie de recherche et une série de problèmes d'olympiades internationales entièrement corrigés.

Chaque notion est introduite par une définition précise ; chaque résultat est démontré, illustré par une figure, appliqué sur un exemple type, puis travaillé par des exercices dont tous les corrigés sont fournis.

Les encadrés

- **Théorème** : résultat majeur, à connaître par cœur.
- **Proposition** : résultat utile, à savoir redémontrer.
- **Lemme** : brique de configuration, le cœur du métier.
- **Définition** : vocabulaire et notations.
- **Exemple** : problème type entièrement résolu.
- **Méthode** : marche à suivre opératoire.
- **Attention** : piège classique, erreur fréquente.

Le parcours conseillé

- **Niveau 1 (débutant)** : chapitres 1 à 4.
- **Niveau 2 (national)** : chapitres 5 à 9.
- **Niveau 3 (international)** : chapitres 10 à 12.
- **Niveau 4 (IMO)** : chapitres 13 à 15, à travailler en parallèle du reste dès que possible.

À retenir (Rythme réaliste)

Un chapitre par semaine, avec tous les exercices faits avant lecture du corrigé, plus deux problèmes d'olympiade par semaine, chronométrés (90 minutes par problème).

Code de difficulté

- ★ **Junior** : application directe du cours.
- ★★ **Intermédiaire** : exercice consistant, une idée à trouver puis une technique standard.
- ★★★ **Senior** : niveau olympiade nationale. Plusieurs idées à combiner.

Notations utilisées

Notation	Signification
$\widehat{ABC}$	mesure (non orientée) de l'angle en B dans le triangle ou la configuration
$\measuredangle(AB, CD)$	angle orienté de droites, modulo $180°$
$\overline{AB}$	longueur algébrique : $\overline{AB} = -\overline{BA}$, valeurs dans $\mathbb{R}$
$[ABC]$ ou $\mathcal{A}(ABC)$	aire (algébrique ou non selon le contexte) du triangle ABC
(ABC)	cercle circonscrit au triangle ABC
$\mathrm{pow}(P, \omega)$	puissance du point P par rapport au cercle ω
a, b, c	longueurs des côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC
R, r	rayons des cercles circonscrit et inscrit
s	demi-périmètre : $s = \frac{a+b+c}{2}$
O, H, G, I	centre du cercle circonscrit, orthocentre, centre de gravité, centre du cercle inscrit

Les problèmes sont étiquetés par leur origine lorsqu'elle est connue : (IMO 1995, problème 1) désigne le problème 1 de l'IMO 1995, (ISL) un problème de la liste courte (*shortlist*) de l'IMO, (USAMO), (Iran TST), etc. Un problème sans étiquette est un exercice d'entraînement classique.

À retenir (Comment travailler)

1. Lire le cours avec un crayon et refaire chaque démonstration sur une feuille blanche, cours fermé.
2. Chercher chaque exercice au moins 30 à 45 minutes avant de regarder la solution, en ayant tracé une grande figure soignée.
3. Après avoir lu une solution, la réécrire seul le lendemain, figure comprise.
4. Tenir un carnet de configurations : pour chaque problème raté, dessiner la configuration clé et noter en une phrase le lemme qui la débloquait.

Bon travail, et bonne route vers l'IMO.

CHAPITRE 1

1 Notations, conventions et boîte à outils

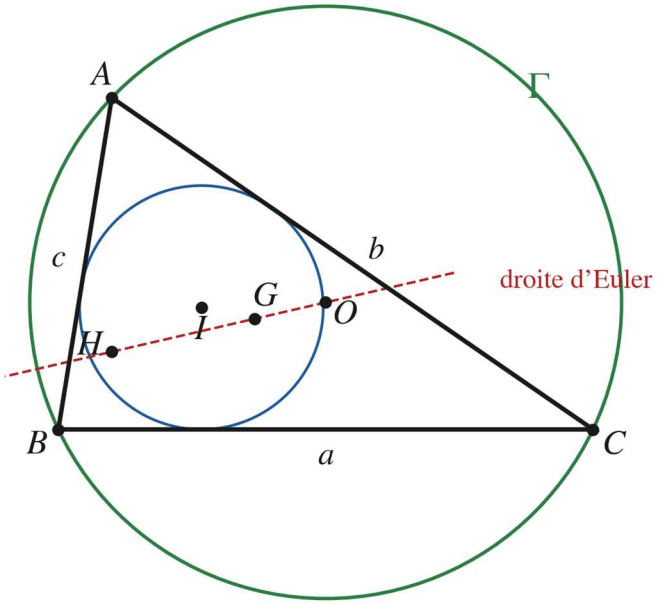
Avant de commencer, fixons un langage commun. Beaucoup d'erreurs en olympiade ne viennent pas d'un défaut d'idée, mais d'un flou de notation : un angle non orienté qui change de valeur selon la configuration, un rapport de longueurs dont on oublie le signe. Ce chapitre est court, mais il conditionne la rigueur de tout le reste.

1.1 Notations générales

Dans tout le livre, ABC désigne un triangle non dégénéré. On adopte les notations standard suivantes, qui seront utilisées sans rappel.

Symbole	Signification	Symbole	Signification
a, b, c	BC, CA, AB	O	centre du cercle circonscrit
α, β, γ (ou A, B, C)	angles $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}, \widehat{BCA}$	H	orthocentre
s	demi-périmètre $\frac{a+b+c}{2}$	G	centre de gravité
S ou $[ABC]$	aire du triangle	I	centre du cercle inscrit
R	rayon du cercle circonscrit	I_A, I_B, I_C	centres des cercles exinscrits
r	rayon du cercle inscrit	N	centre du cercle d'Euler
r_A, r_B, r_C	rayons des cercles exinscrits	Γ	cercle circonscrit à ABC

On note (XY) la droite XY, $[XY]$ le segment, $[XY)$ la demi-droite, et XY la longueur. Le symbole $[XYZ]$ désigne l'aire du triangle XYZ (algébrique lorsque le contexte l'exige). La notation $\odot(XYZ)$ désigne le cercle circonscrit au triangle XYZ. Dans les formules trigonométriques, on écrit indifféremment $\sin A$ ou $\sin \alpha$.

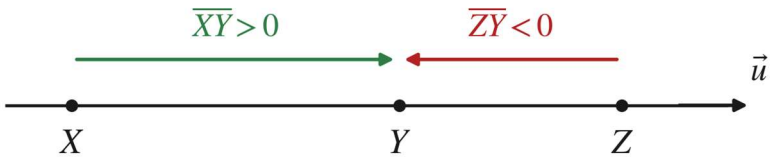


Les notations du triangle : cercle circonscrit Γ, cercle inscrit, et les points O, G, H alignés sur la droite d'Euler (chapitre 4).

1.2 Longueurs algébriques

Définition 1.2.1 (Longueur algébrique)

Soit d une droite munie d'une orientation, c'est-à-dire d'un vecteur directeur unitaire $\vec{u}$. Pour $X, Y \in d$, le vecteur $\overrightarrow{XY}$ est colinéaire à $\vec{u}$; on définit le réel $\overline{XY}$ par $\overrightarrow{XY} = \overline{XY}\,\vec{u}$.



Longueurs algébriques sur une droite orientée : le signe indique le sens de parcours.

On a $\left|\overline{XY}\right| = XY$. Le nombre $\overline{XY}$ dépend de l'orientation choisie : changer $\vec{u}$ en $-\vec{u}$ change tous les $\overline{XY}$ en leurs opposés. En revanche, un **rapport** $\frac{\overline{XY}}{\overline{ZT}}$ de longueurs algébriques portées par une même droite n'en dépend pas : c'est cet objet qui est intrinsèque, et c'est lui qui interviendra dans les théorèmes de Ceva, de Ménélaüs et dans le birapport.

Proposition 1.2.2 (Relation de Chasles)

Pour X, Y, Z sur une droite orientée : $\overline{XY} + \overline{YZ} = \overline{XZ}$. En particulier $\overline{XY} = -\overline{YX}$ et $\overline{XX} = 0$.

Démonstration. Par la relation de Chasles vectorielle, $\overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \left(\overline{XY} + \overline{YZ}\right)\vec{u}$. Comme $\overrightarrow{XZ} = \overline{XZ}\,\vec{u}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, on obtient $\overline{XZ} = \overline{XY} + \overline{YZ}$. Avec $Z = X$: $\overline{XY} + \overline{YX} = \overline{XX} = 0$. ■

Proposition 1.2.3 (Un point est déterminé par un rapport)

Soient $X \neq Y$ deux points d'une droite d. Pour tout réel $k \neq 1$, il existe un unique point $M \in d$, distinct de Y, tel que $\frac{\overline{MX}}{\overline{MY}} = k$; aucun point ne réalise la valeur $k = 1$. Ce point est strictement entre X et Y si, et seulement si, $k < 0$.

Démonstration. Prenons une origine et une orientation sur d, et notons x, y, m les abscisses de X, Y, M. La condition s'écrit $x - m = k(y - m)$, soit $m(k-1) = ky - x$. Si $k \neq 1$, elle a l'unique solution $m = \frac{ky-x}{k-1}$, et $m \neq y$ car sinon $x = y$; si $k = 1$, elle impose $x = y$, ce qui est exclu. Enfin $\frac{\overline{MX}}{\overline{MY}} < 0$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{MX}$ et $\overrightarrow{MY}$ sont de sens contraires, c'est-à-dire si M est strictement entre X et Y. (Le milieu correspond à $k = -1$.) ■

Attention.

$\overline{XY} = -\overline{YX}$, alors que $XY = YX$. Le rapport $\frac{\overline{XY}}{\overline{YZ}}$ est positif si Y est entre X et Z (le point divise intérieurement), et négatif sinon. Confondre les deux conventions est l'erreur la plus fréquente dans les applications de Ménélaüs.

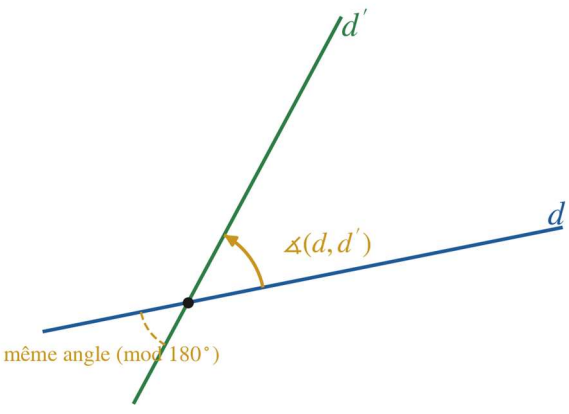
1.3 Angles orientés de droites

Un angle non orienté $\widehat{ABC} \in [0°, 180°]$ ne suffit pas à écrire des démonstrations valables dans toutes les configurations. La parade professionnelle consiste à travailler modulo $180°$ avec les angles orientés de droites.

Fixons un repère orthonormé direct. Toute droite d admet un vecteur directeur de la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$; le réel θ est défini à un multiple de $180°$ près (on peut remplacer le vecteur directeur par son opposé). On appelle **direction** de d la classe $\theta(d) \in \mathbb{R}/180°$.

Définition 1.3.1 (Angle orienté de deux droites)

Pour deux droites d et d', on pose $\measuredangle(d, d') = \theta(d') - \theta(d) \pmod{180°}$: c'est l'angle de la rotation (définie modulo $180°$) qui amène la direction de d sur celle de d'. Pour des points, on écrit $\measuredangle(AB, AC)$ au lieu de $\measuredangle\big((AB), (AC)\big)$.



L'angle orienté de d vers d' ; ajouter 180° ne change rien, car une droite n'a pas de sens.

Proposition 1.3.2 (Règles de calcul)

Pour toutes droites d, d', d'', modulo $180°$:

$$\measuredangle(d,d') = -\measuredangle(d',d), \qquad \measuredangle(d,d') + \measuredangle(d',d'') = \measuredangle(d,d''),$$

$$d \parallel d' \Leftrightarrow \measuredangle(d,d') = 0, \qquad d \perp d' \Leftrightarrow \measuredangle(d,d') = 90°.$$

De plus, pour trois points non alignés A, B, C : $\measuredangle(AB,AC) + \measuredangle(BC,BA) + \measuredangle(CA,CB) = 0$.

Démonstration. Les deux premières égalités découlent de la définition : $\theta(d) - \theta(d') = -\big(\theta(d') - \theta(d)\big)$ et $\big(\theta(d') - \theta(d)\big) + \big(\theta(d'') - \theta(d')\big) = \theta(d'') - \theta(d)$. Deux droites sont parallèles si, et seulement si, elles ont la même direction, c'est-à-dire $\theta(d') = \theta(d)$ modulo $180°$. Elles sont perpendiculaires si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs $(\cos\theta, \sin\theta)$ et $(\cos\theta', \sin\theta')$ sont orthogonaux, c'est-à-dire $\cos(\theta' - \theta) = 0$, soit $\theta' - \theta = 90°$ modulo $180°$.

Pour la dernière égalité, on applique la relation de Chasles :

$$\measuredangle(AB,AC) + \measuredangle(BC,BA) + \measuredangle(CA,CB) = [\theta(AC) - \theta(AB)] + [\theta(AB) - \theta(BC)] + [\theta(BC) - \theta(AC)] = 0.$$

■

Proposition 1.3.3 (Lien avec les angles géométriques)

Soit ABC un triangle dont les sommets sont parcourus dans le sens direct. Alors, modulo $180°$,

$$\measuredangle(AB,AC) = \widehat{BAC}, \qquad \measuredangle(BC,BA) = \widehat{CBA}, \qquad \measuredangle(CA,CB) = \widehat{ACB}.$$

Si les sommets sont parcourus dans le sens indirect, les trois égalités ont lieu avec un signe $-$.

Démonstration. Si ABC est direct, la rotation de centre A et d'angle $+\widehat{BAC}$ envoie la demi-droite $[AB)$ sur $[AC)$, donc la direction de (AB) sur celle de (AC) : $\measuredangle(AB,AC) = \widehat{BAC}$. Les triangles BCA et CAB sont aussi directs (permutation circulaire), d'où les deux autres égalités. Dans le cas indirect, on applique ce qui précède au triangle direct ACB et l'on utilise l'antisymétrie. ■

La dernière égalité de la proposition 1.3.2 est donc la forme orientée de la somme des angles d'un triangle.

À retenir (Pourquoi c'est décisif)

Avec les angles orientés, l'énoncé « A, B, C, D cocycliques ou alignés » s'écrit (théorème 2.3.1)

$$\measuredangle(CA,CB) = \measuredangle(DA,DB) \pmod{180°},$$

sans aucune distinction de cas selon que C et D sont du même côté de (AB) ou non. Une démonstration écrite en angles orientés est valable pour toutes les figures ; une démonstration écrite en angles non orientés doit, en toute rigueur, traiter chaque configuration.

Attention.

Les angles orientés se manipulent modulo $180°$: on ne peut donc pas les diviser par 2 (l'écriture $1/2\,\measuredangle(d,d')$ n'a pas de sens intrinsèque, car $1/2 \cdot 180° = 90° \neq 0$). En particulier, le théorème de l'angle au centre et tout ce qui concerne les bissectrices demandent une précaution spécifique : on travaille alors modulo $360°$ avec des angles orientés de vecteurs, ou l'on revient temporairement à des angles non orientés classiques.

1.4 Les six réflexes du géomètre

Méthode 1.4.1 — Que faire devant un problème inconnu

1. **Grande figure exacte.** Une demi-page minimum, à la règle et au compas. Si le problème demande de prouver une concourance, la figure doit montrer la concourance : sinon, on a mal lu.
2. **Chasse aux angles.** Nommer $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$, $\hat{C} = \gamma$ et exprimer tout ce qui est exprimable. Un tiers des problèmes tombe ici.
3. **Chercher les cocyclicités.** Chaque nouveau quadrilatère cyclique est une nouvelle égalité d'angles gratuite, donc une relance de l'étape 2.
4. **Chercher les puissances de points.** Dès qu'apparaissent deux cercles, penser axe radical ; dès qu'apparaît un produit $XA \cdot XB$, penser puissance.
5. **Reconnaître une configuration connue.** Trident, point de Miquel, symédiane, cercle mixtilinéaire… Le chapitre 13 en est le catalogue.
6. **En dernier recours, calculer.** Trigonométrie, nombres complexes, coordonnées barycentriques (chapitre 9). Ces méthodes aboutissent toujours, mais elles coûtent du temps ; ne les lancez qu'après avoir tracé une figure et estimé le calcul.

1.5 Le formulaire minimal

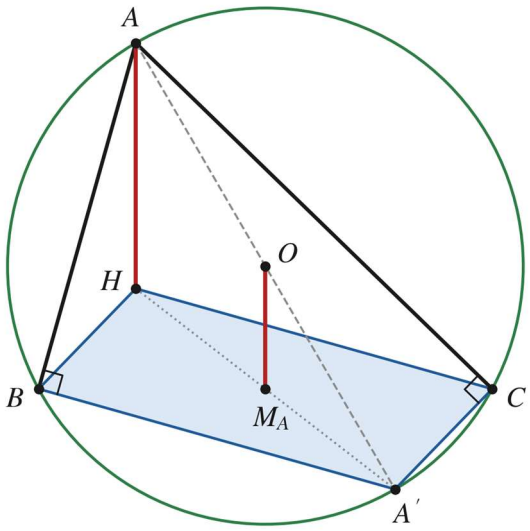
Ces formules doivent être disponibles immédiatement, sans réflexion. Chacune est démontrée dans le chapitre indiqué.

Résultat	Formule	Chapitre
Loi des sinus	$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$	4
Loi des cosinus (Al-Kashi)	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	4
Aire	$S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{abc}{4R} = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	4
Rayons	$r = (s-a)\tan\frac{A}{2}, \quad r_A = s\tan\frac{A}{2}, \quad S = r_A(s-a)$	4
Tangentes au cercle inscrit	la longueur de la tangente issue de A vaut $s - a$	4
Relation d'Euler	$OI^2 = R^2 - 2Rr$	4
Distance à l'orthocentre	$AH = 2R\lvert\cos A\rvert$	4
Puissance d'un point	$\mathrm{pow}(P, \Gamma) = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = OP^2 - R^2$	5
Ptolémée	$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$, avec égalité si, et seulement si, $ABCD$ est un quadrilatère convexe inscrit	3

Exemple 1.5.1 (Un premier calcul de mise en jambe). Dans un triangle ABC acutangle, montrer que $AH = 2\,OM_A$, où H est l'orthocentre, O le centre du cercle circonscrit et M_A le milieu de $[BC]$.

Solution. Soit A' le point diamétralement opposé à A sur Γ. Comme $[AA']$ est un diamètre, $\widehat{ABA'} = \widehat{ACA'} = 90°$ (cercle de diamètre $[AA']$, corollaire 2.2.2), donc $(A'B) \perp (AB)$ et $(A'C) \perp (AC)$. Or, par définition de l'orthocentre, $(CH) \perp (AB)$ et $(BH) \perp (AC)$. Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles : $(A'B) \parallel (CH)$ et $(A'C) \parallel (BH)$. Le quadrilatère $BHCA'$ est donc un parallélogramme. Ses diagonales $[BC]$ et $[HA']$ se coupent en leur milieu, donc M_A est le milieu de $[HA']$.

Dans le triangle AHA', O est le milieu de $[AA']$ et M_A celui de $[HA']$: par le théorème de la droite des milieux, $(OM_A) \parallel (AH)$ et $AH = 2\,OM_A$.



Exemple 1.5.1 : BHCA' est un parallélogramme, M_A est le milieu de [HA'], et AH = 2·OM_A.

Une version vectorielle, valable pour tout triangle.

La démonstration ci-dessus utilise la position relative des points. Voici une preuve sans cas de figure. Posons $\overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Alors $\overrightarrow{AH'} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = OC^2 - OB^2 = 0$, donc H' est sur la hauteur issue de A ; de même pour les autres hauteurs, donc $H' = H$. Ainsi $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM_A}$, ce qui redonne $AH = 2\,OM_A$ et $(AH) \parallel (OM_A)$ **dans tous les cas**, y compris pour un triangle obtusangle. Cette relation $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, due à Euler, sera réutilisée au chapitre 4.

À retenir (Ce qu'il faut retenir de ce chapitre)

- Les rapports de longueurs algébriques sont intrinsèques : on les utilise dans Ceva, Ménélaüs et le birapport.
- Les angles orientés de droites (modulo $180°$) suppriment les discussions de configuration.
- La configuration « $BHCA'$ parallélogramme, M_A milieu de $[HA']$, $AH = 2\,OM_A$ » est omniprésente : elle sera réutilisée dans presque tous les chapitres.

PARTIE I — Les essentiels

CHAPITRE 2

2 La chasse aux angles

La première étape de tout problème de géométrie est la chasse aux angles : repérer les angles égaux, les exprimer en fonction de α, β, γ, et voir ce qui apparaît. C'est une technique élémentaire, mais c'est celle qui résout le plus grand nombre de problèmes, et celle qui révèle les configurations cachées lorsqu'elle ne suffit pas.

2.1 Les égalités d'angles fondamentales

Deux droites d, d' coupées par une sécante Δ déterminent des angles alternes-internes et correspondants. On a l'équivalence, indispensable :

$$d \parallel d' \Leftrightarrow \text{angles alternes-internes égaux} \Leftrightarrow \text{angles correspondants égaux.}$$

En angles orientés, c'est simplement la relation de Chasles : $\measuredangle(\Delta, d') - \measuredangle(\Delta, d) = \measuredangle(d, d')$, qui est nul si, et seulement si, $d \parallel d'$ (proposition 1.3.2). Le sens direct sert à obtenir des égalités, le sens réciproque à prouver un parallélisme. Ne jamais oublier le second.

Proposition 2.1.1 (Angle extérieur)

Dans un triangle ABC, on a $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$. En conséquence, l'angle extérieur en C, qui vaut $180° - \hat{C}$, est égal à la somme $\hat{A} + \hat{B}$ des deux angles intérieurs non adjacents.

Démonstration. Menons par C la parallèle δ à (AB), et choisissons sur δ un point U situé de l'autre côté de (AC) que B, et un point V situé de l'autre côté de (BC) que A ; U et V sont de part et d'autre de C. Les angles alternes-internes donnent $\widehat{UCA} = \widehat{CAB}$ (sécante (AC)) et $\widehat{VCB} = \widehat{CBA}$ (sécante (BC)). Les trois angles $\widehat{UCA}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BCV}$ sont adjacents et remplissent l'angle plat $\widehat{UCV}$; leur somme vaut donc $180°$, d'où $\hat{A} + \hat{C} + \hat{B} = 180°$. L'angle extérieur en C vaut alors $180° - \hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$. ■

Proposition 2.1.2 (Triangle isocèle)

Dans un triangle ABC, on a $AB = AC$ si, et seulement si, $\hat{B} = \hat{C}$.

Démonstration. Si $AB = AC$, alors A est sur la médiatrice de $[BC]$; la symétrie orthogonale d'axe cette médiatrice fixe A et échange B et C, donc elle échange les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$, qui sont égaux. Réciproquement, si $\hat{B} = \hat{C}$, soit A' le symétrique de A par rapport à la médiatrice de $[BC]$. Alors $\widehat{A'CB} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, et A' est du même côté de (BC) que A : les demi-droites $[CA)$ et $[CA')$ coïncident. De même $[BA)$ et $[BA')$ coïncident. Donc A' est l'intersection de $[BA)$ et $[CA)$, c'est-à-dire $A' = A$: le point A est sur la médiatrice et $AB = AC$. ■

Ces deux propositions sont élémentaires ; leur combinaison répétée est la chasse aux angles. Un exemple immédiat : dans un triangle isocèle en A avec $\hat{A} = \alpha$, les angles à la base valent $90° - \frac{\alpha}{2}$. Cette expression apparaîtra des dizaines de fois.

2.2 Le théorème de l'angle inscrit

Théorème 2.2.1 (Angle inscrit)

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A, B deux points distincts de $\mathcal{C}$. Pour tout point P de $\mathcal{C}$ distinct de A et B,

$$\widehat{APB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB},$$

où $\widehat{AOB}$ désigne l'angle au centre qui intercepte le même arc que $\widehat{APB}$, c'est-à-dire l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas P (cet angle au centre est mesuré de $0°$ à $360°$; il dépasse $180°$ si l'arc intercepté est un arc majeur). En conséquence : tous les points d'un même arc voient $[AB]$ sous le même angle, et si P' appartient à l'autre arc, alors $\widehat{APB} + \widehat{AP'B} = 180°$.

Démonstration. Soit Q le point diamétralement opposé à P. Le triangle OAP est isocèle en O ($OA = OP$), donc $\widehat{OPA} = \widehat{OAP}$, et l'angle extérieur en O de ce triangle (proposition 2.1.1) donne

$$\widehat{AOQ} = \widehat{OPA} + \widehat{OAP} = 2\,\widehat{OPA}. \qquad (*)$$

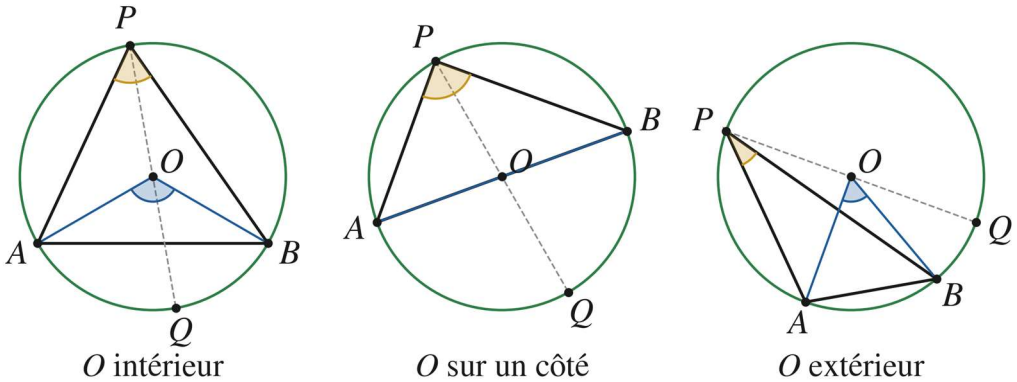
De même $\widehat{BOQ} = 2\,\widehat{OPB}$. On distingue trois cas (figure ci-dessous).

Cas 1 : O est intérieur à l'angle $\widehat{APB}$. Alors $[PQ]$ sépare A et B, et les angles s'ajoutent : $\widehat{AOB} = \widehat{AOQ} + \widehat{QOB} = 2\big(\widehat{OPA} + \widehat{OPB}\big) = 2\,\widehat{APB}$.

Cas 2 : O est sur un côté de l'angle, par exemple sur $[PB]$. Alors $Q = B$ et $(*)$ donne directement $\widehat{AOB} = 2\,\widehat{OPA} = 2\,\widehat{APB}$.

Cas 3 : O est extérieur à l'angle $\widehat{APB}$. Supposons par exemple $[PA)$ entre $[PO)$ et $[PB)$. Les angles se retranchent : $\widehat{AOB} = \widehat{BOQ} - \widehat{AOQ} = 2\big(\widehat{OPB} - \widehat{OPA}\big) = 2\,\widehat{APB}$.

Tous les points P d'un même arc voient donc $[AB]$ sous l'angle $\frac{1}{2}\widehat{AOB}$, où l'angle au centre intercepte l'arc complémentaire. Si P et P' sont sur des arcs différents, les angles au centre correspondants sont complémentaires à $360°$, d'où $\widehat{APB} + \widehat{AP'B} = \frac{1}{2}\cdot 360° = 180°$. ■



Les trois cas de la démonstration du théorème de l'angle inscrit : l'angle en P (or) est la moitié de l'angle au centre (bleu).

Corollaire 2.2.2 (Conséquences du théorème de l'angle inscrit)

(a) **Angle droit.** Pour $P \neq A, B$, on a $\widehat{APB} = 90°$ si, et seulement si, P appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

(b) **Arcs égaux.** Dans un même cercle, deux cordes de même longueur sous-tendent des angles inscrits égaux (ou supplémentaires), et réciproquement.

(c) **Angle tangentiel.** Si (TA) est tangente en A au cercle et B un autre point du cercle, alors l'angle $\widehat{TAB}$ est égal à l'angle inscrit $\widehat{ACB}$ interceptant l'arc $\overset{\frown}{AB}$ situé à l'intérieur de l'angle $\widehat{TAB}$ (théorème 2.2.3).

Démonstration.

(a) Si P est sur le cercle de diamètre $[AB]$, de centre le milieu M de $[AB]$, l'angle au centre $\widehat{AMB}$ est plat, donc $\widehat{APB} = 90°$ par le théorème 2.2.1. Réciproquement, si $\widehat{APB} = 90°$, soit M le milieu de $[AB]$ et P' le symétrique de P par rapport à M ; $APBP'$ est un parallélogramme (diagonales de même milieu) ayant un angle droit, donc un rectangle, dont les diagonales ont même longueur : $PP' = AB$, soit $MP = \frac{1}{2}AB$. Donc P est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

(b) Deux cordes $[AB]$ et $[A'B']$ d'un cercle de centre O et de rayon R ont la même longueur si, et seulement si, les triangles isocèles OAB et $OA'B'$ sont superposables, c'est-à-dire si $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$; on conclut par le théorème 2.2.1.

(c) C'est le théorème 2.2.3 ci-dessous. ■

À retenir — Le point (a) est un aimant

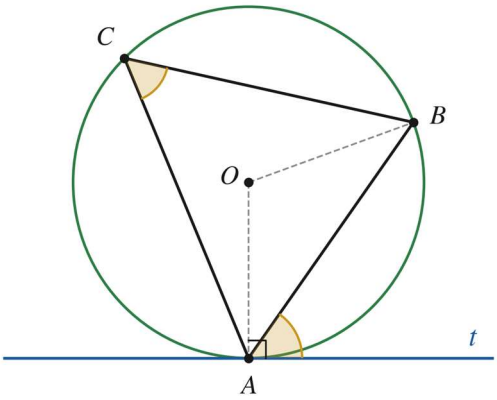
Dès qu'un énoncé contient deux angles droits appuyés sur un même segment, ou un pied de hauteur, il faut immédiatement écrire le cercle de diamètre correspondant. C'est le générateur n° 1 de quadrilatères cycliques.

Théorème 2.2.3 (Angle tangentiel)

Soit $\mathcal{C}$ un cercle, $A \in \mathcal{C}$, (t) la tangente en A, et $B, C \in \mathcal{C}$ distincts de A. Alors l'angle entre (t) et la corde (AB), mesuré du côté opposé à C, est égal à l'angle inscrit $\widehat{ACB}$. En angles orientés : $\measuredangle(t, AB) = \measuredangle(CA, CB)$.

Démonstration. Soit O le centre et T un point de (t) du côté opposé à C par rapport à (AB). Comme $(OA) \perp (t)$, l'angle $\widehat{TAB}$ vaut $90° - \widehat{OAB}$ si O et C sont du même côté de (AB) (cas de la figure). Le triangle OAB étant isocèle en O, $\widehat{OAB} = 90° - 1/2\,\widehat{AOB}$; donc $\widehat{TAB} = 1/2\,\widehat{AOB} = \widehat{ACB}$ par le théorème 2.2.1. Si O est de l'autre côté, on obtient de même $\widehat{TAB} = 90° + \widehat{OAB} = 180° - 1/2\,\widehat{AOB}$, et l'angle inscrit $\widehat{ACB}$ intercepte alors l'arc majeur : il vaut aussi $180° - 1/2\,\widehat{AOB}$. Le cas où $O \in (AB)$ donne $90°$ des deux côtés.

La forme orientée se déduit de ces égalités non orientées par la proposition 1.3.3, exactement comme dans la démonstration du théorème 2.3.1 ci-dessous : elle ne dépend plus de la position de C sur le cercle. ■

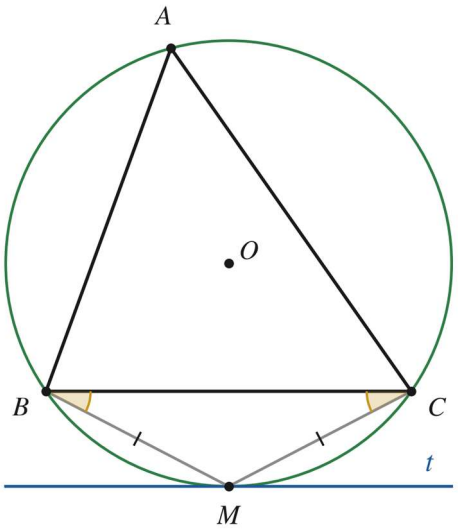


Théorème de l'angle tangentiel : l'angle entre la tangente t et la corde [AB] égale l'angle inscrit en C.

Exemple 2.2.4. *Soit ABC un triangle inscrit dans Γ et M le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A. Montrer que la tangente à Γ en M est parallèle à (BC).*

Première solution (angles). Soit (t) la tangente en M. Par le théorème de l'angle tangentiel, $\measuredangle(t, MB) = \measuredangle(CM, CB)$. Comme M est le milieu de l'arc, les cordes MB et MC sont égales, donc le triangle MBC est isocèle en M et $\widehat{MBC} = \widehat{MCB}$; en angles orientés, la symétrie d'axe la médiatrice de $[BC]$ renverse l'orientation et donne $\measuredangle(CM, CB) = \measuredangle(BC, BM)$. Ainsi $\measuredangle(t, MB) = \measuredangle(BC, MB)$, ce qui signifie exactement que (t) et (BC) font le même angle orienté avec (MB), donc $(t) \parallel (BC)$.

Deuxième solution (symétrie). Comme $MB = MC$ et $OB = OC$, la droite (OM) est la médiatrice de $[BC]$, donc $(OM) \perp (BC)$. La tangente en M est perpendiculaire au rayon (OM). Deux droites perpendiculaires à (OM) sont parallèles.



Exemple 2.2.4 : la tangente en M, milieu de l'arc BC, est parallèle à (BC).

Théorème 2.2.5 (Arc capable)

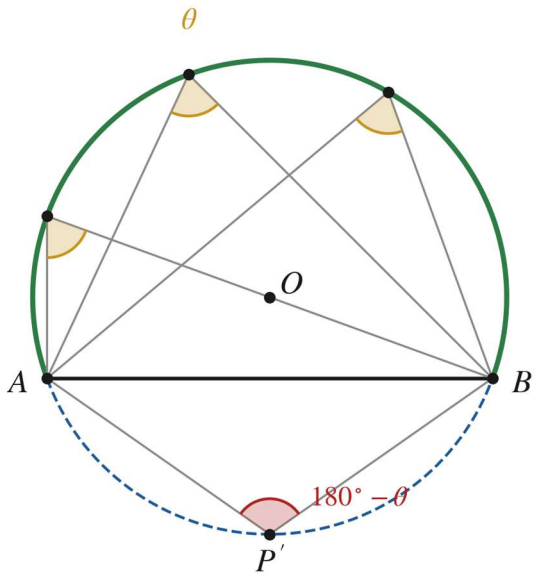
Soient $A \neq B$ et $\theta \in]0°, 180°[$. L'ensemble des points P situés d'un côté donné de (AB) et tels que $\widehat{APB} = \theta$ est un arc de cercle d'extrémités A et B (extrémités exclues).

Démonstration. *Existence d'un arc qui convient.* L'angle tangentiel fournit le cercle cherché. Menons en A la demi-droite $[AT)$, du côté opposé, telle que $\widehat{TAB} = \theta$, puis le cercle $\mathcal{C}$ tangent en A à

(AT) et passant par B (son centre est l'intersection de la perpendiculaire en A à (AT) et de la médiatrice de $[AB]$, qui ne sont pas parallèles car $(AT) \neq (AB)$). Par le théorème 2.2.3, tout point P de l'arc de $\mathcal{C}$ situé du côté donné vérifie $\widehat{APB} = \widehat{TAB} = \theta$.

Il n'y en a pas d'autre. Soit P du côté donné avec $\widehat{APB} = \theta$, et soit $[AT')$ la demi-droite opposée à $[AT)$: elle est du côté donné, et $\widehat{BAT'} = 180° - \theta$. Le disque limité par $\mathcal{C}$ est tout entier d'un même côté de la tangente (TT').

- Si $\widehat{PAB} \geq 180° - \theta$ (la demi-droite $[AP)$ est hors de l'angle $\widehat{BAT'}$ ou sur $[AT')$), la somme des angles du triangle APB donne $\widehat{APB} < 180° - \widehat{PAB} \leq \theta$: contradiction.
- Sinon, $[AP)$ est strictement à l'intérieur de l'angle $\widehat{BAT'}$; elle entre dans le disque et en ressort en un point P' de $\mathcal{C}$, situé du côté donné, donc sur l'arc. Si $P \neq P'$, supposons par exemple P strictement entre A et P'. Dans le triangle $PP'B$, l'angle extérieur en P vérifie $\widehat{APB} = \widehat{PP'B} + \widehat{PBP'} > \widehat{AP'B} = \theta$: contradiction. Si P' est strictement entre A et P, le même argument dans le triangle $P'PB$ donne $\theta = \widehat{AP'B} > \widehat{APB}$: contradiction. Donc $P = P'$. ■



L'arc capable : les points de l'arc vert voient [AB] sous l'angle θ ; ceux de l'arc opposé, sous l'angle 180° − θ.

2.3 Angles orientés : la rigueur sans les cas

Nous avons introduit au chapitre 1 l'angle orienté $\measuredangle(d, d') \in \mathbb{R}/180°$. Reformulons les théorèmes précédents.

Théorème 2.3.1 (Cocyclicité en angles orientés)

Quatre points A, B, C, D, deux à deux distincts, sont cocycliques ou alignés si, et seulement si,

$$\measuredangle(CA, CB) = \measuredangle(DA, DB) \pmod{180°}.$$

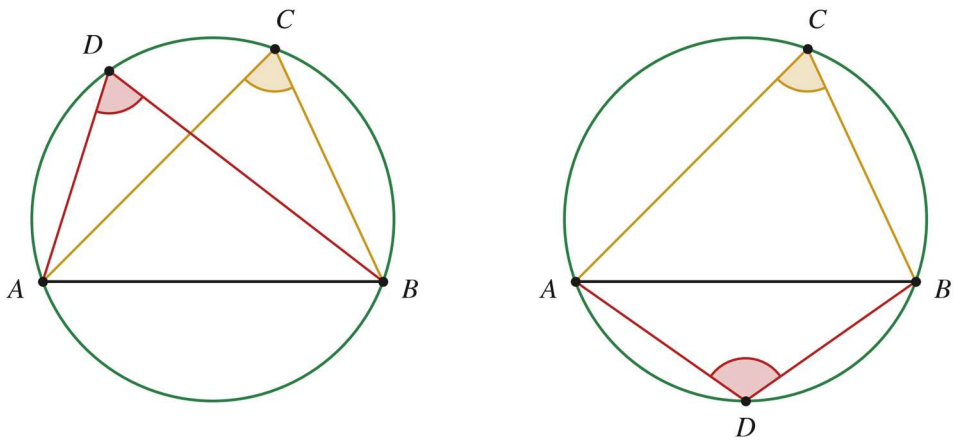
Démonstration. *Sens direct.* Si les quatre points sont alignés, les deux angles sont nuls. Supposons-les sur un cercle. D'après la proposition 1.3.3, $\measuredangle(CA, CB) = \varepsilon_C \widehat{ACB}$ et $\measuredangle(DA, DB) = \varepsilon_D \widehat{ADB}$, où $\varepsilon_C = +1$ si le triangle ACB est direct et -1 sinon, et de même pour ε_D.

- Si C et D sont du même côté de (AB), les triangles ACB et ADB ont la même orientation et $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ (théorème 2.2.1) : les deux angles orientés sont égaux.

- S'ils sont de part et d'autre, les orientations sont opposées et $\widehat{ADB} = 180° - \widehat{ACB}$, d'où $\measuredangle(DA, DB) = -\varepsilon_C(180° - \widehat{ACB}) = \varepsilon_C \widehat{ACB} \pmod{180°}$.

Sens réciproque. Supposons l'égalité. Si A, B, C sont alignés, $\measuredangle(CA, CB) = 0$, donc $(DA) \parallel (DB)$; ces droites ayant D en commun, elles coïncident, et $D \in (AB)$: les quatre points sont alignés. Sinon, soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABC. On a $D \notin (AB)$ (sinon $\measuredangle(DA, DB) = 0 = \measuredangle(CA, CB)$ et $C \in (AB)$). Deux cas :

- La droite (AD) recoupe $\mathcal{C}$ en un point $D' \neq A$. Par le sens direct, $\measuredangle(D'A, D'B) = \measuredangle(CA, CB) = \measuredangle(DA, DB)$. Comme $(D'A) = (DA)$, la relation de Chasles donne $\measuredangle(D'B, DB) = \measuredangle(D'B, D'A) + \measuredangle(DA, DB) = 0$, donc $(D'B) \parallel (DB)$, et ces deux droites passant par B coïncident. Ainsi D' et D sont tous deux l'intersection des droites distinctes (AD) et (BD) : $D = D' \in \mathcal{C}$.
- La droite (AD) est tangente à $\mathcal{C}$ en A. Par le théorème 2.2.3, $\measuredangle(AD, AB) = \measuredangle(CA, CB) = \measuredangle(DA, DB)$, donc $(AB) \parallel (DB)$, soit $D \in (AB)$: c'est exclu. ■



C, D du même côté : angles égaux — C, D de part et d'autre : supplémentaires

Cocyclicité : C et D du même côté de (AB) voient [AB] sous des angles égaux, de part et d'autre sous des angles supplémentaires ; en angles orientés, les deux cas n'en font qu'un.

Cette formulation unique remplace : « $ABCD$ cyclique convexe : angles opposés supplémentaires », « C, D du même côté : angles égaux », et le cas des points alignés. C'est le principal gain de la théorie.

Méthode 2.3.2 — Rédiger une chasse aux angles

1. Choisir trois paramètres : $\alpha = \hat{A}$, $\beta = \hat{B}$, $\gamma = \hat{C}$ avec $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
2. Exprimer tous les angles de la figure en fonction de ces paramètres, en avançant de proche en proche (triangle, isocèle, cyclique, parallèle).
3. Écrire l'égalité à démontrer en fonction de α, β, γ et vérifier.
4. Si un angle refuse de s'exprimer, l'appeler θ et chercher une deuxième expression du même angle : l'équation obtenue est souvent la clé.

2.4 Bissectrices : les angles à ne pas rater

Proposition 2.4.1 (Angles au centre inscrit et au centre exinscrit)

Si I est le centre du cercle inscrit de ABC et I_A le centre du cercle exinscrit dans l'angle A, alors

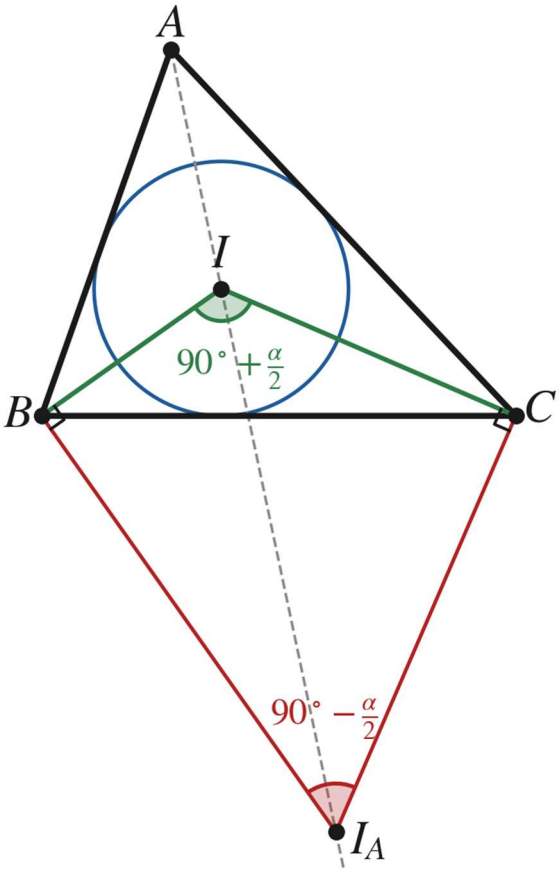
$$\widehat{BIC} = 90° + \frac{\alpha}{2}, \qquad \widehat{BI_AC} = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

De plus, $\widehat{IBI_A} = \widehat{ICI_A} = 90°$: les points B, C, I, I_A sont sur le cercle de diamètre $[II_A]$.

Démonstration. Dans le triangle BIC : $\widehat{IBC} = \frac{\beta}{2}$, $\widehat{ICB} = \frac{\gamma}{2}$, donc $\widehat{BIC} = 180° - \frac{\beta+\gamma}{2} = 180° - \frac{180°-\alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Les bissectrices intérieure et extérieure en B sont perpendiculaires, car elles partagent en deux moitiés deux angles adjacents supplémentaires : $\frac{\beta}{2} + \frac{180°-\beta}{2} = 90°$. D'où $\widehat{IBI_A} = 90°$, et de même $\widehat{ICI_A} = 90°$; le corollaire 2.2.2 (a) donne le cercle de diamètre $[II_A]$. Enfin $\widehat{I_ABC} = 90° - \frac{\beta}{2}$ et $\widehat{I_ACB} = 90° - \frac{\gamma}{2}$, d'où

$\widehat{BI_AC} = 180° - \left(180° - \frac{\beta+\gamma}{2}\right) = \frac{\beta+\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$. ■



Les angles BIC = 90° + α/2 et BI_AC = 90° − α/2 ; les angles droits en B et C montrent que B, C, I, I_A sont cocycliques.

Remarque.
Le résultat $\widehat{BIC} = 90° + \frac{\alpha}{2}$ est à connaître par cœur : il caractérise le point I sur un arc capable (théorème 2.2.5), et intervient dans la preuve du lemme du trident (chapitre 13), sans doute le lemme le plus utilisé de toute la géométrie olympique : le centre du cercle $BCII_A$ est le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ de Γ.

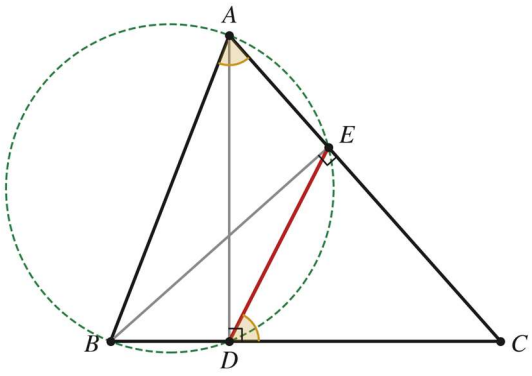
2.5 Exemples résolus

Exemple 2.5.1 (Antiparallélisme des pieds de hauteurs). *Soit ABC un triangle acutangle, D et E les pieds des hauteurs issues de A et B. Montrer que $\widehat{CDE} = \widehat{CAB}$: la droite (DE) est antiparallèle à (AB) par rapport à l'angle $\hat{C}$. En déduire que les triangles CDE et CAB sont semblables et que $CD \cdot CB = CE \cdot CA$.*

Solution. Puisque $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90°$, les points D et E appartiennent au cercle de diamètre $[AB]$ (corollaire 2.2.2) : le quadrilatère $ABDE$ est cyclique. Le triangle étant acutangle, $D \in [BC]$ et $E \in [CA]$, et le quadrilatère est convexe. L'angle extérieur en D de ce quadrilatère est donc égal à l'angle intérieur opposé :

$$\widehat{CDE} = 180° - \widehat{BDE} = \widehat{BAE} = \widehat{BAC} = \alpha.$$

Les triangles CDE et CAB ont l'angle $\hat{C}$ en commun et $\widehat{CDE} = \widehat{CAB}$: ils sont semblables. Le rapport de similitude donne $\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB}$, soit $CD \cdot CB = CE \cdot CA$ — relation qu'on retrouvera comme puissance du point C par rapport au cercle $ABDE$ (chapitre 5).



Exemple 2.5.1 : A, B, D, E sont sur le cercle de diamètre [AB], et (DE) est antiparallèle à (AB).

Définition 2.5.2 (Antiparallèles)

Deux droites (DE) et (AB), avec $D \in (CB)$ et $E \in (CA)$, sont dites antiparallèles par rapport à l'angle $\hat{C}$ lorsque $\measuredangle(DE, DC) = \measuredangle(AC, AB)$, autrement dit (théorème 2.3.1) lorsque A, B, D, E sont cocycliques. Cette notion est le cœur de la théorie des symédianes (chapitre 11) : la symédiane issue de C est la médiane du triangle CDE formé par une antiparallèle (DE).

Méthode 2.5.3 — Vérifier une chasse aux angles

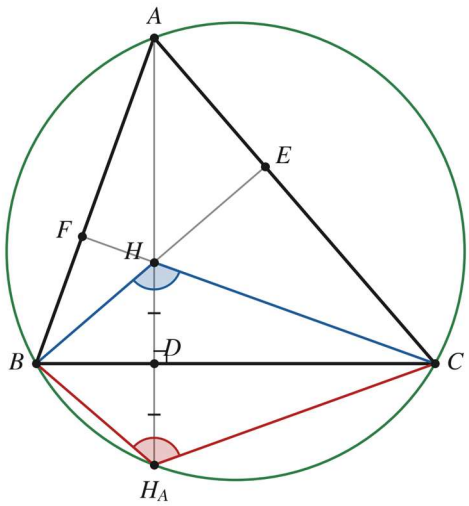
Une chasse aux angles est une chaîne de déductions : une seule erreur de configuration ruine tout. Deux protections systématiques :

1. **Double chemin.** Recalculer un angle clé par deux voies différentes ; les deux valeurs doivent coïncider.
2. **Test numérique.** Fixer $\alpha = 80°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 40°$ et évaluer chaque angle. Une figure à l'échelle avec ces valeurs détecte instantanément les erreurs.

Exemple 2.5.4 (Olympiade balkanique). *Soit ABC un triangle acutangle inscrit dans Γ, H son orthocentre, et H_A le symétrique de H par rapport à (BC). Montrer que $H_A \in \Gamma$.*

Solution. Notons α, β, γ les angles, et E, F les pieds des hauteurs issues de B et C. On a $\widehat{BHC} = 180° - \alpha$: en effet, $\widehat{BHC} = \widehat{EHF}$ (angles opposés par le sommet), et $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90°$, donc $AEHF$ est inscrit dans le cercle de diamètre $[AH]$, et ses angles opposés en A et H sont supplémentaires : $\widehat{EHF} = 180° - \alpha$.

La symétrie orthogonale d'axe (BC) conserve les angles non orientés : $\widehat{BH_AC} = \widehat{BHC} = 180° - \alpha$. Comme le triangle est acutangle, H est intérieur au triangle, donc du même côté de (BC) que A, et H_A est de l'autre côté. Ainsi A et H_A sont de part et d'autre de (BC) et voient $[BC]$ sous des angles supplémentaires : par la réciproque (théorème 2.2.5 appliqué à l'arc opposé, ou théorème 2.3.1), le quadrilatère ABH_AC est cyclique, c'est-à-dire $H_A \in \Gamma$.



Exemple 2.5.4 : le symétrique H_A de l'orthocentre par rapport à (BC) est sur le cercle circonscrit.

À retenir — Conséquence classique

Le symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté est sur le cercle circonscrit ; le symétrique de H par rapport au milieu d'un côté est le point diamétralement opposé au sommet opposé à ce côté (chapitre 1). Ces deux faits forment un couple : on les cite ensemble.

2.6 Exercices

Exercice 2.1 ★. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique tel que (AB) et (CD) se coupent en P. Montrer que les triangles PAD et PCB sont semblables.

Exercice 2.2 ★. Dans un triangle ABC, la bissectrice issue de A recoupe le cercle circonscrit en M. Montrer que M est le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A, et que $MB = MC = MI$, où I est le centre du cercle inscrit.

Exercice 2.3 ★★. Soit ABC un triangle et P un point du cercle circonscrit. On note X, Y, Z les projetés orthogonaux de P sur (BC), (CA), (AB). Montrer que X, Y, Z sont alignés (droite de Simson).

Exercice 2.4 ★★. Soient deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupant en P et Q. Une droite passant par P coupe $\mathcal{C}_1$ en A et $\mathcal{C}_2$ en B ; une droite passant par Q coupe $\mathcal{C}_1$ en C et $\mathcal{C}_2$ en D. Montrer que $(AC) \parallel (BD)$.

Exercice 2.5 ★★★. Soit ABC un triangle acutangle, H son orthocentre. Le cercle de diamètre $[AH]$ recoupe le cercle circonscrit Γ en $K \neq A$. Montrer que (KH) passe par le milieu de $[BC]$.

Exercice 2.6 ★★★ (IMO 2004, problème 1). Soit ABC un triangle acutangle avec $AB \neq AC$. Le cercle de diamètre $[BC]$ coupe (AB) en M et (AC) en N. Soit O le milieu de $[BC]$. Les bissectrices de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MON}$ se coupent en R. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles BMR et CNR ont un point commun situé sur (BC).

2.7 Corrigés

Solution de l'exercice 2.1. Les points A, B, C, D étant cocycliques, utilisons les angles orientés : $\measuredangle(AP, AD) = \measuredangle(AB, AD) = \measuredangle(CB, CD) = \measuredangle(CB, CP)$. Comme de plus l'angle en P est commun aux deux triangles, ils sont semblables (cas AA). On en déduit $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$, c'est-à-dire $PA \cdot PB = PC \cdot PD$: on retrouve la puissance du point P (chapitre 5).

Solution de l'exercice 2.2. Comme $\widehat{BAM} = \widehat{MAC}$, les arcs $\widehat{BM}$ et $\widehat{MC}$ sont égaux, donc M est le milieu de l'arc et $MB = MC$.

Pour $MI = MB$: dans le triangle ABI, $\widehat{MIB}$ est l'angle extérieur en I, donc $\widehat{MIB} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. D'autre part $\widehat{MBI} = \widehat{MBC} + \widehat{CBI} = \widehat{MAC} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ (car $\widehat{MBC} = \widehat{MAC}$, angles inscrits sur $\widehat{MC}$). Le triangle MBI est donc isocèle en M : $MI = MB = MC$. C'est le lemme du trident, voir chapitre 13.

Solution de l'exercice 2.3. C'est la droite de Simson. Comme $\widehat{PZB} = \widehat{PXB} = 90°$, les points P, Z, B, X sont sur le cercle de diamètre $[PB]$, donc $\measuredangle(XZ, XP) = \measuredangle(BZ, BP) = \measuredangle(BA, BP)$. De même $\widehat{PXC} = \widehat{PYC} = 90°$ donne P, X, C, Y cocycliques, d'où $\measuredangle(XY, XP) = \measuredangle(CY, CP) = \measuredangle(CA, CP)$. Or $P \in \odot(ABC)$ donne $\measuredangle(BA, BP) = \measuredangle(CA, CP)$. Donc $\measuredangle(XZ, XP) = \measuredangle(XY, XP)$, ce qui impose $\measuredangle(XZ, XY) = 0$: les droites (XZ) et (XY) sont confondues, donc X, Y, Z sont alignés.

Solution de l'exercice 2.4. En angles orientés : $\measuredangle(CA, CQ) = \measuredangle(PA, PQ)$ (dans $\mathcal{C}_1$, angles inscrits sur $\widehat{AQ}$) et $\measuredangle(DB, DQ) = \measuredangle(PB, PQ)$ (dans $\mathcal{C}_2$). Or A, P, B sont alignés, donc les droites (PA) et (PB) coïncident et $\measuredangle(PA, PQ) = \measuredangle(PB, PQ)$. Ainsi $\measuredangle(CA, CQ) = \measuredangle(DB, DQ)$. Comme C, Q, D sont alignés, les droites (CQ) et (DQ) coïncident également ; en soustrayant, $\measuredangle(CA, DB) = \measuredangle(CA, CQ) - \measuredangle(DB, DQ) = 0$, c'est-à-dire $(AC) \parallel (BD)$.

Solution de l'exercice 2.5. Soit M le milieu de $[BC]$ et A' le point diamétralement opposé à A sur Γ. Nous savons (chapitre 1) que H, M, A' sont alignés, M étant le milieu de $[HA']$. Il suffit donc de montrer que K, H, A' sont alignés.

Or $\widehat{AKA'} = 90°$ car $[AA']$ est un diamètre de Γ, et $\widehat{AKH} = 90°$ car $[AH]$ est un diamètre du second cercle. Les points H et A' sont donc tous deux sur la perpendiculaire à (AK) passant par K : K, H, A' sont alignés, et par conséquent (KH) passe par M.

Remarque.
Ce point K s'appelle le *point Queue* (relatif au sommet A) ; il réapparaîtra au chapitre 13.

Solution de l'exercice 2.6. Comme $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = 90°$, les points M et N sont les pieds des hauteurs issues de C et B, et $BMNC$ est cyclique (cercle de diamètre $[BC]$, de centre O).

Étape 1 : localiser R. Comme $OM = ON$ (rayons du cercle de diamètre $[BC]$), le triangle OMN est isocèle : la bissectrice de $\widehat{MON}$ est la médiatrice de $[MN]$. Ainsi $RM = RN$. Par ailleurs R est sur la bissectrice de $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$. Or, dans le cercle $\odot(AMN)$, la bissectrice issue de A recoupe le cercle au milieu de l'arc $\overset{\frown}{MN}$, point qui vérifie précisément l'égalité des distances à M et N. Comme $AB \neq AC$, la bissectrice de $\hat{A}$ et la médiatrice de $[MN]$ ne sont pas confondues et se coupent en un unique point : donc $R \in \odot(AMN)$.

Étape 2 : le point S. Soit S le point d'intersection de la bissectrice (AR) avec $[BC]$ (il existe car il s'agit de la bissectrice intérieure). Montrons que S appartient aux deux cercles.

Dans $\odot(AMRN)$, les angles inscrits interceptant l'arc $\overset{\frown}{AM}$ donnent $\widehat{ARM} = \widehat{ANM}$. Dans $\odot(BMNC)$, l'angle extérieur donne $\widehat{ANM} = \widehat{ABC}$. Donc $\widehat{ARM} = \widehat{ABC} = \widehat{SBM}$.

Comme A, R, S sont alignés dans cet ordre, $\widehat{MRS} = 180° - \widehat{ARM} = 180° - \widehat{MBS}$: le quadrilatère $BMRS$ est cyclique, donc $S \in \odot(BMR)$.

Symétriquement, $\widehat{ARN} = \widehat{AMN} = \widehat{ACB} = \widehat{SCN}$, d'où $CNRS$ cyclique et $S \in \odot(CNR)$.

Les deux cercles ont donc en commun le point $S \in [BC]$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque.
Le point S est exactement le pied de la bissectrice intérieure issue de A. Une seconde preuve, plus rapide une fois l'inversion connue (chapitre 10) : S est l'image de R par l'inversion de centre A et de puissance $AM \cdot AB = AN \cdot AC$, laquelle échange $M \leftrightarrow B$, $N \leftrightarrow C$ et envoie $\odot(AMN)$ sur la droite (BC).

2.8 Problèmes d'entraînement

Exercice 2.7 ★★ (Iran). Soit ABC un triangle et D un point de $[BC]$ tel que $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$. Le cercle circonscrit à ABD recoupe (AC) en E. Montrer que $DE = DB$.

Indication : montrer $\widehat{DEB} = \widehat{DBE}$ à l'aide des angles inscrits $\widehat{DAB}$ et $\widehat{DAE}$.

Exercice 2.8 ★★ (Russie 2008). Dans le triangle ABC avec $AB > BC$, la tangente en B au cercle circonscrit coupe (AC) en P. Soit D le symétrique de B par rapport à P et E le symétrique de C par rapport à (BP). Montrer que $ABED$ est cyclique.

Indication : l'angle tangentiel donne $\widehat{PBC} = \widehat{BAC}$; en déduire $PB^2 = PC \cdot PA$, puis $PD^2 = PC \cdot PA = PE \cdot PA$.

Exercice 2.9 ★★★. Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ deux cercles tangents intérieurement en T, avec $\mathcal{C}_2$ intérieur à $\mathcal{C}_1$. Une corde $[AB]$ de $\mathcal{C}_1$ est tangente à $\mathcal{C}_2$ en X. Montrer que (TX) est la bissectrice de $\widehat{ATB}$.

Indication : l'homothétie de centre T envoyant $\mathcal{C}_2$ sur $\mathcal{C}_1$ transforme X en le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ (voir chapitre 8).

Exercice 2.10 ★★★ (Shortlist IMO). Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Montrer que les bissectrices des angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ se coupent sur la diagonale (BD) si, et seulement si, $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

Indication : théorème de la bissectrice dans les triangles ABD et CBD.

À retenir — Bilan du chapitre

- Angle inscrit, angle au centre, angle tangentiel : les trois piliers.
- Deux angles droits sur un même segment ⇒ cercle de diamètre ce segment.
- Les angles orientés modulo $180°$ éliminent les cas de figure.
- $\widehat{BIC} = 90° + \frac{\alpha}{2}$ et $\widehat{BI_AC} = 90° - \frac{\alpha}{2}$.
- Symétrique de H par rapport à un côté : sur Γ. Par rapport au milieu d'un côté : antipode du sommet opposé.

CHAPITRE 3

3 Quadrilatères cycliques

Découvrir un quadrilatère cyclique caché dans une figure, c'est obtenir gratuitement une famille d'égalités d'angles, donc relancer la chasse aux angles. La plupart des problèmes de géométrie d'olympiade se résolvent en trouvant, dans l'ordre, deux ou trois cocyclicités.

3.1 Caractérisations

Définition 3.1.1 (Quadrilatère cyclique)

Un quadrilatère $ABCD$ est cyclique (ou inscriptible) si ses quatre sommets appartiennent à un même cercle. On dit alors que A, B, C, D sont cocycliques.

Théorème 3.1.2 (Caractérisations de la cocyclicité)

Soient A, B, C, D quatre points deux à deux distincts. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) A, B, C, D sont cocycliques ou alignés.
- (ii) $\measuredangle(CA, CB) = \measuredangle(DA, DB)$ (angles orientés de droites modulo $180°$).

Si $ABCD$ est un quadrilatère convexe, elles équivalent aussi à :

- (iii) $\hat{A} + \hat{C} = 180°$ (et alors aussi $\hat{B} + \hat{D} = 180°$) ;
- (iv) l'angle extérieur en B est égal à l'angle intérieur en D ;
- (iv′) $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (une diagonale est vue sous le même angle depuis les deux autres sommets).

Enfin, si les droites (AC) et (BD) sont distinctes et se coupent en un point P distinct des quatre points, elles équivalent à :

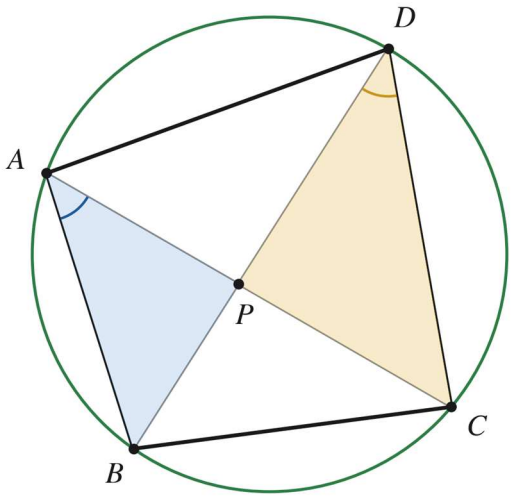
- (v) $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$.

Démonstration. *(i) ⇔ (ii)* est le théorème 2.3.1.

(iii), (iv), (iv′). Si $ABCD$ est convexe, les sommets A et C sont de part et d'autre de la diagonale (BD), tandis que A et D sont du même côté du côté (BC). Quatre points dont trois non alignés ne peuvent pas être alignés, donc (i) signifie « cocycliques ». Par le théorème 2.3.1 et la proposition 1.3.3 appliqués aux points A, C de part et d'autre de (BD), la cocyclicité équivaut à $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180°$, c'est-à-dire (iii) ; comme la somme des angles d'un quadrilatère convexe vaut $360°$ (on le découpe en deux triangles par une diagonale), on a alors aussi $\hat{B} + \hat{D} = 180°$. L'angle extérieur en B vaut $180° - \hat{B}$: (iv) est une reformulation de $\hat{B} + \hat{D} = 180°$, qui équivaut à (iii). Enfin, appliqué aux points A, D situés du même côté de (BC), le théorème 2.3.1 donne l'équivalence avec (iv′).

(i) $\Longrightarrow$ (v). Les points ne peuvent pas être alignés (les droites (AC) et (BD) sont distinctes). Les triangles PAB et PDC ont des angles égaux en A et en D (théorème 2.3.1 : $\measuredangle(AC, AB) = \measuredangle(DC, DB)$) et en P (même paire de droites) : ils sont semblables, d'où $\frac{PA}{PD} = \frac{PB}{PC}$, soit $PA \cdot PC = PB \cdot PD$. Pour les signes : un point de la droite (AC) est intérieur au disque si, et seulement si, il est strictement entre A et C (le disque est convexe et la droite ne rencontre le cercle qu'en A et C) ; de même pour (BD). Donc P est entre A et C si, et seulement si, il est entre B et D, et les deux produits algébriques ont le même signe.

(v) $\Longrightarrow$ (i). Si A, B, C étaient alignés, B serait sur (AC), donc $(BD) = (AC)$: exclu. Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABC. La droite (PB) recoupe $\mathcal{C}$ en un point D' (éventuellement $D' = B$ si elle est tangente). Par le sens direct, appliqué aux quatre points A, B, C, D' (et, dans le cas tangent, par la proposition 3.3.1 ci-dessous), $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD'}$. Donc $\overline{PB} \cdot \overline{PD} = \overline{PB} \cdot \overline{PD'}$; comme $P \neq B$, $\overline{PD} = \overline{PD'}$ et $D = D' \in \mathcal{C}$. ■



Quadrilatère cyclique : les triangles PAB (bleu) et PDC (or) sont semblables, car ils ont les angles en A et en D égaux.

Méthode 3.1.3 — Cinq déclencheurs de cocyclicité

Devant une figure, cherchez systématiquement :

1. deux angles droits appuyés sur le même segment ⇒ cercle de diamètre ce segment ;
2. deux angles égaux vus depuis deux points du même côté d'une droite ;
3. un produit égal $PA \cdot PC = PB \cdot PD$ (puissance d'un point) ;
4. deux triangles semblables partageant un sommet ;
5. une antiparallèle : pour $D \in (BC)$ et $E \in (CA)$, $\widehat{CDE} = \widehat{CAB}$ donne $ABDE$ cyclique.

Proposition 3.1.4 (Propriétés des quadrilatères cycliques)

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe cyclique de cercle circonscrit $\mathcal{C}$ de centre O.

- (a) Si $P = (AC) \cap (BD)$, les triangles PAB et PDC sont semblables ; de même PAD et PBC.

- (b) Si $Q = (AB) \cap (CD)$ existe, les triangles QAD et QCB sont semblables.
- (c) Les médiatrices des quatre côtés sont concourantes en O.
- (d) Un trapèze est cyclique si, et seulement si, il est isocèle ; un parallélogramme est cyclique si, et seulement si, c'est un rectangle.

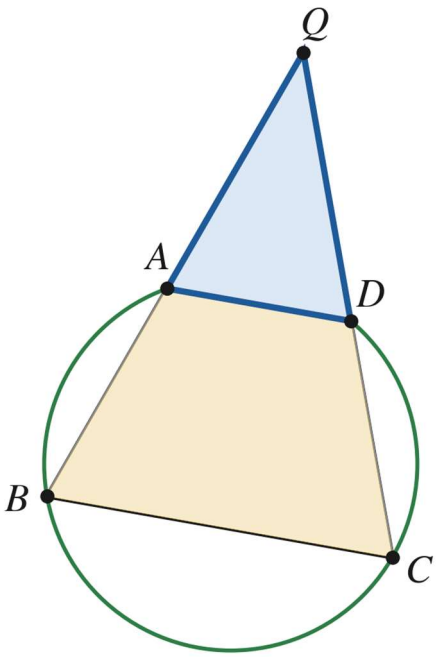
Démonstration.

(a) a été établi dans la démonstration de (i) $\Longrightarrow$ (v) ; on l'applique aussi au couple de côtés $(AD), (BC)$.

(b) Supposons, pour fixer les idées, A entre Q et B, et D entre Q et C (c'est le cas où Q est du côté de $[AD]$). Les triangles QAD et QCB ont l'angle en Q en commun. L'angle $\widehat{QAD}$ est l'angle extérieur en A du quadrilatère cyclique, égal à l'angle intérieur opposé $\widehat{BCD} = \widehat{QCB}$ (théorème 3.1.2 (iv)). Les triangles ont deux angles égaux : ils sont semblables. L'autre cas est symétrique.

(c) Le point O est équidistant des extrémités de chaque côté, donc il appartient aux quatre médiatrices.

(d) Soit $ABCD$ un trapèze de bases $(AB) \parallel (CD)$. Les angles $\hat{A}$ et $\hat{D}$ sont supplémentaires (angles intérieurs du même côté d'une sécante coupant deux parallèles). Par (iii), le trapèze est cyclique si, et seulement si, $\hat{A} + \hat{C} = 180°$, c'est-à-dire $\hat{C} = \hat{D}$: les angles à la base $[CD]$ sont égaux, ce qui caractérise le trapèze isocèle (le symétrique de C par rapport à la médiatrice de $[CD]$ est alors D, et cette symétrie échange A et B). Un parallélogramme est un trapèze, et il est isocèle si, et seulement si, ses angles consécutifs, qui sont supplémentaires, sont égaux, c'est-à-dire droits. ■



Proposition 3.1.4 (b) : les triangles QAD (contour bleu) et QCB (or) sont semblables.

3.2 Le théorème de Ptolémée

Théorème 3.2.1 (Inégalité de Ptolémée)

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Alors

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD,$$

avec égalité si, et seulement si, $ABCD$ est cyclique.

Démonstration par similitude. Construisons le point E, du même côté de (AB) que C, tel que $\widehat{ABE} = \widehat{DBC}$ et $\widehat{BAE} = \widehat{BDC}$. Les triangles ABE et DBC ont deux angles égaux : ils sont semblables, d'où

$$\frac{AE}{DC} = \frac{AB}{DB} = \frac{BE}{BC} \qquad \text{donc} \qquad AE \cdot BD = AB \cdot CD. \qquad (1)$$

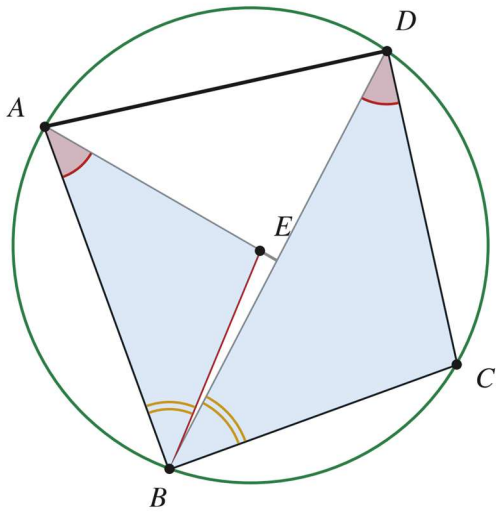
Comparons maintenant les triangles EBC et ABD. D'une part, $\frac{BE}{BA} = \frac{BC}{BD}$ par (1). D'autre part, $\widehat{EBC} = \widehat{ABD}$, car les deux angles s'obtiennent en ajoutant l'angle $\widehat{EBD}$ (ou en le retranchant) aux angles égaux $\widehat{ABE}$ et $\widehat{DBC}$. Les deux triangles ont un angle égal compris entre des côtés proportionnels : ils sont semblables, et

$$\frac{EC}{AD} = \frac{BC}{BD} \qquad \text{donc} \qquad EC \cdot BD = BC \cdot AD. \qquad (2)$$

En additionnant (1) et (2) et en utilisant l'inégalité triangulaire $AC \leq AE + EC$:

$$AC \cdot BD \leq (AE + EC) \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Cas d'égalité. Il y a égalité si, et seulement si, E est sur le segment $[AC]$, c'est-à-dire si la demi-droite $[AE)$ est la demi-droite $[AC)$, soit $\widehat{BAE} = \widehat{BAC}$. Par construction $\widehat{BAE} = \widehat{BDC}$; l'égalité équivaut donc à $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. Comme A et D sont du même côté de (BC) (le quadrilatère est convexe), c'est exactement la cocyclicité (théorème 3.1.2 (iv′)). ■



Démonstration de Ptolémée : les triangles ABE et DBC (bleu) sont semblables ; E est sur [AC] exactement quand ABCD est cyclique.

Deuxième démonstration (par les nombres complexes). Identifions le plan à $\mathbb{C}$ et notons a, b, c, d les affixes. L'identité de Ptolémée

$$(a-c)(b-d) = (a-b)(c-d) + (b-c)(a-d)$$

se vérifie en développant : les deux membres valent $ab - ad - bc + cd$. L'inégalité triangulaire $|z+w| \leq |z| + |w|$ donne alors $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$, avec égalité si, et seulement si, $(a-b)(c-d)$ et $(b-c)(a-d)$ sont positivement colinéaires, c'est-à-dire si, et seulement si, $\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(a-d)} \in \mathbb{R}_{>0}$. Ce quotient est, au signe près, le birapport des quatre points ; il est réel si, et seulement si, les quatre points sont cocycliques ou alignés (chapitre 12). ■

À retenir

L'identité algébrique de Ptolémée $(a-c)(b-d) = (a-b)(c-d) + (b-c)(a-d)$: trois lignes de calcul, et l'on obtient à la fois le théorème et son cas d'égalité. C'est un modèle de la puissance des nombres complexes en géométrie (chapitre 9).

Proposition 3.2.2 (Second théorème de Ptolémée)

Si $ABCD$ est un quadrilatère convexe cyclique, alors

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}.$$

Démonstration. Soit R le rayon du cercle circonscrit. Pour un triangle XYZ inscrit dans ce cercle, $[XYZ] = \frac{XY \cdot YZ \cdot ZX}{4R}$: en effet $[XYZ] = \frac{1}{2} XY \cdot XZ \sin\hat{X}$ et $YZ = 2R\sin\hat{X}$ (loi des sinus, théorème 4.1.1). Calculons l'aire de $ABCD$ en la découpant de deux façons :

$$[ABC] + [ACD] = \frac{AC\,(BA \cdot BC + DA \cdot DC)}{4R}, \qquad [ABD] + [BCD] = \frac{BD\,(AB \cdot AD + CB \cdot CD)}{4R}.$$

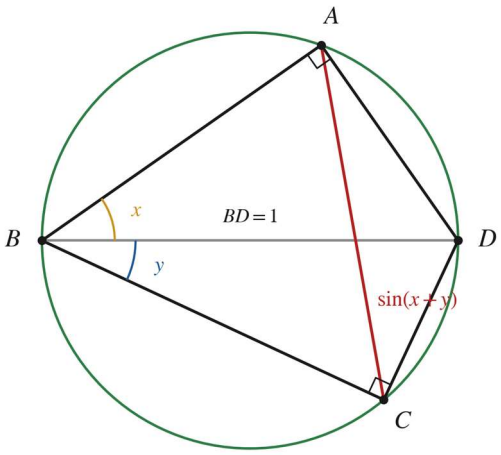
Les deux sommes valent $[ABCD]$; en les égalant, on obtient la formule. ■

Exemple 3.2.3 (Une identité trigonométrique par Ptolémée). Démontrer la formule $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ pour $x, y > 0$ avec $x + y < 90°$.

Solution. Considérons un cercle de diamètre $BD = 1$ et plaçons A et C de part et d'autre de (BD) avec $\widehat{ABD} = x$ et $\widehat{DBC} = y$. Comme $[BD]$ est un diamètre, $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90°$, d'où, dans les triangles rectangles ABD et CBD d'hypoténuse 1,

$$AD = \sin x, \qquad AB = \cos x, \qquad CD = \sin y, \qquad BC = \cos y.$$

De plus, la corde $[AC]$ sous-tend l'angle inscrit $\widehat{ABC} = x + y$: par la loi des sinus dans le triangle ABC, dont le cercle circonscrit a pour diamètre $2R = 1$, on a $AC = 2R\sin(x+y) = \sin(x+y)$. Ptolémée donne $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$, soit $\sin(x+y) = \cos x \sin y + \cos y \sin x$.

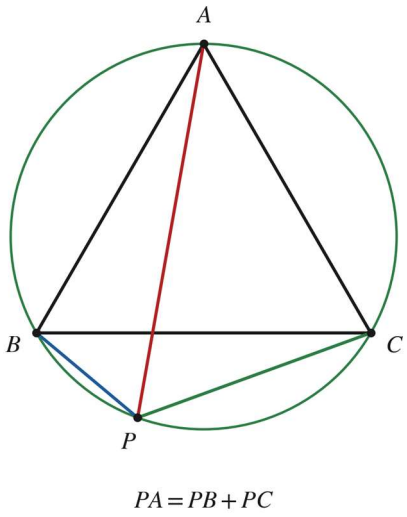


Exemple 3.2.3 : la formule d'addition des sinus lue sur un quadrilatère inscrit dans un cercle de diamètre 1.

Exemple 3.2.4 (Triangle équilatéral inscrit). Soit ABC un triangle équilatéral inscrit dans un cercle Γ, et P un point de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant pas A. Montrer que $PA = PB + PC$.

Solution. Le quadrilatère $ABPC$ est cyclique et convexe, de diagonales $[AP]$ et $[BC]$. Ptolémée s'écrit $PA \cdot BC = PB \cdot AC + PC \cdot AB$. Comme $AB = BC = CA$, on simplifie : $PA = PB + PC$.

Réciproque (par l'inégalité). Pour un point P quelconque du plan, l'inégalité de Ptolémée (valable aussi pour un quadrilatère non convexe, par la preuve complexe) donne $PA \leq PB + PC$, avec égalité si, et seulement si, P est sur l'arc $\overset{\frown}{BC}$: c'est le point de départ du problème de Fermat–Torricelli.



Exemple 3.2.4 : pour P sur le petit arc BC, PA = PB + PC.

3.3 Points cocycliques et puissances

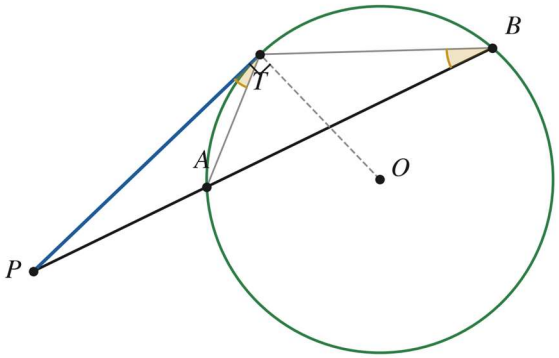
Le critère (v) du théorème 3.1.2 est l'articulation entre ce chapitre et le chapitre 5 (puissance d'un point). Complétons-le par sa version « tangente ».

Proposition 3.3.1 (Critère de la tangente)

Soient $A \neq B$ et T trois points non alignés, et P un point de la droite (AB) distinct de A et B. Alors la droite (PT) est tangente au cercle $\odot(TAB)$ si, et seulement si, $PT^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.

Démonstration. *Sens direct.* Supposons (PT) tangente en T. Par le théorème de l'angle tangentiel, $\measuredangle(TP,TA) = \measuredangle(BT,BA) = \measuredangle(BT,BP)$. Les triangles PTA et PBT ont donc des angles égaux en T et en B, et l'angle en P commun : ils sont semblables, d'où $\frac{PT}{PB} = \frac{PA}{PT}$, soit $PT^2 = PA \cdot PB$. Le point P, étant sur une tangente, est extérieur au disque ; il n'est donc pas entre A et B, et $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = PA \cdot PB > 0$.

Sens réciproque. Supposons $PT^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$. Ce produit étant positif, P est hors du segment $[AB]$. La relation s'écrit $\frac{PT}{PB} = \frac{PA}{PT}$, et les triangles PTA et PBT ont l'angle en P commun : ils sont semblables (un angle égal compris entre des côtés proportionnels). Donc $\widehat{PTA} = \widehat{PBT}$, c'est-à-dire que l'angle entre (TP) et la corde $[TA]$ égale l'angle inscrit $\widehat{ABT}$. Soit (t) la tangente en T : par le sens direct du théorème de l'angle tangentiel, (t) fait avec (TA), du même côté, le même angle ; donc $(TP) = (t)$. ■



$$PT^2 = PA \cdot PB$$

Critère de la tangente : les triangles PTA et PBT sont semblables, d'où PT² = PA · PB.

À retenir (Le critère produit)

Si P, A, B sont alignés et P, C, D sont alignés sur deux droites distinctes, alors

$$A, B, C, D \text{ cocycliques} \Leftrightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

La version tangente s'écrit : $PT^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ si, et seulement si, (PT) est tangente au cercle $\odot(TAB)$.

Exemple 3.3.2 (Théorème de Miquel). *Soit ABC un triangle et $D \in (BC)$, $E \in (CA)$, $F \in (AB)$ trois points distincts des sommets. Montrer que les cercles $\odot(AEF)$, $\odot(BFD)$ et $\odot(CDE)$ ont un point commun M (le **point de Miquel**).*

Solution. Les cercles $\odot(AEF)$ et $\odot(BFD)$ passent tous deux par F. S'ils sont tangents en F, posons $M = F$; sinon, soit M leur second point commun. Supposons $M \neq D, E, F$ (les cas particuliers se traitent de même, en remplaçant une corde par une tangente). Par le théorème 2.3.1 appliqué aux deux cercles :

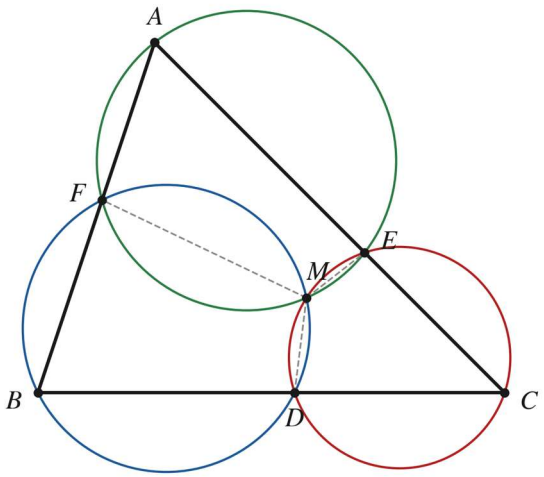
$$\measuredangle(MF,ME) = \measuredangle(AF,AE) = \measuredangle(AB,AC), \qquad \measuredangle(MD,MF) = \measuredangle(BD,BF) = \measuredangle(BC,BA).$$

Par la relation de Chasles,

$$\measuredangle(MD,ME) = \measuredangle(MD,MF) + \measuredangle(MF,ME) = \measuredangle(BC,BA) + \measuredangle(AB,AC) = \measuredangle(BC,AC) = \measuredangle(CD,CE).$$

Par le théorème 2.3.1, M, C, D, E sont cocycliques (ils ne sont pas alignés, car $D \neq C \neq E$ avec $D \in (BC)$ et $E \in (CA)$) : $M \in \odot (CDE)$.

La démonstration n'a utilisé que des angles orientés : elle vaut quelle que soit la position de D, E, F sur les droites (y compris sur les prolongements des côtés). C'est l'illustration type de la méthode 1.4.1.



Théorème de Miquel : les trois cercles AEF, BFD et CDE passent par un même point M.

3.4 Exercices

Exercice 3.1 ★. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Montrer que les bissectrices intérieures de ses quatre angles déterminent un quadrilatère cyclique.

Exercice 3.2 ★. Soit ABC un triangle acutangle, D, E, F les pieds des hauteurs issues de A, B, C et H l'orthocentre. Montrer que H est le centre du cercle inscrit du triangle DEF.

Exercice 3.3 ★★ (Angles du triangle podaire). Soit ABC un triangle et P un point intérieur. On note X, Y, Z les projetés orthogonaux de P sur $(BC), (CA), (AB)$. Montrer que $\widehat{YXZ} = \widehat{BPC} - \widehat{BAC}$.

Exercice 3.4 ★★. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique dont les diagonales se coupent en P. Montrer que $\frac{AP}{PC} = \frac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD}$.

Exercice 3.5 ★★ (Russie). Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles sécants en A et B. Une droite passant par A recoupe $\mathcal{C}_1$ en C et $\mathcal{C}_2$ en D. Montrer que le rapport $\frac{BC}{BD}$ ne dépend pas de la droite choisie.

Exercice 3.6 ★★ (Ptolémée dans un carré). Soit $ABCD$ un carré inscrit dans un cercle et P un point de l'arc $\widehat{AB}$ ne contenant ni C ni D. Montrer que

$$PC = PA + \sqrt{2}\,PB, \qquad PD = PB + \sqrt{2}\,PA, \qquad \frac{PC + PD}{PA + PB} = 1 + \sqrt{2}.$$

Exercice 3.7 ★★★. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique tel que (AB) et (CD) se coupent en E, et (AD) et (BC) se coupent en F. Montrer que les bissectrices intérieures des angles $\widehat{AED}$ et $\widehat{AFB}$ sont perpendiculaires.

3.5 Corrigés

Solution de l'exercice 3.1. Notons $\hat{A} = 2a$, $\hat{B} = 2b$, $\hat{C} = 2c$, $\hat{D} = 2d$ avec $a + c = b + d = 90°$. Soit P le point d'intersection des bissectrices issues de A et B, et R celui des bissectrices issues de C et D. Dans le triangle ABP : $\widehat{APB} = 180° - a - b$. Dans le triangle CDR : $\widehat{CRD} = 180° - c - d$. Or les angles du quadrilatère formé aux sommets P et R sont $\widehat{APB}$ et $\widehat{CRD}$ (angles opposés par le sommet). Leur somme vaut $360° - (a + b + c + d) = 360° - 180° = 180°$: le quadrilatère est cyclique.

Solution de l'exercice 3.2. Le quadrilatère $BDHF$ possède deux angles droits en D et F, il est donc cyclique de diamètre $[BH]$, d'où $\widehat{HDF} = \widehat{HBF} = 90° - \alpha$. De même $CDHE$ est cyclique de diamètre $[CH]$ et $\widehat{HDE} = \widehat{HCE} = 90° - \alpha$. Donc (DH) est la bissectrice de $\widehat{FDE}$. Le même argument aux sommets E et F montre que H est l'intersection des trois bissectrices du triangle orthique DEF.

> **Remarque.**
> On dit que ABC est le triangle excentral du triangle orthique : A, B, C sont les centres des cercles exinscrits de DEF. Cette configuration est essentielle (chapitre 7).

Solution de l'exercice 3.3. Le quadrilatère $PZBX$ possède deux angles droits en Z et X : il est inscrit dans le cercle de diamètre $[PB]$, d'où $\widehat{PXZ} = \widehat{PBZ} = \widehat{PBA}$. De même, $PXCY$ est inscrit dans le cercle de diamètre $[PC]$, d'où $\widehat{PXY} = \widehat{PCY} = \widehat{PCA}$. Comme P est intérieur, la demi-droite $[XP)$ est intérieure à l'angle $\widehat{YXZ}$ et

$$\widehat{YXZ} = \widehat{PXZ} + \widehat{PXY} = \widehat{PBA} + \widehat{PCA}.$$

Or $\widehat{PBA} = \beta - \widehat{PBC}$ et $\widehat{PCA} = \gamma - \widehat{PCB}$, tandis que dans le triangle BPC on a $\widehat{PBC} + \widehat{PCB} = 180° - \widehat{BPC}$. Il vient

$$\widehat{YXZ} = (\beta + \gamma) - \left(180° - \widehat{BPC}\right) = (180° - \alpha) - 180° + \widehat{BPC} = \widehat{BPC} - \widehat{BAC}.$$

> **Remarque.**
> Test de cohérence : pour $P = O$ (triangle acutangle), le triangle podaire est le triangle médian, donc $\widehat{YXZ} = \alpha$; et l'on a bien $\widehat{BOC} - \alpha = 2\alpha - \alpha = \alpha$. Cette formule gouverne les cercles d'Apollonius (chapitre 11).

Solution de l'exercice 3.4. Les triangles APB et DPC sont semblables, donc $\frac{AP}{DP} = \frac{AB}{DC}$. Les triangles APD et BPC sont semblables, donc $\frac{AP}{BP} = \frac{AD}{BC}$. En multipliant :

$$\frac{AP^2}{BP \cdot DP} = \frac{AB \cdot AD}{DC \cdot BC}.$$

Or $BP \cdot DP = AP \cdot CP$ (puissance de P), d'où $\frac{AP^2}{AP \cdot CP} = \frac{AP}{CP}$, et le résultat suit.

Solution de l'exercice 3.5. En angles orientés de droites, $\measuredangle(CB, CD) = \measuredangle(CB, CA)$ est l'angle inscrit dans $\mathcal{C}_1$ qui intercepte la corde $[AB]$, donc il ne dépend pas de la droite choisie. De même $\measuredangle(DB, DC) = \measuredangle(DB, DA)$ est constant (angle inscrit dans $\mathcal{C}_2$). Le triangle BCD a donc deux angles fixes : tous les triangles BCD obtenus sont semblables entre eux, et $\frac{BC}{BD} = \frac{\sin\widehat{BDC}}{\sin\widehat{BCD}}$ est constant.

Solution de l'exercice 3.6. Notons s le côté du carré ; ses diagonales valent $s\sqrt{2}$. Les points A, P, B, C sont dans cet ordre sur le cercle, donc $APBC$ est un quadrilatère cyclique convexe de côtés AP, PB, BC, CA et de diagonales AB, PC. Ptolémée donne

$$AB \cdot PC = AP \cdot BC + PB \cdot CA \Longrightarrow s \cdot PC = PA \cdot s + PB \cdot s\sqrt{2} \Longrightarrow PC = PA + \sqrt{2}\,PB.$$

De même, D, A, P, B étant dans cet ordre sur le cercle, le quadrilatère $DAPB$ a pour côtés DA, AP, PB, BD et pour diagonales DP, AB ; Ptolémée donne $DP \cdot AB = DA \cdot PB + AP \cdot BD$, soit $PD = PB + \sqrt{2}\,PA$. En additionnant : $PC + PD = \left(1 + \sqrt{2}\right)(PA + PB)$.

Remarque.

Contrôle numérique : pour P milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et un cercle de rayon 1, $PA = PB = 2\sin 22{,}5° \approx 0{,}765$ et $PC = PD = 2\sin 67{,}5° \approx 1{,}848$; on vérifie $1{,}848 \approx 0{,}765\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

Solution de l'exercice 3.7. Posons $\alpha = \widehat{BAD}$ et notons ℓ_E la bissectrice intérieure de $\widehat{AED}$, dont le demi-angle est ε. Soit $M = \ell_E \cap (AD)$ et $N = \ell_E \cap (BC)$: ces deux points existent et M, N appartiennent aux deux côtés de l'angle de sommet F.

Dans le triangle AME (avec A, E sur la droite (AB) et M sur (AD)) : $\widehat{AME} = 180° - \widehat{MAE} - \widehat{AEM} = 180° - \alpha - \varepsilon$.

Dans le triangle CNE (avec C, E sur la droite (CD) et N sur (BC)) : comme $ABCD$ est cyclique, l'angle extérieur en C vaut l'angle intérieur opposé, $\widehat{NCE} = 180° - \widehat{BCD} = \widehat{BAD} = \alpha$, donc $\widehat{CNE} = 180° - \widehat{NCE} - \widehat{CEN} = 180° - \alpha - \varepsilon$.

Ainsi $\widehat{AME} = \widehat{CNE}$. Or $\widehat{FMN}$ et $\widehat{AME}$ sont opposés par le sommet en M (les points A, F sont de part et d'autre de M sur (AD), et E, N de part et d'autre de M sur ℓ_E) ; de même $\widehat{FNM} = \widehat{CNE}$. Par conséquent $\widehat{FMN} = \widehat{FNM}$, c'est-à-dire que le triangle FMN est isocèle en F. La bissectrice intérieure de $\widehat{MFN} = \widehat{AFB}$ est donc la médiatrice de $[MN]$: elle est perpendiculaire à $(MN) = \ell_E$.

Remarque.

Les angles orientés de droites donnent presque tout en une ligne : si ℓ_E est une bissectrice du couple $\big((AB), (CD)\big)$ et ℓ_F une bissectrice du couple $\big((AD), (BC)\big)$, alors $2\measuredangle(\ell_E, \ell_F) = \measuredangle(AB, AD) + \measuredangle(CD, CB) = 0 \pmod{180°}$, puisque $\measuredangle(AB, AD) = \measuredangle(CB, CD)$ ($ABCD$ cyclique). Les droites ℓ_E et ℓ_F sont donc parallèles ou perpendiculaires. Ce calcul ne distingue pas bissectrice intérieure et bissectrice extérieure : pour conclure que les bissectrices intérieures sont perpendiculaires, il faut un argument de position, comme dans la solution ci-dessus.

3.6 Problèmes d'entraînement

Problème 3.1 ★★. Soient $ABCD$ un quadrilatère cyclique convexe, X le point d'intersection de ses diagonales, et M, N les milieux des arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{CD}$ ne contenant pas les autres sommets. Montrer que (MN) est parallèle à la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{AXB}$; autrement dit, (MN) forme avec les diagonales (AC) et (BD) un triangle isocèle.

Indication : l'angle de deux cordes sécantes vaut la demi-somme des arcs qu'elles interceptent ; comparer les angles que fait (MN) avec (AC) et avec (BD).

Problème 3.2 ★★ (Chine). Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique de diagonales perpendiculaires se coupant en P (théorème de Brahmagupta). Montrer que la droite passant par P et perpendiculaire à un côté passe par le milieu du côté opposé.

Indication : chasse aux angles pour montrer que le triangle obtenu est isocèle.

Problème 3.3 ★★★ (IMO 2003). Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Soient P, Q, R les pieds des perpendiculaires abaissées de D sur $(BC), (CA), (AB)$. Montrer que $PQ = QR$ si, et seulement si, les bissectrices de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ se coupent sur (AC).

Indication : P, Q, R sont alignés (droite de Simson) ; exprimer PQ et QR à l'aide des cercles de diamètres $[DC]$ et $[DA]$.

Problème 3.4 ★★. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique de côtés $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$. Démontrer la formule de Brahmagupta : l'aire vaut $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, où s est le demi-périmètre.

Indication : découper suivant la diagonale $[AC]$, utiliser Al-Kashi dans les deux triangles et $\widehat{B} + \widehat{D} = 180°$.

À retenir (Bilan du chapitre)

- Cinq critères de cocyclicité ; le plus robuste est l'égalité d'angles orientés.
- Cinq déclencheurs à chercher activement dans toute figure.
- Ptolémée : égalité pour les quadrilatères cycliques, inégalité en général ; l'identité complexe $(a-c)(b-d) = (a-b)(c-d) + (b-c)(a-d)$ contient tout.
- Configuration du triangle orthique : dans un triangle acutangle, H est le centre du cercle inscrit de DEF.

CHAPITRE 4

4 Le triangle : points remarquables et relations métriques

L'objet le plus fréquemment étudié en olympiade est le triangle. Il faut en connaître les propriétés sur le bout des doigts : non pas savoir les retrouver, mais les avoir disponibles instantanément. Ce chapitre est le socle métrique de tout le reste ; toutes les formules du formulaire du chapitre 1 y sont démontrées.

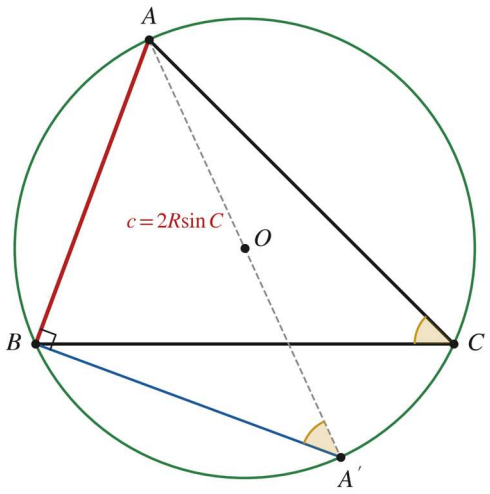
4.1 Les deux lois fondamentales

Théorème 4.1.1 (Loi des sinus)

Dans un triangle ABC de cercle circonscrit de rayon R :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Démonstration. Soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit. Alors $\widehat{ABA'} = 90°$ (corollaire 2.2.2). Si A' et C sont du même côté de (AB), alors $\widehat{AA'B} = \widehat{ACB} = C$ (angles inscrits interceptant le même arc) ; sinon, $\widehat{AA'B} = 180° - C$; dans les deux cas $\sin\widehat{AA'B} = \sin C$. Dans le triangle ABA' rectangle en B, d'hypoténuse $AA' = 2R$: $AB = AA'\sin\widehat{AA'B}$, soit $c = 2R\sin C$. (Si $A' = B$, c'est-à-dire si $[AB]$ est un diamètre, alors $C = 90°$ et $c = 2R = 2R\sin C$.) Les autres égalités s'obtiennent par permutation circulaire. ■



Loi des sinus : dans le triangle ABA' rectangle en B, AB = AA' sin C = 2R sin C.

À retenir — Le réflexe « 2R »

Toute longueur de corde s'écrit $2R\sin(\text{angle inscrit})$. Cette substitution transforme une égalité de longueurs en identité trigonométrique : c'est la première étape de la méthode trigonométrique (chapitre 9).

Théorème 4.1.2 (Loi des cosinus, ou théorème d'Al-Kashi)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, et les deux relations analogues.

Démonstration. Avec $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$: $a^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, par définition du produit scalaire. ■

Théorème 4.1.3 (Formules d'aire)

En notant S l'aire et $s = \frac{a+b+c}{2}$ le demi-périmètre :

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{abc}{4R} = rs = r_A(s-a) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

La dernière égalité est la formule de Héron.

Démonstration. *Sinus.* La hauteur issue de B vaut $c\sin A$ (triangle rectangle formé par B, A et le pied de cette hauteur ; si l'angle A est obtus, on utilise $\sin(180° - A) = \sin A$). D'où $S = 1/2\ b \cdot c\sin A$. En remplaçant $\sin A = \frac{a}{2R}$, on obtient $S = \frac{abc}{4R}$.

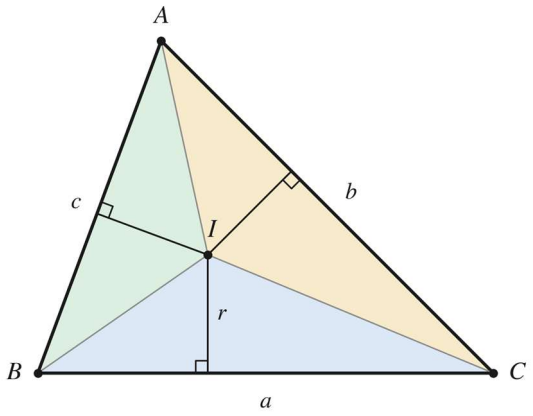
Rayon inscrit. Le centre I du cercle inscrit est intérieur au triangle ; les triangles IBC, ICA, IAB recouvrent ABC sans chevauchement et ont pour hauteurs issues de I le rayon r (le cercle inscrit est tangent aux trois côtés). Donc $S = 1/2\, r(a+b+c) = rs$.

Rayon exinscrit. Le centre I_A est à la distance r_A des trois droites (BC), (CA), (AB), et le quadrilatère ABI_AC se découpe de deux façons : $[ABI_AC] = [I_AAB] + [I_AAC] = S + [I_ABC]$. Donc $S = 1/2\, r_A(c+b-a) = r_A(s-a)$.

Héron. Par Al-Kashi, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2b}$, donc

$$16S^2 = 4b^2c^2\sin^2 A = 4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2 = [2bc - (b^2+c^2-a^2)][2bc + (b^2+c^2-a^2)].$$

Le premier facteur vaut $a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c) = 4(s-b)(s-c)$, le second $(b+c)^2 - a^2 = (b+c-a)(a+b+c) = 4s(s-a)$. D'où $S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. ■



S = rs : les trois triangles de sommet I ont pour hauteur r.

4.2 Les quatre points remarquables classiques

Point	Défini par	Caractérisation	Coord. bary.
G	médianes	$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$	$(1:1:1)$
O	médiatrices	$OA=OB=OC=R$	$(a^2S_A:b^2S_B:c^2S_C)$
H	hauteurs	$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$	$(S_BS_C:S_CS_A:S_AS_B)$
I	bissectrices	équidistant des trois côtés	$(a:b:c)$

où $S_A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}=bc\cos A$ (notations de Conway ; les coordonnées barycentriques sont établies au chapitre 9).

Théorème 4.2.1 (Droite d'Euler)

Les points O, G, H sont alignés, et $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$, soit $OG:GH=1:2$.

Démonstration. Soit P le point défini par $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. Alors

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)=OC^2-OB^2=0,$$

donc P est sur la hauteur issue de A (ou $P=A$). Par symétrie des rôles, P appartient aux trois hauteurs, donc $P=H$: c'est la relation d'Euler $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, qui démontre au passage que les trois hauteurs sont concourantes. Enfin G est l'isobarycentre de A, B, C, donc $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$. ■

Théorème 4.2.2 (Cercle d'Euler, ou cercle des neuf points)

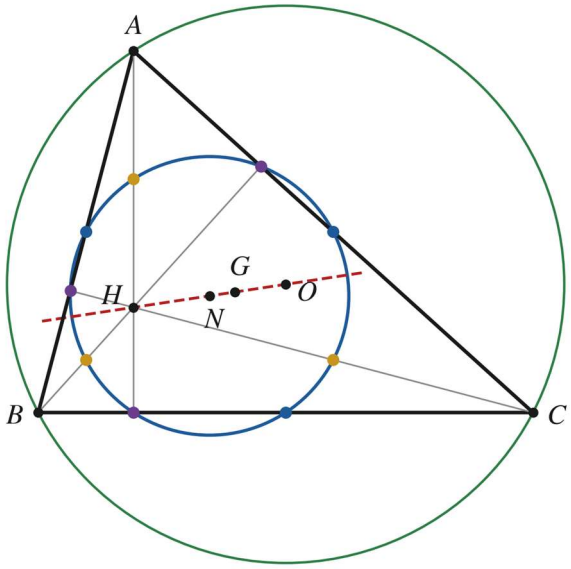
Les neuf points suivants sont cocycliques : les trois milieux des côtés, les trois pieds des hauteurs, et les trois milieux des segments $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$. Le centre N de ce cercle est le milieu de $[OH]$ et son rayon vaut $R/2$.

Démonstration. Notons M_A le milieu de $[BC]$, K_A celui de $[AH]$, D le pied de la hauteur issue de A, et A' le point diamétralement opposé à A sur Γ.

Étape 1 : un cercle de rayon $R/2$. L'homothétie h de centre H et de rapport $1/2$ envoie Γ (centre O, rayon R) sur un cercle Γ' de centre le milieu N de $[OH]$ et de rayon $R/2$. Elle envoie A, B, C sur K_A, K_B, K_C : ces trois points sont sur Γ'.

Étape 2 : les milieux des côtés. Par la relation d'Euler, $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA'}=-\overrightarrow{OA}$; le milieu de $[HA']$ vérifie donc $1/2\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OA'}\right)=1/2\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\overrightarrow{OM_A}$: c'est M_A (dans tout triangle). Donc $M_A=h(A')\in\Gamma'$, et de même pour M_B, M_C.

Étape 3 : les pieds des hauteurs. Comme $[AA']$ est un diamètre de Γ, son image $[K_AM_A]$ est un diamètre de Γ'. Or $K_A\in(AH)$, $M_A\in(BC)$ et $D=(AH)\cap(BC)$ avec $(AH)\perp(BC)$: l'angle $\widehat{K_ADM_A}$ est droit (ou D coïncide avec K_A ou M_A). Par le corollaire 2.2.2, D est sur le cercle de diamètre $[K_AM_A]$, c'est-à-dire sur Γ'. De même pour les deux autres pieds. ■



Droite d'Euler (rouge) passant par O, G, N, H, et cercle d'Euler (bleu) : milieux des côtés (bleu), pieds des hauteurs (violet) et milieux de [AH], [BH], [CH] (or).

4.3 Bissectrices, cercle inscrit et cercles exinscrits

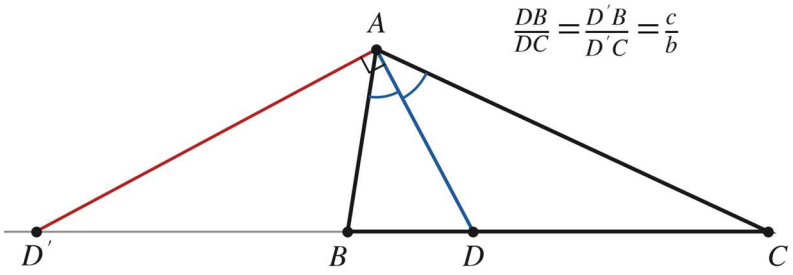
Théorème 4.3.1 (Théorème de la bissectrice)

Si la bissectrice intérieure issue de A coupe $[BC]$ en D, alors $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$. Si la bissectrice extérieure coupe (BC) en D' (lorsque $b \neq c$), alors $\frac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}} = \frac{c}{b}$, le point D' étant extérieur au segment $[BC]$; autrement dit $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}}$.

Démonstration. Les triangles ABD et ADC ont la même hauteur issue de A, donc le rapport de leurs aires est le rapport de leurs bases. En calculant ces aires par la formule du sinus avec l'angle en A :

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[ABD]}{[ADC]} = \frac{1/2\, AB \cdot AD \sin A/2}{1/2\, AD \cdot AC \sin A/2} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$$

Pour la bissectrice extérieure, supposons par exemple $c < b$; alors D' est du côté de B, et les angles $\widehat{BAD'}$ et $\widehat{CAD'}$ valent θ et $180° - \theta$ avec $\theta = 90° - A/2$; ils ont le même sinus. Le même calcul d'aires donne $\frac{D'B}{D'C} = \frac{[ABD']}{[ACD']} = \frac{1/2 AB \cdot AD' \sin\theta}{1/2 AC \cdot AD' \sin(180°-\theta)} = \frac{c}{b}$. Comme D' est hors de $[BC]$, le rapport algébrique $\frac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}}$ est positif. ■



Théorème de la bissectrice : D et D' partagent [BC] dans le rapport c/b, intérieurement et extérieurement.

Théorème 4.3.2 (Longueurs des tangentes)

Soit I le centre du cercle inscrit, de rayon r, touchant $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ en X, Y, Z. Alors

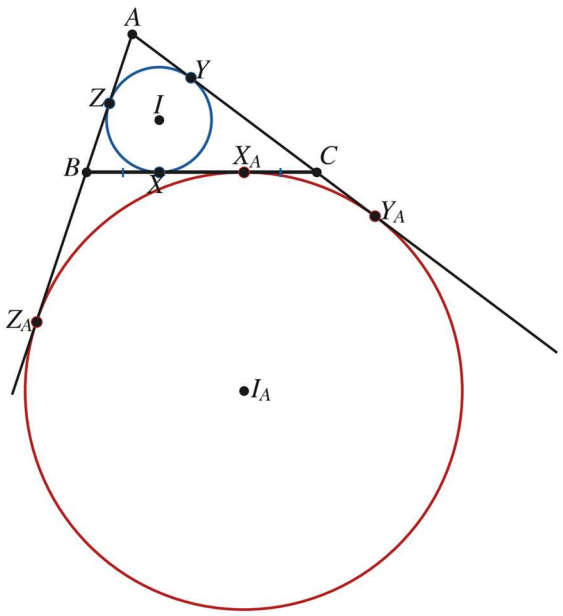
$$AY = AZ = s - a, \qquad BZ = BX = s - b, \qquad CX = CY = s - c.$$

Pour le cercle exinscrit dans l'angle A, de centre I_A, touchant (BC) en X_A et les droites (AB), (AC) en Z_A, Y_A : $AY_A = AZ_A = s$, $BX_A = s - c$ et $CX_A = s - b$.

Démonstration. Deux tangentes issues d'un même point P à un cercle de centre ω ont la même longueur : si elles touchent le cercle en T et T', les triangles $P\omega T$ et $P\omega T'$ sont rectangles en T et T', ont l'hypoténuse $[P\omega]$ commune et $\omega T = \omega T'$; par Pythagore, $PT = PT'$.

Notons $x = AY = AZ$, $y = BZ = BX$, $z = CX = CY$. Comme $X \in [BC]$, $Y \in [CA]$, $Z \in [AB]$, on a $x + y = c$, $y + z = a$, $z + x = b$, d'où $2(x + y + z) = 2s$, puis $x = s - (y + z) = s - a$, et de même pour y et z.

Pour le cercle exinscrit : $X_A \in [BC]$, $B \in [AZ_A]$ et $C \in [AY_A]$. D'où $AZ_A + AY_A = (AB + BZ_A) + (AC + CY_A) = c + b + (BX_A + CX_A) = a + b + c = 2s$, et comme $AZ_A = AY_A$, chacun vaut s. Il vient $BX_A = BZ_A = AZ_A - AB = s - c$ et $CX_A = s - b$. ■



Points de contact du cercle inscrit (bleu) et du cercle exinscrit (rouge) : BX = CX_A = s − b.

À retenir — Conséquence remarquable

$BX = s - b = CX_A$: les points de contact du cercle inscrit et du cercle exinscrit sur $[BC]$ sont symétriques par rapport au milieu de $[BC]$. Ce fait engendre le point de Nagel et intervient dans un très grand nombre de problèmes.

Proposition 4.3.3 (Rayons inscrit et exinscrits)

$$r = \frac{S}{s} = (s - a)\tan\frac{A}{2} = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}, \qquad r_A = \frac{S}{s - a} = s\tan\frac{A}{2},$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C},\qquad r_A+r_B+r_C=4R+r.$$

Démonstration. Les formules $r=\frac{S}{s}$ et $r_A=\frac{S}{s-a}$ sont celles du théorème 4.1.3.

Tangentes. Le triangle AIZ est rectangle en Z, avec $AZ=s-a$ (théorème 4.3.2), $IZ=r$ et $\widehat{IAZ}=A/2$; donc $r=(s-a)\tan A/2$. De même, le triangle AI_AZ_A est rectangle en Z_A, avec $AZ_A=s$ et $I_AZ_A=r_A$: $r_A=s\tan A/2$.

Formule en R. On a $a=BX+XC=r\cot B/2+r\cot C/2$ (triangles rectangles BIX et CIX), donc

$$a=r\,\frac{\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=r\,\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=r\,\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

Par ailleurs $a=2R\sin A=4R\sin A/2\cos A/2$. En égalant et en simplifiant par $\cos A/2>0$: $r=4R\sin A/2\sin B/2\sin C/2$.

Inverses. $\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}=\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{S}=\frac{3s-2s}{S}=\frac{s}{S}=\frac{1}{r}$.

Somme. On calcule $r_A+r_B+r_C-r=S\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}\right)$. Or $\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s}=\frac{a}{s(s-a)}$ et $\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}=\frac{a}{(s-b)(s-c)}$, donc la parenthèse vaut

$$\frac{a[(s-b)(s-c)+s(s-a)]}{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{a[2s^2-s(a+b+c)+bc]}{S^2}=\frac{abc}{S^2}.$$

Ainsi $r_A+r_B+r_C-r=\frac{abc}{S}=4R$ (théorème 4.1.3). ■

Théorème 4.3.4 (Relation d'Euler)

$OI^2=R^2-2Rr$. En particulier $R\geq 2r$ (inégalité d'Euler), avec égalité si, et seulement si, le triangle est équilatéral.

Démonstration. *Étape 1 : le lemme du trident.* Soit M le second point d'intersection de la bissectrice (AI) avec Γ ; c'est le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A, car les angles inscrits $\widehat{BAM}$ et $\widehat{MAC}$ sont égaux (corollaire 2.2.2 (b)). Montrons que $MB=MI$. L'angle $\widehat{MBI}=\widehat{MBC}+\widehat{CBI}=\widehat{MAC}+\frac{B}{2}=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$ (angles inscrits interceptant l'arc $\widehat{MC}$). L'angle $\widehat{MIB}$ est l'angle extérieur en I du triangle ABI, donc $\widehat{MIB}=\widehat{IAB}+\widehat{IBA}=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$. Le triangle MBI est isocèle en M : $MB=MI$.

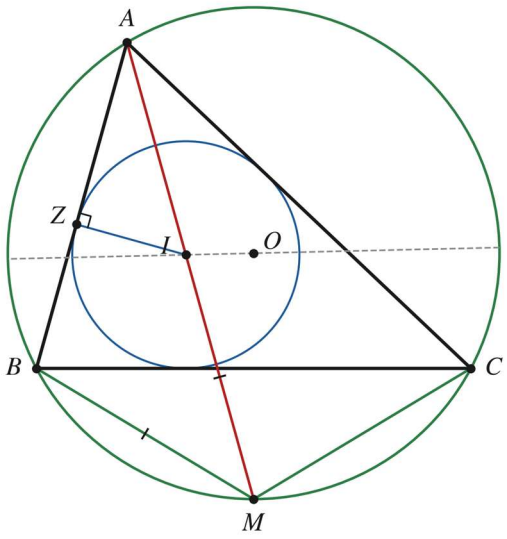
Étape 2 : un produit. La droite (OI) coupe Γ aux extrémités d'un diamètre, en des points U, V avec $IU=R-OI$ et $IV=R+OI$ (si $I=O$, toute droite par O convient). La corde $[AM]$ passe aussi par I, qui est intérieur au disque. Par le théorème 3.1.2 (v) appliqué aux quatre points A,M,U,V :

$$IA\cdot IM=IU\cdot IV=(R-OI)(R+OI)=R^2-OI^2.$$

Étape 3 : calcul de $IA\cdot IM$. Le triangle AIZ est rectangle en Z avec $\widehat{IAZ}=\frac{A}{2}$, donc $IA=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$. Par la loi des sinus dans le triangle ABM, inscrit dans Γ, la corde MB sous-tend l'angle inscrit $\widehat{MAB}=\frac{A}{2}$, donc $IM=MB=2R\sin\frac{A}{2}$. D'où $IA\cdot IM=2Rr$, et $OI^2=R^2-2Rr$.

Inégalité. Comme $OI^2\geq 0$, on obtient $R(R-2r)\geq 0$, soit $R\geq 2r$, avec égalité si, et seulement si, $O=I$. Or, si $O=I$, le point O est à la même distance r des trois côtés, donc les trois cordes $[BC]$,

$[CA]$, $[AB]$ du cercle Γ sont à la même distance du centre ; elles ont donc la même longueur ($a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$, etc.), et le triangle est équilatéral. La réciproque est immédiate. ■



Relation d'Euler : MB = MC = MI (lemme du trident) et IA · IM est la puissance de I, égale à R² − OI².

Attention.
La relation analogue pour un cercle exinscrit est $OI_A^2 = R^2 + 2Rr_A$: le signe change car I_A est extérieur au cercle circonscrit, donc sa puissance est positive (même démonstration, avec $MI_A = MB$ et $I_A A \cdot I_A M = OI_A^2 - R^2$).

4.4 Relations métriques utiles

Théorème 4.4.1 (Théorème de la médiane et relation de Stewart)

Si M est le milieu de $[BC]$: $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

Plus généralement (Stewart), si $D \in [BC]$ avec $BD = m$, $DC = n$ (et donc $BC = m + n$) et $AD = d$:

$$b^2 m + c^2 n = (m + n)(d^2 + mn).$$

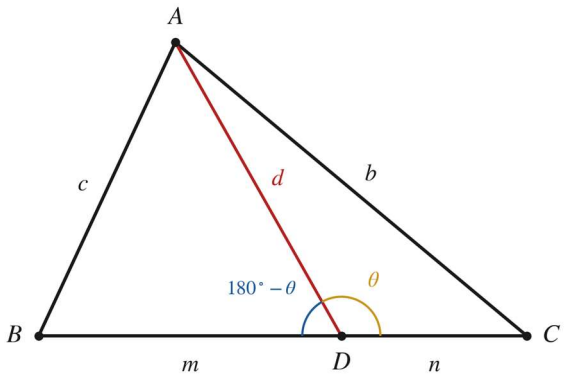
Démonstration. Notons $\theta = \widehat{ADC}$, de sorte que $\widehat{ADB} = 180° - \theta$. Al-Kashi dans les triangles ADC et ADB donne

$$b^2 = d^2 + n^2 - 2dn\cos\theta, \qquad c^2 = d^2 + m^2 + 2dm\cos\theta.$$

Multiplions la première par m, la seconde par n, et additionnons : les termes en $\cos\theta$ s'éliminent, et

$$b^2 m + c^2 n = d^2(m + n) + mn(n + m) = (m + n)(d^2 + mn).$$

Pour $m = n = \frac{a}{2}$, on obtient $\frac{a}{2}(b^2 + c^2) = a\left(AM^2 + \frac{a^2}{4}\right)$, soit le théorème de la médiane. ■



Relation de Stewart : on écrit Al-Kashi dans ABD et ADC, avec des angles supplémentaires en D.

Proposition 4.4.2 (Distances à l'orthocentre)

$$AH = 2R\,|\cos A|, \qquad OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2) = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C).$$

Démonstration. *Première formule.* On a $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM_A}$ (relation d'Euler), donc $AH = 2\,OM_A$. Dans le triangle OBM_A, rectangle en M_A, $OM_A = \sqrt{R^2 - a^2/4} = \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 A} = R\,|\cos A|$.

Deuxième formule. En développant le carré de $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$:

$$OH^2 = 3R^2 + 2\big(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\big).$$

Or $c^2 = \|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\|^2 = 2R^2 - 2\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = R^2 - \frac{c^2}{2}$; en sommant, $OH^2 = 3R^2 + 2\left(3R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right) = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$.

Troisième formule. Par la loi des sinus, $a^2+b^2+c^2 = 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$. Montrons que $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$. On a

$$\sin^2 A + \sin^2 B = 1 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} = 1 - \cos(A+B)\cos(A-B) = 1 + \cos C\cos(A-B),$$

car $\cos(A+B) = -\cos C$, et $\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 + \cos C\cos(A+B)$. En sommant : $2 + \cos C[\cos(A-B) + \cos(A+B)] = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$. Donc $OH^2 = 9R^2 - 4R^2(2 + 2\cos A\cos B\cos C) = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$. ■

Conséquence.

H est intérieur au cercle circonscrit (c'est-à-dire $OH < R$) si, et seulement si, $\cos A\cos B\cos C > 0$, c'est-à-dire si le triangle est acutangle.

4.5 Exemples résolus

Exemple 4.5.1 (L'identité cos A + cos B + cos C = 1 + r/R). *Démontrer l'identité* $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$, *valable dans tout triangle.*

Solution. Par la proposition 4.3.3, $\frac{r}{R} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$; il suffit donc de prouver

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Or $\cos B+\cos C=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$ (car $\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$) et $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$. D'où

$$\begin{aligned}\sum\cos A &= 1+2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)=1+2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)\\ &= 1+2\sin\frac{A}{2}\cdot 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},\end{aligned}$$

en utilisant $\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$ puis la formule $\cos(u-v)-\cos(u+v)=2\sin u\sin v$ avec $u=\frac{B}{2}$, $v=\frac{C}{2}$.

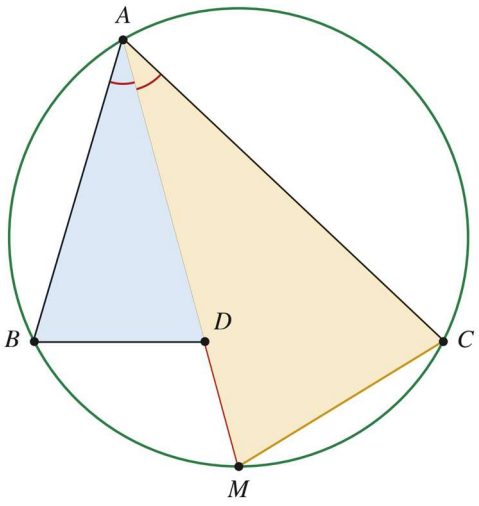
Exemple 4.5.2 (La longueur de la bissectrice). *Calculer AD, où D est le pied de la bissectrice intérieure issue de A.*

Solution. Par le théorème de la bissectrice, $BD=\frac{ac}{b+c}$ et $DC=\frac{ab}{b+c}$. Le théorème de Stewart, avec $m=BD$ et $n=DC$, donne

$$b^2\cdot\frac{ac}{b+c}+c^2\cdot\frac{ab}{b+c}=a\left(AD^2+\frac{a^2bc}{(b+c)^2}\right).$$

Le membre de gauche vaut $\frac{abc(b+c)}{b+c}=abc$. Après division par a :

$$AD^2=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)=\frac{bc\,(b+c-a)(b+c+a)}{(b+c)^2}=\frac{4bc\,s(s-a)}{(b+c)^2}.$$



La bissectrice recoupe Γ en M : les triangles ABD (bleu) et AMC (or) sont semblables, d'où AD · AM = bc.

À retenir

La formule $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC$ mérite d'être mémorisée sous cette forme. Elle traduit que si la bissectrice recoupe le cercle circonscrit en M, alors $AD\cdot AM=bc$ (triangles ABD et AMC semblables : $\widehat{BAD}=\widehat{MAC}$ et $\widehat{ABD}=\widehat{AMC}$) et $AD\cdot DM=BD\cdot DC$ (théorème 3.1.2 (v)) ; en retranchant, $AD^2=AD\cdot AM-AD\cdot DM=bc-BD\cdot DC$.

4.6 Exercices

Exercice 4.1 ★. Montrer que $AH=2R\,|\cos A|$, puis que ABC est acutangle si, et seulement si, H est intérieur au triangle.

Exercice 4.2 ★. Démontrer que $r = (s-a)\tan\frac{A}{2}$ et $r_A = s\tan\frac{A}{2}$.

Exercice 4.3 ★★ (Lemme du trident complet). Soit ABC un triangle, I le centre du cercle inscrit, I_A celui du cercle exinscrit dans l'angle A, et M le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A. Montrer que M est le milieu de $[II_A]$ et que $MI = MB = MC = MI_A$.

Exercice 4.4 ★★. Montrer que $r_A + r_B + r_C = 4R + r$.

Exercice 4.5 ★★. Montrer que $\widehat{OAB} = \widehat{HAC}$: les droites (AO) et (AH) sont isogonales par rapport à l'angle $\hat{A}$.

Exercice 4.6 ★★★. Démontrer l'inégalité d'Euler $R \geq 2r$ et déterminer le cas d'égalité.

Exercice 4.7 ★★★. Montrer que $OI_A^2 = R^2 + 2Rr_A$.

Exercice 4.8 ★★★. Soit ABC un triangle et M un point du plan. Montrer la relation de Leibniz :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

En déduire que $MA^2 + MB^2 + MC^2$ est minimal pour $M = G$.

4.7 Corrigés

Solution de l'exercice 4.1. La première partie est la proposition 4.4.2 sur les distances à l'orthocentre. Précisons-la avec des mesures algébriques. Soit D le pied de la hauteur issue de A ; orientons la droite (AD) de A vers D. La relation $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM_A}$ donne $\overline{AH} = 2R\cos A$ (le vecteur $\overrightarrow{OM_A}$ est dirigé de A vers (BC) si, et seulement si, O est du même côté que A, c'est-à-dire si A est aigu). Comme $\overline{AD} = h_a = c\sin B = 2R\sin B\sin C$ et $\cos A = -\cos(B+C) = \sin B\sin C - \cos B\cos C$, il vient

$$\overline{HD} = \overline{AD} - \overline{AH} = 2R\cos B\cos C.$$

Ainsi H est strictement du même côté que A par rapport à (BC) si, et seulement si, $\cos B\cos C > 0$. Le point H est intérieur au triangle si, et seulement si, il est du même côté que chaque sommet par rapport au côté opposé, soit $\cos B\cos C > 0$, $\cos C\cos A > 0$ et $\cos A\cos B > 0$: les trois cosinus sont non nuls et de même signe. Comme un triangle a au plus un angle obtus, ils sont alors tous positifs. Donc H est intérieur si, et seulement si, les trois angles sont aigus.

Solution de l'exercice 4.2. Dans le triangle rectangle AIZ (Z point de contact sur $[AB]$) : $IZ = r$, $AZ = s - a$ et $\widehat{IAZ} = \frac{A}{2}$, donc $\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{s-a}$. De même, dans le triangle rectangle AI_AZ_A : $I_AZ_A = r_A$, $AZ_A = s$ et $\widehat{I_AAZ_A} = \frac{A}{2}$ (car I_A est aussi sur la bissectrice intérieure issue de A), d'où $r_A = s\tan\frac{A}{2}$.

Solution de l'exercice 4.3. Les points I et I_A sont sur la bissectrice intérieure issue de A, donc sur la droite (AM). Les droites (BI) et (BI_A) sont les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $\hat{B}$: elles sont perpendiculaires, donc $\widehat{IBI_A} = 90°$ et B appartient au cercle de diamètre $[II_A]$. De même $\widehat{ICI_A} = 90°$ et C appartient à ce cercle. Son centre est donc à la fois sur la médiatrice de $[BC]$ et sur la droite $(AI) = (AM)$: c'est exactement M. Plus directement, sans distinguer le cas $AB = AC$: d'après l'exercice 2.2, $MB = MC = MI$, donc M est le centre du cercle passant par B, C, I, qui est le cercle de diamètre $[II_A]$. D'où $MI = MB = MC = MI_A$ et M milieu de $[II_A]$.

Solution de l'exercice 4.4. On utilise les identités symétriques classiques

$$(s-a)+(s-b)+(s-c) = s, \qquad \sum_{\text{cyc}} (s-a)(s-b) = r^2 + 4rR, \qquad (s-a)(s-b)(s-c) = r^2 s.$$

(La deuxième se vérifie en développant et en utilisant $S = rs$, $abc = 4RS$; la troisième est Héron : $S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) = r^2 s^2$.) Alors

$$r_A + r_B + r_C = S\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{s-a} = S \cdot \frac{\sum_{\text{cyc}} (s-a)\,(s-b)}{(s-a)(s-b)(s-c)} = rs \cdot \frac{r^2 + 4rR}{r^2 s} = r + 4R.$$

Solution de l'exercice 4.5. Supposons l'angle C aigu (l'autre cas est analogue avec les angles orientés). Le triangle OAB est isocèle en O avec $\widehat{AOB} = 2C$ (angle au centre), donc $\widehat{OAB} = \frac{180^\circ - 2C}{2} = 90^\circ - C$. D'autre part, la hauteur issue de A coupe (BC) en un point D tel que le triangle ADC soit rectangle en D, d'où $\widehat{DAC} = 90^\circ - C$. Les deux angles sont égaux.

Remarque. Cette propriété fonde la théorie des conjugués isogonaux (chapitre 6) : O et H sont conjugués isogonaux l'un de l'autre.

Solution de l'exercice 4.6. La relation d'Euler donne $OI^2 = R^2 - 2Rr = R(R-2r)$. Comme $R > 0$ et $OI^2 \geq 0$, on obtient $R \geq 2r$. L'égalité a lieu si, et seulement si, $OI = 0$, c'est-à-dire $O = I$: les médiatrices coïncident alors avec les bissectrices, ce qui caractérise le triangle équilatéral.

Solution de l'exercice 4.7. D'après le lemme du trident, $MI_A = MB$ où M est le milieu de l'arc $\widehat{BC}$. Le point I_A est extérieur au cercle circonscrit, donc sa puissance est positive :

$$OI_A^2 - R^2 = I_A A \cdot I_A M = I_A A \cdot MB.$$

Or $I_A A = \frac{r_A}{\sin\frac{A}{2}}$ (triangle rectangle $AI_A Z_A$) et $MB = 2R\sin\frac{A}{2}$, d'où $OI_A^2 - R^2 = 2Rr_A$.

Solution de l'exercice 4.8. Écrivons $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$, d'où $MA^2 = MG^2 + 2\,\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA} + GA^2$. En sommant les trois relations analogues et en utilisant $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, le terme croisé disparaît :

$$\sum MA^2 = 3MG^2 + \sum GA^2.$$

Le second membre est minimal pour $MG = 0$, soit $M = G$, et vaut alors $\sum GA^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

4.8 Problèmes d'entraînement

Exercice 4.9 ★. Montrer que $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$, où h_a, h_b, h_c sont les hauteurs.

Indication : $h_a = \frac{2S}{a}$ et $r = \frac{S}{s}$.

Exercice 4.10 ★★ (Roumanie 2008). Soient D, E, F des points intérieurs aux côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ tels que $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}$. Montrer que si les centres des cercles circonscrits à DEF et ABC coïncident, alors ABC est équilatéral.

Indication : les points D, E, F sont sur un même cercle centré au centre commun O ; ils ont donc la même puissance par rapport au cercle circonscrit à ABC, d'où $DB \cdot DC = EC \cdot EA = FA \cdot FB$. En notant k le rapport commun, on a $DB \cdot DC = \frac{k\,a^2}{(1+k)^2}$, et de même pour les autres côtés : on obtient $a = b = c$.

Exercice 4.11 ★★. Démontrer que $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$ dans tout triangle.

Indication : utiliser $OH^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C) \geq 0$.

Exercice 4.12 ★★★ (IMO 1991, problème 1). Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Les bissectrices issues de A, B, C coupent les côtés opposés en A', B', C'. Montrer que

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}.$$

Indication : montrer d'abord $\frac{AI}{AA'} = \frac{b+c}{a+b+c}$ (théorème de la bissectrice dans le triangle ABA'), puis appliquer l'inégalité arithmético-géométrique.

À retenir — Bilan du chapitre

- $\frac{a}{\sin A} = 2R$: convertir toute longueur en sinus.
- $S = 1/2\, ab\sin C = \frac{abc}{4R} = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.
- Tangentes : $s-a$, $s-b$, $s-c$; contacts du cercle inscrit et du cercle exinscrit symétriques par rapport au milieu du côté.
- O, G, H alignés avec $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$; cercle d'Euler de centre le milieu de $[OH]$, de rayon $R/2$.
- $OI^2 = R^2 - 2Rr$, $OI_A^2 = R^2 + 2Rr_A$, $AH = 2R\,|\cos A|$.
- (AO) et (AH) sont isogonales ; M, milieu de l'arc, est le centre du cercle passant par B, I, C, I_A.

PARTIE II — Les classiques

CHAPITRE 5

5 Puissance d'un point, axe radical, centre radical

La puissance d'un point est l'outil qui relie les longueurs aux cercles. Elle doit être envisagée systématiquement, que l'énoncé la suggère ou non : dès que deux cercles apparaissent dans une figure, l'axe radical existe, et il est presque toujours utile.

5.1 Définition et propriétés

Définition 5.1.1 (Puissance d'un point)

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R, et P un point du plan. On appelle puissance de P par rapport à $\mathcal{C}$ le nombre réel $\mathrm{pow}(P,\mathcal{C}) = OP^2 - R^2$.

Théorème 5.1.2 (Puissance d'un point et sécantes)

Soit P un point et d une droite passant par P qui coupe $\mathcal{C}$ en A et B (confondus si d est tangente). Alors

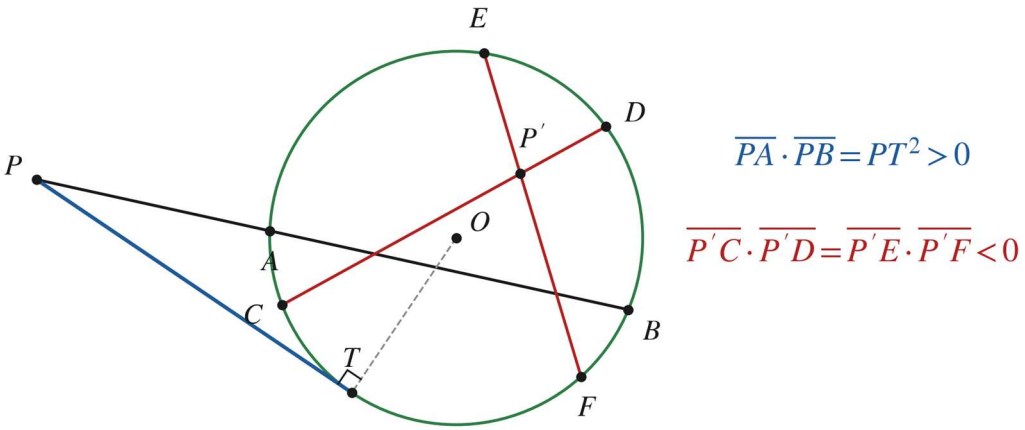
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \mathrm{pow}(P,\mathcal{C}) = OP^2 - R^2,$$

et ce produit ne dépend pas de la droite d. Si (PT) est tangente à $\mathcal{C}$ en T, alors $PT^2 = \mathrm{pow}(P,\mathcal{C})$.

Démonstration. Orientons d et notons M le projeté orthogonal de O sur d. Le triangle OMA est rectangle en M (ou dégénéré si $A = M$), donc $MA^2 = R^2 - OM^2 = MB^2$: M est le milieu de $[AB]$, et $\overline{MA} = -\overline{MB}$. Par la relation de Chasles,

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \left(\overline{PM}+\overline{MA}\right)\left(\overline{PM}+\overline{MB}\right) = \left(\overline{PM}-\overline{MB}\right)\left(\overline{PM}+\overline{MB}\right) = PM^2 - MB^2.$$

Or $PM^2 = OP^2 - OM^2$ (Pythagore dans le triangle OMP) et $MB^2 = R^2 - OM^2$, d'où $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = OP^2 - R^2$, qui ne dépend que de P et de $\mathcal{C}$. Si d est tangente en T, alors $A = B = T$ et $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = PT^2$. ■



Puissance d'un point : à l'extérieur (bleu) le produit est positif et égal au carré de la tangente ; à l'intérieur (rouge) il est négatif et le même pour toutes les cordes.

Proposition 5.1.3 (Signe de la puissance)

$\mathrm{pow}(P,\mathcal{C}) > 0$ si, et seulement si, P est extérieur à $\mathcal{C}$; $\mathrm{pow}(P,\mathcal{C}) = 0$ si, et seulement si, $P \in \mathcal{C}$; $\mathrm{pow}(P,\mathcal{C}) < 0$ si, et seulement si, P est intérieur à $\mathcal{C}$.

Démonstration. C'est la comparaison de OP et de R : $OP^2 - R^2$ a le signe de $OP - R$, puisque $OP + R > 0$. ■

Théorème 5.1.4 (Réciproque : cocyclicité et tangence)

Soient A, B, C, D quatre points et P un point, distinct de ces quatre points, tel que P, A, B sont alignés et P, C, D sont alignés, avec $(AB) \neq (CD)$. Alors

$$A, B, C, D \text{ cocycliques} \Leftrightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

De même, si $T \notin (AB)$, on a $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = PT^2$ si, et seulement si, (PT) est tangente en T au cercle $\odot(TAB)$.

Démonstration. *Sens direct.* Si les quatre points sont sur un cercle $\mathcal{C}$, les deux produits valent $\mathrm{pow}(P,\mathcal{C})$ par le théorème 5.1.2.

Sens réciproque. Les points A, B, C ne sont pas alignés (sinon $C \in (AB)$, donc $(CD) = (PC) = (AB)$). Soit $\mathcal{C} = \odot(ABC)$; la droite (PC) recoupe $\mathcal{C}$ en D' (avec $D' = C$ en cas de tangence). Par le théorème 5.1.2, $\overline{PC} \cdot \overline{PD'} = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$; comme $\overline{PC} \neq 0$, $\overline{PD'} = \overline{PD}$ et $D = D' \in \mathcal{C}$.

Tangence. Soit ω le centre et ρ le rayon de $\odot(TAB)$. D'après le théorème 5.1.2, $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = P\omega^2 - \rho^2 = P\omega^2 - \omega T^2$. L'égalité $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = PT^2$ équivaut donc à $P\omega^2 = PT^2 + T\omega^2$, c'est-à-dire (Pythagore et sa réciproque) à $(PT) \perp (T\omega)$, ce qui caractérise la tangente en T. ■

Méthode 5.1.5 — Reconnaître une puissance

Dès qu'apparaît, dans l'énoncé ou dans le calcul, un produit de deux longueurs issues d'un même point, il faut penser puissance :

- $XA \cdot XB = XC \cdot XD$ → cocyclicité ;
- $XA \cdot XB = XT^2$ → tangence ;
- $XA \cdot XB = XO^2 - R^2$ → calcul de distance ;
- $XA \cdot XB =$ constante → inversion (chapitre 10).

5.2 Axe radical

Théorème 5.2.1 (Axe radical)

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles non concentriques, de centres O_1, O_2 et de rayons R_1, R_2. L'ensemble $\Delta = \{P : \mathrm{pow}(P,\mathcal{C}_1) = \mathrm{pow}(P,\mathcal{C}_2)\}$ est une droite perpendiculaire à (O_1O_2), appelée axe radical de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Démonstration. Prenons un repère orthonormé d'origine O_1 dont l'axe des abscisses est (O_1O_2), de sorte que $O_2 = (e, 0)$ avec $e \neq 0$. Pour $P = (x, y)$, la condition s'écrit

$$x^2 + y^2 - R_1^2 = (x-e)^2 + y^2 - R_2^2 \Leftrightarrow 2ex = e^2 + R_1^2 - R_2^2 \Leftrightarrow x = \frac{e^2 + R_1^2 - R_2^2}{2e}.$$

C'est l'équation d'une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses, c'est-à-dire à (O_1O_2). ■

Proposition 5.2.2 (Position de l'axe radical)

a. Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en U et V, l'axe radical est la droite (UV).

b. S'ils sont tangents en T, l'axe radical est la tangente commune en T.

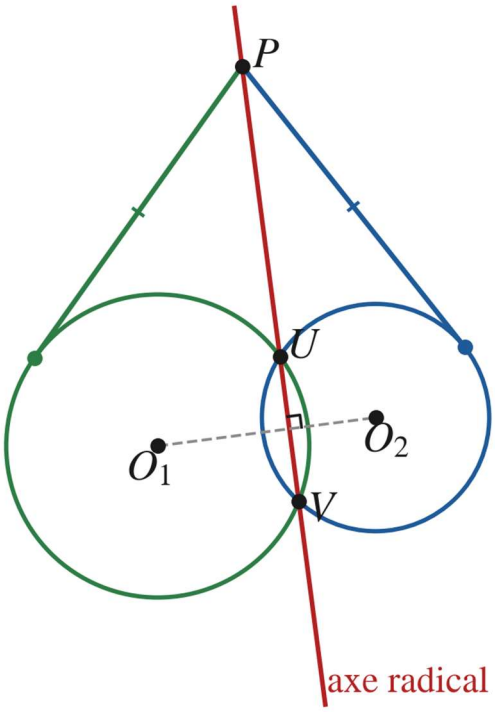
c. S'ils n'ont aucun point commun, l'axe radical est extérieur aux deux cercles. Dans tous les cas, les points de l'axe radical extérieurs aux deux cercles sont exactement ceux d'où les tangentes aux deux cercles ont la même longueur.

Démonstration.

a. Les points U et V ont une puissance nulle par rapport aux deux cercles : ils sont sur Δ, qui est donc la droite (UV).

b. Le point T est sur Δ ; la droite Δ passe par T et est perpendiculaire à (O_1O_2), qui contient T (les centres et le point de contact sont alignés) ; c'est la tangente commune en T.

c. Soit H le point d'intersection de Δ et de (O_1O_2). Pour $P \in \Delta$ à la distance t de H, $\mathrm{pow}(P, \mathcal{C}_1) = O_1H^2 + t^2 - R_1^2$ est minimale en $P = H$. Si cette valeur minimale était négative ou nulle, elle s'annulerait en un point Q de Δ (continuité, et limite $+\infty$ quand $t \to \infty$) ; ce point aurait une puissance nulle par rapport aux deux cercles et serait commun aux deux cercles : exclu. Donc tous les points de Δ ont une puissance strictement positive : ils sont extérieurs aux deux cercles. La dernière assertion vient de ce que, pour un point extérieur, la puissance est le carré de la longueur des tangentes (théorème 5.1.2). ■

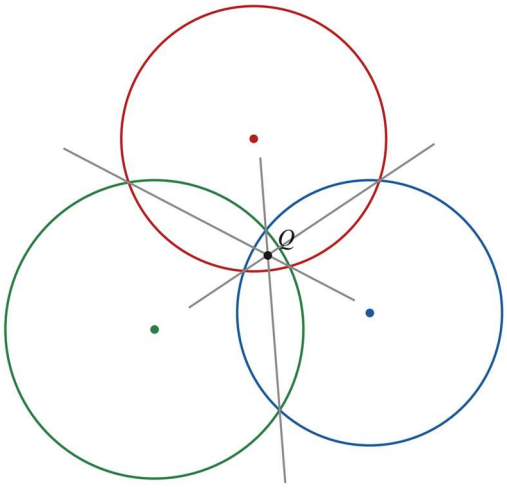


Axe radical de deux cercles sécants : c'est la droite (UV), perpendiculaire à (O_1O_2) ; d'un point P de cet axe, les deux tangentes ont la même longueur.

Théorème 5.2.3 (Centre radical)

Soient trois cercles de centres non alignés. Leurs trois axes radicaux pris deux à deux sont concourants en un point appelé centre radical, qui a la même puissance par rapport aux trois cercles. Si les centres sont alignés (et distincts), les trois axes radicaux sont parallèles ou confondus.

Démonstration. Les axes radicaux Δ_{12} et Δ_{23} sont perpendiculaires à (O_1O_2) et (O_2O_3), qui ne sont pas parallèles : ils se coupent en un point Q. Alors $\mathrm{pow}(Q,\mathcal{C}_1) = \mathrm{pow}(Q,\mathcal{C}_2)$ et $\mathrm{pow}(Q,\mathcal{C}_2) = \mathrm{pow}(Q,\mathcal{C}_3)$, donc $\mathrm{pow}(Q,\mathcal{C}_1) = \mathrm{pow}(Q,\mathcal{C}_3)$: Q est sur le troisième axe Δ_{13}. Si les centres sont alignés, les trois axes sont perpendiculaires à la même droite, donc parallèles ou confondus. ■



Les trois axes radicaux de trois cercles deux à deux sécants concourent au centre radical Q.

Méthode 5.2.4 — Trois usages de l'axe radical

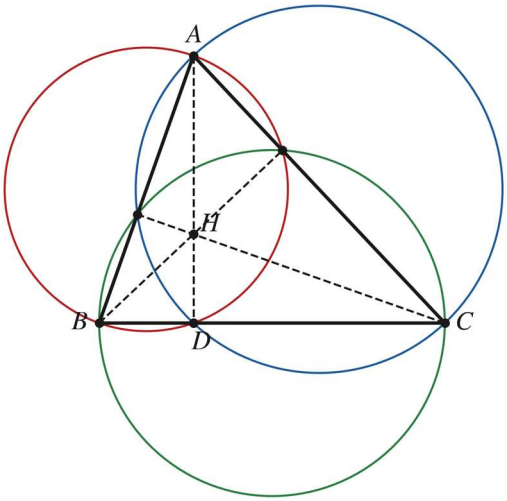
1. **Prouver une concourance.** Trois droites à faire concourir ? Chercher trois cercles dont elles sont les axes radicaux.
2. **Prouver un alignement.** Un point P vérifiant $\mathrm{pow}(P, \mathcal{C}_1) = \mathrm{pow}(P, \mathcal{C}_2)$ est sur l'axe radical, donc sur la droite joignant les deux points communs.
3. **Prouver une perpendicularité.** L'axe radical est toujours perpendiculaire à la ligne des centres.

5.3 Exemples résolus

Exemple 5.3.1 (Concourance des hauteurs par l'axe radical). *Redémontrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes, en utilisant le centre radical.*

Solution. Considérons les trois cercles de diamètres $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, notés $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b, \mathcal{C}_c$; leurs centres, les milieux des côtés, ne sont pas alignés. Soit D le pied de la hauteur issue de A ; alors $\widehat{BDA} = \widehat{CDA} = 90°$ (si $D \neq B, C$), donc D appartient à $\mathcal{C}_c$ (cercle de diamètre $[AB]$) et à $\mathcal{C}_b$ (cercle de diamètre $[AC]$). Comme A appartient aussi à $\mathcal{C}_b \cap \mathcal{C}_c$ et que $A \neq D$, l'axe radical de $\mathcal{C}_b$ et $\mathcal{C}_c$ est la droite (AD) (proposition 5.2.2), c'est-à-dire la hauteur issue de A. (Si l'angle en B ou en C est droit, l'orthocentre est ce sommet et il n'y a rien à démontrer ; on exclut ce cas.)

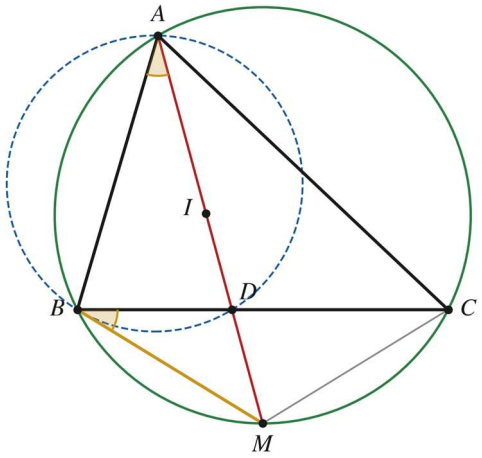
De même, les hauteurs issues de B et C sont les axes radicaux de $(\mathcal{C}_c, \mathcal{C}_a)$ et $(\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b)$. Les trois hauteurs sont donc concourantes au centre radical des trois cercles.



Exemple 5.3.1 : chaque hauteur est l'axe radical de deux des cercles construits sur les côtés.

Exemple 5.3.2 (Shooting lemma). *Soit ABC un triangle inscrit dans Γ, et M le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant pas A. Le segment $[MA]$ coupe $[BC]$ en D. Montrer que $MD \cdot MA = MB^2 = MI^2$, où I est le centre du cercle inscrit.*

Solution. Comme M est le milieu de l'arc, les angles inscrits $\widehat{MBC}$ et $\widehat{MAB}$ interceptent des arcs égaux : $\widehat{MBD} = \widehat{MBC} = \frac{\hat{A}}{2} = \widehat{MAB}$. Les triangles MBD et MAB ont l'angle en M en commun et $\widehat{MBD} = \widehat{MAB}$: ils sont semblables, d'où $\frac{MB}{MA} = \frac{MD}{MB}$, soit $MB^2 = MD \cdot MA$. (C'est aussi dire, par le théorème 5.1.4, que (MB) est tangente au cercle $\odot\,(ABD)$.) Comme $MI = MB$ (lemme du trident, démontré dans la preuve du théorème 4.3.4), on a aussi $MD \cdot MA = MI^2$.



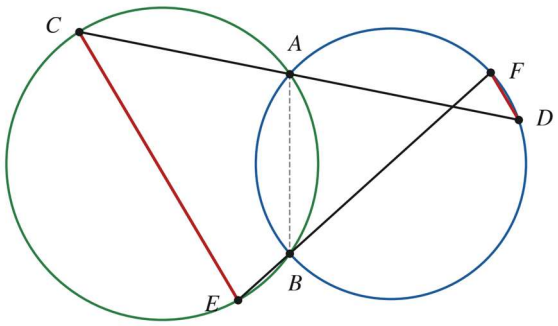
Shooting lemma : les angles marqués sont égaux, donc (MB) est tangente au cercle ABD (pointillé) et MB² = MD · MA.

À retenir

$MI^2 = MD \cdot MA$ signifie que (MI) est tangente au cercle $\odot\,(AID)$. Ce type de reformulation « produit = carré ⇒ tangence » est un réflexe à acquérir.

Exemple 5.3.3 (Un parallélisme par les angles orientés). *Deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en A et B. Une droite passant par A recoupe $\mathcal{C}_1$ en C et $\mathcal{C}_2$ en D ; une droite passant par B recoupe $\mathcal{C}_1$ en E et $\mathcal{C}_2$ en F. Montrer que $(CE) \parallel (DF)$.*

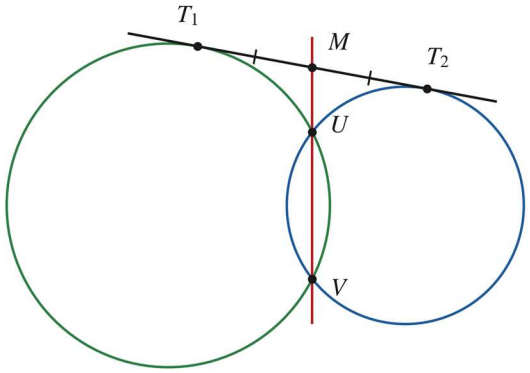
Solution. En angles orientés, $\measuredangle(CE, CA) = \measuredangle(BE, BA)$ (cocyclicité dans $\mathcal{C}_1$, théorème 2.3.1) et $\measuredangle(DF, DA) = \measuredangle(BF, BA)$ (cocyclicité dans $\mathcal{C}_2$). Comme B, E, F sont alignés, $\measuredangle(BE, BA) = \measuredangle(BF, BA)$, donc $\measuredangle(CE, CA) = \measuredangle(DF, DA)$. Or C, A, D sont alignés, donc $(CA) = (DA)$; par la relation de Chasles, $\measuredangle(CE, DF) = \measuredangle(CE, CA) - \measuredangle(DF, DA) = 0$, et les deux droites sont parallèles. La démonstration ne dépend pas de la position des points.



Exemple 5.3.3 : les droites (CE) et (DF) sont parallèles.

Exemple 5.3.4 (L'axe radical coupe une tangente commune en son milieu). *Deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en U et V. Une tangente commune touche $\mathcal{C}_1$ en T_1 et $\mathcal{C}_2$ en T_2. Montrer que la droite (UV) passe par le milieu de $[T_1T_2]$.*

Solution. Soit M le point d'intersection de (UV) et de (T_1T_2) (ces droites ne sont pas parallèles, sinon (T_1T_2) serait perpendiculaire à (O_1O_2) et ne pourrait être tangente aux deux cercles en des points distincts). Comme M est sur l'axe radical, $\mathrm{pow}(M, \mathcal{C}_1) = \mathrm{pow}(M, \mathcal{C}_2)$, soit $MT_1^2 = MT_2^2$ (théorème 5.1.2). Donc $MT_1 = MT_2$: le point M de la droite (T_1T_2) est équidistant des deux points distincts T_1 et T_2 de cette droite, c'est donc le milieu de $[T_1T_2]$.



Exemple 5.3.4 : l'axe radical (UV) coupe la tangente commune [T₁T₂] en son milieu M.

5.4 Exercices

Exercice 5.1 ★. Soit P un point extérieur à un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R, et (PT) une tangente. Montrer que $PT^2 = OP^2 - R^2$ et que le lieu des points P tels que $PT = \ell$ (constante) est un cercle de centre O.

Exercice 5.2 ★. Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ deux cercles tangents extérieurement en T, et (d) une tangente commune extérieure touchant $\mathcal{C}_1$ en U et $\mathcal{C}_2$ en V. Montrer que $\widehat{UTV} = 90°$.

Exercice 5.3 ★★. Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Montrer que $HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF$, où D, E, F sont les pieds des hauteurs, et interpréter ce nombre.

Exercice 5.4 ★★. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Les droites (AB) et (CD) se coupent en E, les droites (AD) et (BC) en F. Montrer que $EF^2 = \mathrm{pow}(E, \Gamma) + \mathrm{pow}(F, \Gamma)$, où Γ est le cercle circonscrit.

Exercice 5.5 ★★. Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ trois cercles deux à deux sécants. Montrer que leurs trois cordes communes sont concourantes ou parallèles.

Exercice 5.6 ★★★ (Cercle d'Euler et puissance). Soit ABC un triangle d'orthocentre H. Montrer que le cercle d'Euler est l'image du cercle circonscrit Γ par l'homothétie σ de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$, et en déduire que pour tout point P du plan,

$$\mathrm{pow}(P,\text{Euler}) = \frac{1}{4}\mathrm{pow}(\sigma^{-1}(P), \Gamma).$$

Exercice 5.7 ★★★ (IMO 1995, problème 1). Soient A, B, C, D quatre points alignés dans cet ordre. Les cercles de diamètres $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en X et Y. La droite (XY) coupe (BC) en Z. Soit P un point de (XY) distinct de Z. La droite (CP) recoupe le cercle de diamètre $[AC]$ en M, et (BP) recoupe le cercle de diamètre $[BD]$ en N. Montrer que (AM), (DN) et (XY) sont concourantes.

5.5 Corrigés

Solution de l'exercice 5.1. Le triangle OTP est rectangle en T (le rayon est perpendiculaire à la tangente au point de contact), donc $PT^2 = OP^2 - OT^2 = OP^2 - R^2$. La condition $PT = \ell$ équivaut à $OP^2 = R^2 + \ell^2$, c'est-à-dire $OP = \sqrt{R^2 + \ell^2}$: le lieu est le cercle de centre O et de ce rayon.

Solution de l'exercice 5.2. La tangente commune en T coupe (UV) en un point M. Comme (MU) et (MT) sont deux tangentes à $\mathcal{C}_1$ issues de M, on a $MU = MT$; de même $MV = MT$. Donc $MU = MV = MT$: le point T appartient au cercle de diamètre $[UV]$ (de centre M), d'où $\widehat{UTV} = 90°$.

Solution de l'exercice 5.3. Les points B, C, E, F sont sur le cercle de diamètre $[BC]$ (car $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90°$). Le point H est l'intersection de (BE) et (CF), donc sa puissance par rapport à ce cercle vaut $\overline{HB} \cdot \overline{HE} = \overline{HC} \cdot \overline{HF}$. Le même argument avec le cercle de diamètre $[AC]$ donne l'égalité restante.

Interprétons cette valeur commune $p = \overline{HA} \cdot \overline{HD}$. La droite (AH) recoupe le cercle d'Euler en D et au milieu A_1 de $[AH]$, donc $\mathrm{pow}(H,\text{Euler}) = \overline{HA_1} \cdot \overline{HD} = \frac{p}{2}$. Par ailleurs, $\mathrm{pow}(H, \Gamma) = OH^2 - R^2 = 4\mathrm{pow}(H,\text{Euler})$ par l'homothétie de centre H et de rapport $1/2$ de l'exercice 5.6. Ainsi

$$\overline{HA} \cdot \overline{HD} = \overline{HB} \cdot \overline{HE} = \overline{HC} \cdot \overline{HF} = 2\mathrm{pow}(H,\text{Euler}) = \frac{1}{2}\mathrm{pow}(H, \Gamma).$$

Solution de l'exercice 5.4. Notons G le second point d'intersection de $\odot(BCE)$ avec (EF). On a $\mathrm{pow}\big(F, \odot(BCE)\big) = \overline{FB} \cdot \overline{FC} = \mathrm{pow}(F, \Gamma)$ et aussi $\mathrm{pow}\big(F, \odot(BCE)\big) = \overline{FG} \cdot \overline{FE}$. De même, en introduisant $\odot(CDF)$ qui recoupe (EF) en G' : $\mathrm{pow}\big(E, \odot(CDF)\big) = \overline{EC} \cdot \overline{ED} = \mathrm{pow}(E, \Gamma) = \overline{EG'} \cdot \overline{EF}$. Une chasse aux angles montre que $G = G'$: c'est le point de Miquel de la configuration. Alors, en utilisant $\overline{EG} + \overline{GF} = \overline{EF}$:

$$\mathrm{pow}(E,\Gamma)+\mathrm{pow}(F,\Gamma)=\overline{EG}\cdot\overline{EF}+\overline{FG}\cdot\overline{FE}=\overline{EF}\big(\overline{EG}-\overline{FG}\big)=EF^2.$$

Solution de l'exercice 5.5. La corde commune de $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_j$ est exactement leur axe radical. Le théorème du centre radical conclut : si les centres ne sont pas alignés, les trois axes concourent ; s'ils le sont, les trois axes sont parallèles (éventuellement confondus).

Solution de l'exercice 5.6. Le cercle d'Euler $\mathcal{C}_9$ a pour centre N (milieu de $[OH]$) et pour rayon $R/2$. L'homothétie σ de centre H et de rapport $1/2$ envoie O sur N et divise les rayons par 2 : elle envoie donc Γ sur $\mathcal{C}_9$. Sa réciproque σ^{-1} est l'homothétie de centre H et de rapport 2 : elle multiplie toutes les distances par 2 et vérifie $\sigma^{-1}(N)=O$. Pour tout point P,

$$\mathrm{pow}(P,\mathcal{C}_9)=PN^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2=\frac{1}{4}[(2PN)^2-R^2]=\frac{1}{4}[\sigma^{-1}(P)O^2-R^2]=\frac{1}{4}\mathrm{pow}(\sigma^{-1}(P),\Gamma),$$

ce qui est la formule annoncée.

Solution de l'exercice 5.7. Munissons la droite $(ABCD)$ d'une coordonnée réelle : $A=a$, $B=b$, $C=c$, $D=d$ avec $a<b<c<d$, et notons (x,y) les coordonnées dans le plan, l'axe des x étant cette droite.

Étape 1 : formule de puissance. Pour le cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[AC]$, un calcul direct donne, pour tout point (x,y) :

$$\mathrm{pow}\big((x,y),\mathcal{C}_1\big)=(x-a)(x-c)+y^2,$$

et de même $\mathrm{pow}\big((x,y),\mathcal{C}_2\big)=(x-b)(x-d)+y^2$ pour le cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre $[BD]$. L'axe radical (XY) est donc la droite verticale $x=x_0$ où

$$x_0=\frac{bd-ac}{(b+d)-(a+c)}.$$

Étape 2 : une simplification décisive. Comme $[AC]$ est un diamètre de $\mathcal{C}_1$, $\widehat{AMC}=90°$, donc $AM\perp MC$; comme $M\in(CP)$, cela signifie que M est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur la droite (CP). De même, N est le pied de la perpendiculaire abaissée de D sur la droite (BP). Ainsi, la droite (AM) est *exactement* la perpendiculaire à (CP) passant par A, et (DN) est la perpendiculaire à (BP) passant par D.

Étape 3 : calcul de $Q=(AM)\cap(DN)$. Écrivons $P=(x_0,p)$. La droite (CP) a pour vecteur directeur $(x_0-c,\ p)$; la perpendiculaire (AM) issue de $A=(a,0)$ a donc pour paramétrage

$$(a,0)+t\,(p,\ c-x_0),\qquad t\in\mathbb{R}.$$

De même, (DN) a pour paramétrage $(d,0)+u\,(p,\ b-x_0)$, $u\in\mathbb{R}$. En égalant les ordonnées : $t(c-x_0)=u(b-x_0)$, d'où $u=t(c-x_0)/(b-x_0)$. En égalant les abscisses :

$$a+tp=d+up=d+\frac{t(c-x_0)}{b-x_0}\,p\Longrightarrow t=\frac{(a-d)(b-x_0)}{p(c-b)}.$$

L'abscisse de Q vaut donc

$$Q_x=a+tp=a+\frac{(a-d)(b-x_0)}{c-b}.$$

Étape 4 : vérification $Q_x=x_0$. Il s'agit de vérifier $(a-x_0)(c-b)=(d-a)(b-x_0)$. En substituant $x_0=\frac{bd-a}{S}$ avec $S=b+d-a-c$, un calcul direct donne

$$(a-x_0)(c-b)=\frac{(b-a)(a-d)(c-b)}{S},\qquad (d-a)(b-x_0)=\frac{(d-a)(b-a)(b-c)}{S},$$

et ces deux quantités sont égales, car $(a-d)(c-b) = (d-a)(b-c)$. Donc $Q_x = x_0$: le point Q appartient à la droite $x = x_0$, c'est-à-dire à l'axe radical (XY). Les trois droites (AM), (DN) et (XY) sont donc concourantes en Q.

À retenir

La clé de ce problème difficile est la simplification synthétique de l'étape 2 : reconnaître que M et N sont de simples pieds de perpendiculaires transforme un problème de cocyclicités enchevêtrées en un calcul de coordonnées maîtrisable. Une fois cette réduction faite, le calcul est mécanique — et c'est précisément le genre de réduction qu'il faut chercher avant de se lancer dans un calcul.

5.6 Problèmes d'entraînement

Exercice 5.8 ★★ (Thaïlande 2007). Soit P un point extérieur à un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, et (PA), (PB) les deux tangentes. Soient M et N les milieux de $[AP]$ et $[AB]$. La droite (MN) coupe $\mathcal{C}$ en C, (PC) recoupe $\mathcal{C}$ en D, et (ND) coupe (PB) en Q. Montrer que $MNQP$ est un losange.

Indication : M est le centre de $\odot(ANP)$; en notant E le second point d'intersection de (MN) avec $\mathcal{C}$, utiliser $PM^2 = MA^2 = ME \cdot MC$.

Exercice 5.9 ★★. Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ deux cercles disjoints. Construire à la règle et au compas leur axe radical.

Indication : tracer un cercle auxiliaire coupant les deux.

Exercice 5.10 ★★★ (Shortlist IMO 2011). Soit $A_1A_2A_3A_4$ un quadrilatère non cyclique. Pour $1 \leq i \leq 4$, on note O_i et r_i le centre et le rayon du cercle circonscrit à $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ (indices modulo 4). Montrer que

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{O_iA_i^2 - r_i^2} = 0.$$

Indication : c'est une somme d'inverses de puissances ; les coordonnées barycentriques (chapitre 9) donnent une preuve directe.

Exercice 5.11 ★★. Soit ABC un triangle et ω son cercle inscrit, touchant $[BC]$ en X. Soit X' le point diamétralement opposé à X dans ω. Montrer que A, X' et le point de contact du cercle exinscrit sur $[BC]$ sont alignés.

Indication : homothétie de centre A envoyant ω sur le cercle exinscrit.

À retenir — Bilan du chapitre

- $\mathrm{pow}(P, \mathcal{C}) = OP^2 - R^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = PT^2$.
- Un produit = un produit ⇒ cocyclicité ; un produit = un carré ⇒ tangence.
- Axe radical : droite perpendiculaire à la ligne des centres ; corde commune si les cercles se coupent.
- Centre radical : l'outil n° 1 pour prouver une concourance de trois droites.

CHAPITRE 6

6 Céviennes : théorèmes de Ceva et de Ménélaüs

Deux théorèmes, deux questions. « Trois droites sont-elles concourantes ? » → Ceva. « Trois points sont-ils alignés ? » → Ménélaüs. Ce sont les deux réflexes multiplicatifs de la géométrie du triangle : on transforme une configuration en un produit de trois rapports, et le problème devient un calcul.

6.1 Rapports orientés et céviennes

Définition 6.1.1 (Cévienne)

Une cévienne d'un triangle ABC est une droite passant par un sommet et coupant la droite support du côté opposé. On note habituellement $D \in (BC)$, $E \in (CA)$, $F \in (AB)$ les pieds des céviennes issues de A, B, C.

Tous les rapports écrits dans ce chapitre sont des rapports algébriques : si X, Y, Z sont alignés, $\frac{\overline{XY}}{\overline{XZ}}$ est positif si $\overrightarrow{XY}$ et $\overrightarrow{XZ}$ sont de même sens, négatif sinon. Cette convention est ce qui rend les énoncés valables sans discussion de figure. Rappelons (proposition 1.2.3) qu'un point D de (BC), distinct de C, est entièrement déterminé par le rapport $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$: c'est l'argument d'unicité qui sert dans toutes les réciproques.

Nous utiliserons aussi l'**aire algébrique** $[XYZ]$, positive si le triangle XYZ est direct et négative sinon. Deux faits élémentaires suffisent :

- si $D \in (BC)$ et $P \notin (BC)$, alors $\frac{[PBD]}{[PDC]} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$ (même hauteur issue de P, bases orientées sur la même droite) ;
- l'aire algébrique est additive : $[PBD] + [PDC] = [PBC]$ pour $D \in (BC)$.

6.2 Le théorème de Ceva

Théorème 6.2.1 (Théorème de Ceva)

Soient ABC un triangle et $D \in (BC)$, $E \in (CA)$, $F \in (AB)$ trois points distincts des sommets. Les droites (AD), (BE), (CF) sont concourantes ou parallèles si, et seulement si,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$

Démonstration. *Sens direct, cas concourant.* Supposons que les trois céviennes se coupent en un point P, qui n'est sur aucun côté (sinon il serait un sommet, car par exemple $P \in (BC) \cap (AD) = \{D\}$ et $P \in (BE)$ imposeraient $D \in (BE) \cap (BC) = \{B\}$). Les points A, P, D étant alignés, les triangles ABD et PBD ont des hauteurs issues de A et de P proportionnelles, de même que ADC et PDC ; plus simplement, par les deux faits rappelés en 6.1 :

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{[ABD]}{[ADC]} = \frac{[PBD]}{[PDC]} = \frac{[ABD] - [PBD]}{[ADC] - [PDC]} = \frac{[ABP]}{[APC]},$$

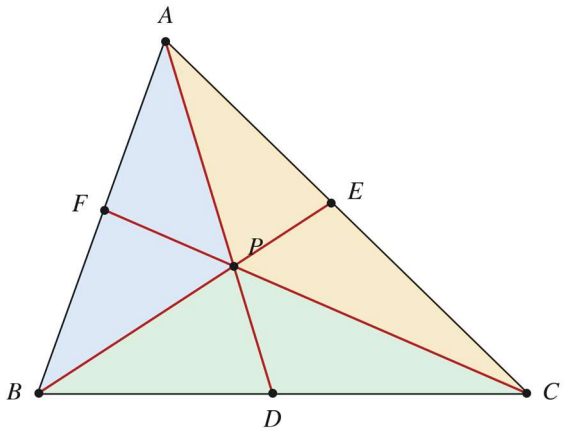
en utilisant la propriété des proportions $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} = \frac{x-x'}{y-y'}$ (lorsque $y \neq y'$) et l'additivité : $[ABD] - [PBD] = [ABP]$ et $[ADC] - [PDC] = [APC]$, car $P \in (AD)$. De même $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{[BCP]}{[BPA]} = \frac{[BCP]}{[ABP]}$ et $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{[CAP]}{[CPB]} = \frac{[APC]}{[BCP]}$. Le produit des trois quotients vaut 1 par télescopage.

Sens direct, cas parallèle. Si $(AD) \parallel (BE) \parallel (CF)$, considérons la projection sur (BC) parallèlement à cette direction commune ; elle conserve les rapports algébriques de points alignés (théorème de Thalès). Elle envoie A sur D, E sur B, F sur C, et fixe B et C. Sur la droite (CA), les points C, E, A ont pour images C, B, D, donc $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}}$; sur la droite (AB), les points A, F, B ont pour images D, C, B, donc $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CB}}$. Le produit vaut $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{CB}} = 1$.

Réciproque. Supposons le produit égal à 1. Notons d'abord qu'aucun rapport $\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}$ ne vaut -1 (cela signifierait $\overrightarrow{BX} = \overrightarrow{CX}$, soit $B = C$).

- Si $(BE) \parallel (CF)$, la parallèle à ces droites menée par A n'est pas parallèle à (BC) (car (BE) ne l'est pas, E n'étant pas sur (BC)) ; elle coupe (BC) en D'. Par le cas parallèle, D' réalise le même rapport que D ; par la proposition 1.2.3, $D = D'$ et les trois droites sont parallèles.
- Sinon, soit $P = (BE) \cap (CF)$; on a $P \neq A$ (sinon E, qui est sur (BA) et sur (CA), serait égal à A). Les calculs du sens direct, qui n'utilisent que $P \in (BE)$ et $P \in (CF)$, donnent $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{[APC]}{[ABP]}$. Si (AP) était parallèle à (BC), les points B et C seraient à la même distance algébrique de (AP), d'où $[APC] = -[ABP]$; l'hypothèse imposerait alors $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = -1$, ce qui est impossible. Donc (AP) coupe (BC) en un point D', et par le sens direct $\frac{\overline{BD}}{\overline{D'C}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$. En comparant, $\frac{\overline{BD}}{\overline{D'C}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$, et la proposition 1.2.3 donne $D = D'$: les trois céviennes concourent en P.

■



Théorème de Ceva : les rapports se lisent sur les aires des trois triangles PAB, PBC, PCA.

Exemple 6.2.2 (Les trois concourances classiques).

- **Médianes** : les trois rapports valent 1, produit $= 1$: les médianes concourent (au centre de gravité G).
- **Bissectrices intérieures** : par le théorème 4.3.1, $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$, $\frac{CE}{EA} = \frac{a}{c}$, $\frac{AF}{FB} = \frac{b}{a}$, les trois rapports étant positifs ; produit $= 1$: elles concourent en I.

- **Hauteurs** (triangle acutangle) : si D est le pied de la hauteur issue de A, les triangles rectangles ABD et ACD donnent $BD = c\cos B$ et $DC = b\cos C$. Donc $\frac{BD}{DC} = \frac{c\cos B}{b\cos C}$, et de même $\frac{CE}{EA} = \frac{a\cos C}{c\cos}$, $\frac{AF}{FB} = \frac{b\cos A}{a\cos B}$; le produit vaut 1 : les hauteurs concourent en H. (Pour un triangle obtusangle, deux des rapports deviennent négatifs et le produit vaut encore 1.)

Proposition 6.2.3 (Points de Gergonne et de Nagel)

Soit ABC un triangle de demi-périmètre s.

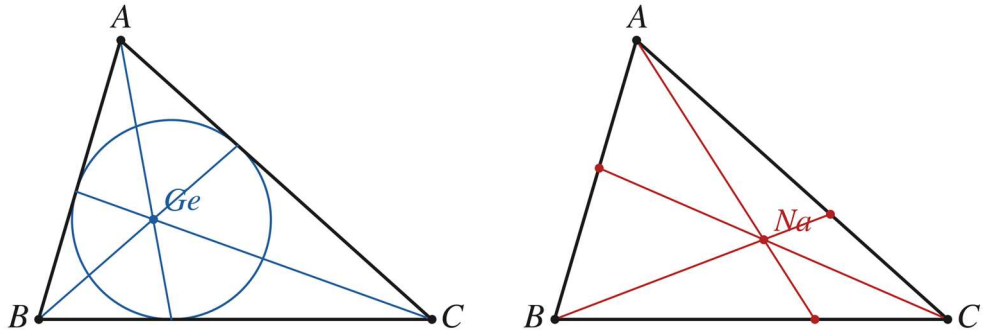
(a) Les droites joignant chaque sommet au point de contact du cercle inscrit sur le côté opposé concourent : c'est le point de Gergonne Ge.

(b) Les droites joignant chaque sommet au point de contact, sur le côté opposé, du cercle exinscrit correspondant concourent : c'est le point de Nagel Na.

Démonstration.

(a) Par le théorème 4.3.2, les points de contact sont intérieurs aux côtés et $BD = s - b$, $DC = s - c$, $CE = s - c$, $EA = s - a$, $AF = s - a$, $FB = s - b$. Le produit de Ceva vaut $\frac{s-b}{s-c} \cdot \frac{s-c}{s-a} \cdot \frac{s-a}{s-b} = 1$.

(b) Cette fois, toujours par le théorème 4.3.2, $BD = s - c$ et $DC = s - b$ (et de même pour les autres côtés), et le produit vaut $\frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} \cdot \frac{s-b}{s-a} = 1$. Dans les deux cas les pieds sont intérieurs aux côtés, les céviennes ne peuvent pas être parallèles (deux céviennes intérieures se coupent à l'intérieur du triangle), et Ceva donne la concourance. ■



Point de Gergonne (céviennes vers les contacts du cercle inscrit) et point de Nagel (vers les contacts des cercles exinscrits).

6.3 Le théorème de Ménélaüs

Théorème 6.3.1 (Théorème de Ménélaüs)

Soient ABC un triangle et $D \in (BC)$, $E \in (CA)$, $F \in (AB)$ trois points distincts des sommets. Alors D, E, F sont alignés si, et seulement si,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1.$$

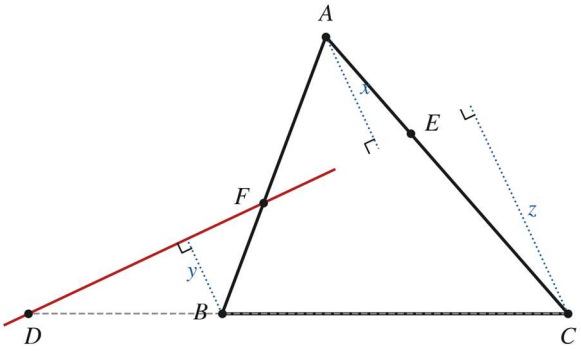
Démonstration. *Sens direct.* Soit (d) la droite portant D, E, F ; elle ne passe par aucun sommet. Munissons le plan d'un vecteur $\vec{n}$ normal à (d), et notons x, y, z les distances algébriques de A, B, C

à (d) (mesurées selon $\vec{n}$) ; elles sont non nulles. L'homothétie de centre D qui envoie C sur B a pour rapport $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$; elle conserve (d) et multiplie les distances algébriques à (d) par ce rapport. Donc $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{y}{z}$, soit $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = -\frac{y}{z}$. De même,

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -\frac{z}{x}, \qquad \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -\frac{x}{y},$$

et le produit vaut $(-1)^3 \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} \cdot \frac{x}{y} = -1$.

Réciproque. Supposons le produit égal à -1. Si (EF) était parallèle à (BC), le théorème de Thalès (homothétie de centre A) donnerait $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{FA}}$, donc $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$ et $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = -1$, ce qui est impossible (voir la preuve de Ceva). La droite (EF) coupe donc (BC) en un point D', distinct de B et C (sinon E ou F serait un sommet). Par le sens direct, $\frac{\overline{BD}}{\overline{D'C}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1$; donc $\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$, puis $D = D'$ par la proposition 1.2.3 : D, E, F sont alignés. ■



Démonstration de Ménélaüs : les rapports se lisent sur les distances x, y, z des sommets à la droite (DEF).

À retenir — Le signe est l'information

Ceva donne $+1$, Ménélaüs donne -1. Si l'on travaille avec des longueurs non signées, les deux énoncés deviennent identiques et l'on perd toute l'information : on ne peut pas conclure. La règle pratique : une droite ne passant par aucun sommet coupe soit 0, soit 2 des trois côtés d'un triangle intérieurement ; trois céviennes concourantes coupent soit 3, soit 1 côté intérieurement.

Exemple 6.3.2 (OIM 1982, problème 5). Dans un hexagone régulier $ABCDEF$, les diagonales $[AC]$ et $[CE]$ sont partagées par des points intérieurs M et N tels que $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = \lambda$. Déterminer λ sachant que B, M, N sont alignés.

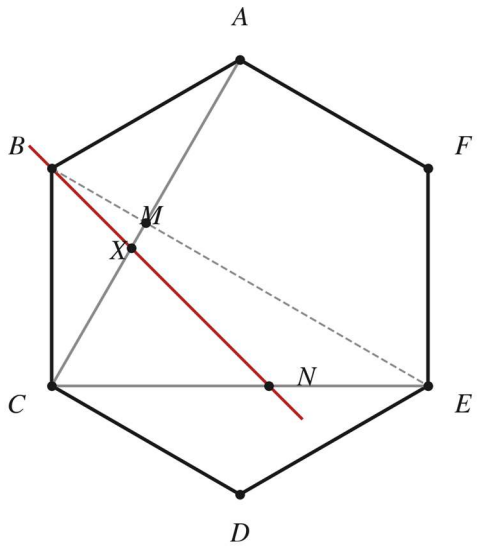
Solution. Posons le côté égal à 1, de sorte que $AC = CE = \sqrt{3}$ et $BE = 2$ (diagonale passant par le centre). Soit $X = (AC) \cap (BE)$: par symétrie par rapport à (BE), X est le milieu de $[AC]$, et $BX = \frac{1}{2}$ (le triangle ABC est isocèle en B d'angle au sommet $120°$, donc $BX = AB\cos 60°$). Le point M est entre X et C (on vérifie a posteriori que $\lambda > 1/2$; si $\lambda \le 1/2$, M serait sur $[AX]$ et la droite (BM) ne rencontrerait pas $[CE]$ en un point intérieur). Appliquons Ménélaüs (en longueurs, la droite coupant intérieurement $[CX]$ et $[CE]$ et extérieurement $[XE]$) au triangle CXE et à la droite (BMN) :

$$\frac{CN}{NE} \cdot \frac{EB}{BX} \cdot \frac{XM}{MC} = 1.$$

Or $CN = \sqrt{3}\,\lambda$, $NE = \sqrt{3}(1-\lambda)$, $EB = 2$, $BX = \frac{1}{2}$, $MC = \sqrt{3}(1-\lambda)$ et $XM = \sqrt{3}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$. En substituant :

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} \cdot 4 \cdot \frac{\lambda - \frac{1}{2}}{1-\lambda} = 1 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 2\lambda = 1 - 2\lambda + \lambda^2 \Leftrightarrow 3\lambda^2 = 1,$$

d'où $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$, qui est bien dans $]1/2\,,1[$.



OIM 1982, problème 5 : B, M, N sont alignés pour λ = 1/√3.

6.4 Les formes trigonométriques

Théorème 6.4.1 (Théorème de Ceva, forme trigonométrique)

Soient D, E, F des points intérieurs aux côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ d'un triangle ABC. Les céviennes (AD), (BE), (CF) sont concourantes si, et seulement si,

$$\frac{\sin\widehat{BAD}}{\sin\widehat{DAC}} \cdot \frac{\sin\widehat{CBE}}{\sin\widehat{EBA}} \cdot \frac{\sin\widehat{ACF}}{\sin\widehat{FCB}} = 1.$$

Démonstration. Dans les triangles ABD et ADC, la loi des sinus donne $\frac{BD}{\sin\widehat{BAD}} = \frac{AD}{\sin B}$ et $\frac{DC}{\sin\widehat{DAC}} = \frac{AD}{\sin C}$, d'où

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\sin\widehat{BAD}}{\sin\widehat{DAC}} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin\widehat{BAD}}{\sin\widehat{DAC}} \cdot \frac{c}{b}. \qquad (*)$$

En multipliant les trois relations analogues, les facteurs $\frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a}$ se simplifient : le produit trigonométrique est égal au produit de Ceva (les rapports algébriques sont ici positifs, les pieds étant intérieurs). Par le théorème 6.2.1, il vaut 1 si, et seulement si, les céviennes sont concourantes ou parallèles ; or deux céviennes dont les pieds sont intérieurs aux côtés se coupent à l'intérieur du triangle, donc elles ne sont pas parallèles. ■

Version générale.

En remplaçant les angles non orientés par des angles orientés de droites, par exemple $\sin\measuredangle(AB, AD)$, et les rapports par des rapports algébriques, la même démonstration fournit une version valable pour des céviennes quelconques. Nous n'utiliserons dans ce livre que la version ci-dessus.

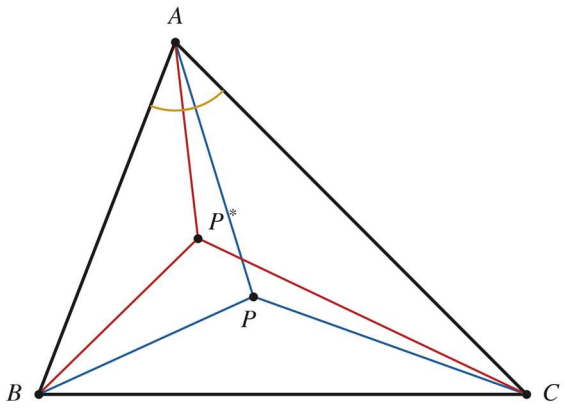
Méthode 6.4.2 — Quand utiliser la version trigonométrique

La version trigonométrique est la bonne arme lorsque les céviennes sont définies par des angles (bissectrices, isogonales, tangentes, symédianes, réflexions) plutôt que par des rapports de longueurs. Elle est aussi la plus commode quand les pieds des céviennes sortent des côtés, dans sa version orientée.

Définition 6.4.3 (Isogonales, conjugué isogonal)

Deux céviennes issues de A sont isogonales si elles sont symétriques par rapport à la bissectrice de $\hat{A}$. Si P est un point intérieur au triangle, les isogonales de (AP), (BP), (CP) sont concourantes : leur point commun P^* est le conjugué isogonal de P.

Justification de l'existence du conjugué isogonal. Si (AD') est l'isogonale de (AD), alors $\widehat{BAD'} = \widehat{DAC}$ et $\widehat{D'AC} = \widehat{BAD}$; comme P est intérieur, D' est encore intérieur à $[BC]$. Chaque facteur du produit de Ceva trigonométrique est remplacé par son inverse. Le produit vaut donc encore 1 (théorème 6.4.1, sens direct appliqué aux céviennes concourantes en P), et la réciproque du théorème 6.4.1 conclut. Plus généralement, pour P hors des côtés, les trois isogonales sont concourantes ou parallèles (version orientée), le cas parallèle se produisant exactement lorsque P est sur le cercle circonscrit. ■

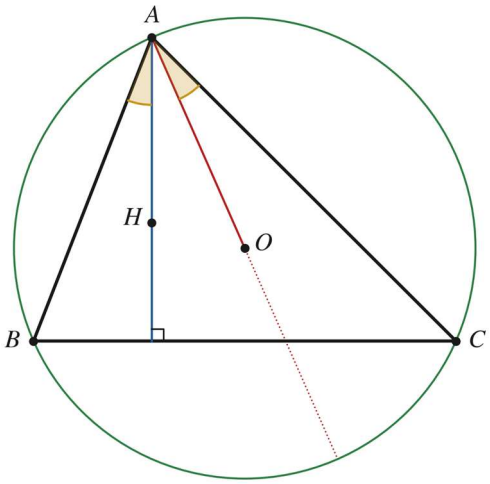


Les céviennes AP, BP, CP (bleu) et leurs isogonales (rouge), concourantes en P.*

Proposition 6.4.4 (Conjugués isogonaux classiques)

Dans un triangle acutangle, O et H sont conjugués isogonaux ; I est son propre conjugué isogonal ; le conjugué isogonal du centre de gravité G est le point de Lemoine K, point de concours des symédianes (isogonales des médianes).

Démonstration. Le triangle étant acutangle, O et H sont intérieurs. Soit D le pied de la hauteur issue de A ; dans le triangle ABD rectangle en D, $\widehat{BAH} = \widehat{BAD} = 90° - B$. Le triangle OAC est isocèle en O, d'angle au centre $\widehat{AOC} = 2B$ (théorème 2.2.1), donc $\widehat{OAC} = 90° - B$. Ainsi $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$: les droites (AH) et (AO) sont isogonales. Il en est de même en B et en C, donc $H^* = O$. Les bissectrices sont leurs propres isogonales, donc $I^* = I$. Enfin $K = G^*$ est la définition du point de Lemoine. ■



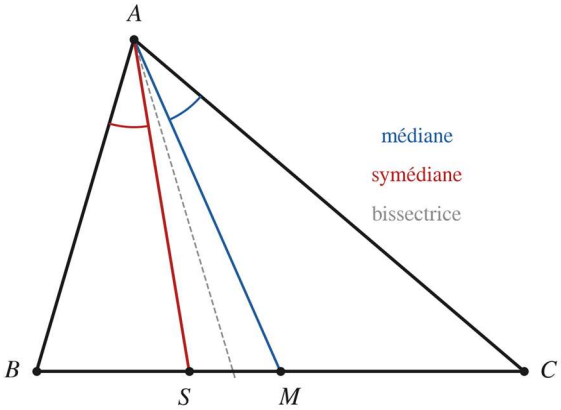
Les droites (AH) et (AO) font le même angle 90° − B avec les côtés (AB) et (AC) : elles sont isogonales.

6.5 Exemples résolus

Exemple 6.5.1 (Concourance des symédianes). Montrer que les trois symédianes d'un triangle sont concourantes, et que la symédiane issue de A coupe $[BC]$ en un point S tel que $\frac{BS}{SC} = \frac{c^2}{b^2}$.

Solution. La concourance est immédiate : les symédianes sont les isogonales des médianes, qui concourent en G, point intérieur ; leur point commun est $G^* = K$.

Pour le rapport, notons M le milieu de $[BC]$ et S le pied de la symédiane. La relation $(*)$ de la preuve du théorème 6.4.1 donne, pour une cévienne (AX) quelconque avec $X \in]BC[$, $\frac{BX}{XC} = \frac{\sin\widehat{BAX}}{\sin\widehat{XAC}} \cdot \frac{c}{b}$. Pour la médiane, $\frac{BM}{MC} = 1$ donne $\frac{\sin\widehat{BAM}}{\sin\widehat{MAC}} = \frac{b}{c}$. Pour la symédiane, les deux angles sont échangés, donc $\frac{\sin\widehat{BAS}}{\sin\widehat{SAC}} = \frac{c}{b}$ et $\frac{BS}{SC} = \frac{c}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{c^2}{b^2}$.



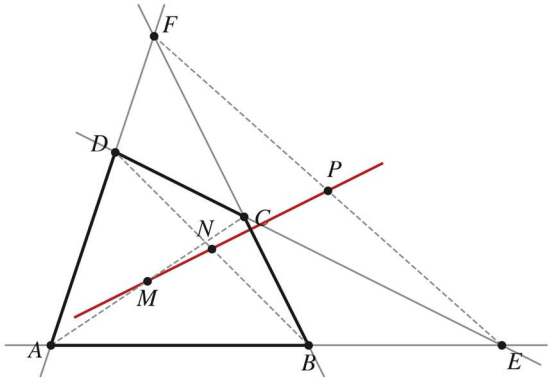
La symédiane (rouge) est la symétrique de la médiane (bleu) par rapport à la bissectrice (pointillés) ; elle partage [BC] dans le rapport c²/b².

Exemple 6.5.2 (Droite de Newton–Gauss). Soit $ABCD$ un quadrilatère complet : les droites (AB) et (CD) se coupent en E, les droites (AD) et (BC) en F. Montrer que les milieux de $[AC]$, $[BD]$, $[EF]$ sont alignés.

Solution. Soient M, N, P les milieux de $[AC]$, $[BD]$, $[EF]$ et soit XYZ le triangle médian du triangle EBC (X, Y, Z milieux de $[BC]$, $[CE]$, $[EB]$). L'homothétie de centre C et de rapport $1/2$ envoie B, E, A sur X, Y, M ; celle de centre B envoie E, C, D sur Z, X, N ; celle de centre E envoie B, C, F sur Z, Y, P. Comme $A \in (BE)$, $D \in (EC)$ et $F \in (BC)$, les points M, N, P appartiennent respectivement aux droites (XY), (ZX), (YZ), et d'après Ménélaüs appliqué au triangle XYZ, il suffit de vérifier

$$\frac{\overline{XM}}{\overline{MY}} \cdot \frac{\overline{YP}}{\overline{PZ}} \cdot \frac{\overline{ZN}}{\overline{NX}} = -1.$$

Or, les homothéties conservant les rapports algébriques, $\frac{\overline{XM}}{\overline{MY}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AE}}$, $\frac{\overline{YP}}{\overline{PZ}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{FB}}$ et $\frac{\overline{ZN}}{\overline{NX}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{DC}}$. Le produit de ces trois rapports est l'inverse du produit $\frac{\overline{EA}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}$, qui vaut -1 par Ménélaüs appliqué au triangle EBC et à la droite (ADF). Il vaut donc -1 lui aussi.



Droite de Newton–Gauss : les milieux M, N, P des diagonales [AC], [BD], [EF] du quadrilatère complet sont alignés.

6.6 Exercices

Exercice 6.1 ★. Dans un triangle ABC, $D \in [BC]$ vérifie $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$ et $E \in [CA]$ vérifie $\frac{CE}{EA} = \frac{1}{3}$. La droite (AD) coupe (BE) en P. Calculer $\frac{AP}{PD}$.

Exercice 6.2 ★★ (classique). Soient ABC un triangle et ω son cercle inscrit, touchant $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ en X, Y, Z. Montrer que (AX), (BY), (CZ) concourent, puis que la droite (YZ) coupe (BC) en un point T vérifiant $\frac{\overline{TB}}{\overline{TC}} = -\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}$, autrement dit $(B, C; X, T) = -1$: la division est harmonique.

Exercice 6.3 ★★ (Van Aubel). Soient (AD), (BE), (CF) trois céviennes concourantes en un point P intérieur au triangle ABC. Montrer que $\frac{AP}{PD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}$.

Exercice 6.4 ★★. Soient ABC un triangle et P un point intérieur. Les droites (AP), (BP), (CP) coupent les côtés en D, E, F. Montrer que $\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} = 1$.

Exercice 6.5 ★★★ (Ceva trigonométrique, théorème de Jacobi). Soit ABC un triangle. On construit extérieurement trois triangles BCX, CAY, ABZ tels que $\widehat{ZAB} = \widehat{YAC} = \alpha$, $\widehat{XBC} = \widehat{ZBA} = \beta$ et $\widehat{YCA} = \widehat{XCB} = \gamma$. Montrer que (AX), (BY), (CZ) concourent.

6.7 Corrigés

Solution de l'exercice 6.1. Appliquons Ménélaüs au triangle ADC coupé par la droite (BPE) :

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -1.$$

Avec $\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} = -\frac{1}{3}$ (car $\overline{DB} = -\frac{1}{3}\overline{BC}$ en orientant $B \to C$, puisque $BD = \frac{1}{3}BC$) et $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{1}{3}$, il vient $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = -1$, donc $\frac{AP}{PD} = 9$.

Solution de l'exercice 6.2. La première partie est la proposition 6.2.3 sur le point de Gergonne : avec $BX = s-b, XC = s-c, CY = s-c, YA = s-a, AZ = s-a, ZB = s-b$, le produit de Ceva vaut 1.

Pour la seconde, Ménélaüs dans ABC avec la sécante (YZT) donne $\frac{\overline{BT}}{\overline{TC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = -1$, soit $\frac{\overline{BT}}{\overline{TC}} \cdot \frac{s-c}{s-a} \cdot \frac{s-a}{s-b} = -1$, d'où $\frac{\overline{BT}}{\overline{TC}} = -\frac{s-b}{s-c} = -\frac{XB}{XC}$. C'est la définition d'une division harmonique : $(B, C; X, T) = -1$.

> **Remarque.**
> Cette configuration, capitale, est reprise et exploitée au chapitre 11.

Solution de l'exercice 6.3. Avec les aires : $\frac{AP}{PD} = \frac{[APB]+[APC]}{[BPC]}$ (même raisonnement que dans la preuve de Ceva). Or $\frac{AF}{FB} = \frac{[APC]}{[BPC]}$ et $\frac{AE}{EC} = \frac{[APB]}{[BPC]}$. La somme donne le résultat.

Solution de l'exercice 6.4. $\frac{PD}{AD} = \frac{[BPC]}{[ABC]}$ (les deux triangles BPC et ABC ont la base $[BC]$ commune et des hauteurs proportionnelles à PD et AD). En sommant les trois égalités analogues, on obtient $\frac{[BPC]+[CPA]+[APB]}{[ABC]} = 1$.

Solution de l'exercice 6.5. Notons $\widehat{BAX} = u$ et $\widehat{XAC} = u'$. La loi des sinus dans les triangles ABX et ACX donne $\frac{BX}{\sin u} = \frac{AX}{\sin\widehat{ABX}}$ et $\frac{CX}{\sin u'} = \frac{AX}{\sin\widehat{ACX}}$, avec $\widehat{ABX} = B + \beta$ et $\widehat{ACX} = C + \gamma$; et dans le triangle BCX, $\frac{BX}{CX} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$. Ainsi

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{BX}{CX} \cdot \frac{\sin(B+\beta)}{\sin(C+\gamma)} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin(B+\beta)}{\sin(C+\gamma)}.$$

De même, $\frac{\sin\widehat{CBY}}{\sin\widehat{YBA}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin(C+\gamma)}{\sin(A+\alpha)}$ et $\frac{\sin\widehat{ACZ}}{\sin\widehat{ZCB}} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin(A+\alpha)}{\sin(B+\beta)}$. Dans le produit des trois rapports, tous les facteurs se compensent deux à deux : le produit de Ceva trigonométrique vaut 1, et les trois droites concourent.

> **Remarque.**
> C'est le théorème de Jacobi. Lorsque $\alpha = \beta = \gamma = \theta$, les triangles construits sont isocèles et semblables : on obtient le théorème de Kiepert. Cas particuliers : $\theta = \frac{\pi}{3}$ (triangles équilatéraux) donne le point de Fermat, $\theta = \frac{\pi}{4}$ (centres des carrés construits sur les côtés) donne le point de Vecten.

6.8 Problèmes d'entraînement

Exercice 6.6 ★★. Soient ABC un triangle, M le milieu de $[BC]$ et P un point de $[AM]$. Les droites (BP) et (CP) recoupent (AC) et (AB) en E et F. Montrer que $(EF) \parallel (BC)$.

Exercice 6.7 ★★ (Desargues). Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que (AA'), (BB'), (CC') concourent en O. Montrer que les points $(BC) \cap (B'C')$, $(CA) \cap (C'A')$ et $(AB) \cap (A'B')$ sont alignés.

Indication : appliquer Ménélaüs trois fois, aux triangles OBC, OCA, OAB, puis multiplier les trois relations.

Exercice 6.8 ★★. Soit ABC un triangle d'orthocentre H. Montrer que les réflexions de (AH), (BH), (CH) par rapport aux bissectrices issues de A, B, C concourent en O.

Exercice 6.9 ★★★ (Théorème de Blanchet). Soient ABC un triangle, (AD) la hauteur issue de A ($D \in (BC)$) et P un point de (AD). Les droites (BP) et (CP) coupent (AC) et (AB) en E et F. Montrer que (AD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{EDF}$.

Indication : Ceva et Ménélaüs donnent $\big(B, C; D, (EF) \cap (BC)\big) = -1$; conclure avec la caractérisation harmonique des bissectrices.

À retenir — Bilan du chapitre

- Ceva : concourance ⇔ produit des trois rapports $= +1$.
- Ménélaüs : alignement ⇔ produit $= -1$.
- Ceva trigonométrique : à utiliser dès que les céviennes sont définies par des angles.
- Conjugué isogonal : $O \leftrightarrow H$, $I \leftrightarrow I$, $G \leftrightarrow K$ (point de Lemoine).
- Le pied de la symédiane vérifie $\frac{BS}{SC} = \frac{c^2}{b^2}$: à connaître par cœur.

CHAPITRE 7

7 Droite d'Euler, cercle des neuf points, droites de Simson

L'orthocentre est le point le plus riche du triangle : il engendre la droite d'Euler, le cercle des neuf points, le triangle orthique et une famille de réflexions sur le cercle circonscrit. Un problème d'olympiade sur trois qui contient le mot « orthocentre » se résout par l'un des cinq faits de ce chapitre.

Dans ce chapitre, H_A, H_B, H_C désignent les pieds des hauteurs, M_A, M_B, M_C les milieux des côtés, et A' le point diamétralement opposé à A sur Γ.

7.1 Rappel : la formule mère

Nous avons établi au chapitre 4 (théorème 4.2.1) que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et que O, G, H sont alignés avec $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Nous en tirons ici deux conséquences employées en permanence.

Proposition 7.1.1 (Conséquences de la formule mère)

(a) $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM_A}$, donc $AH = 2\,OM_A = 2R\,|\cos A|$ ($= 2R\cos A$ si l'angle A est aigu) ;

(b) H est l'image de O par l'homothétie $h(G, -2)$, et O l'image de H par $h(G, -1/2)$;

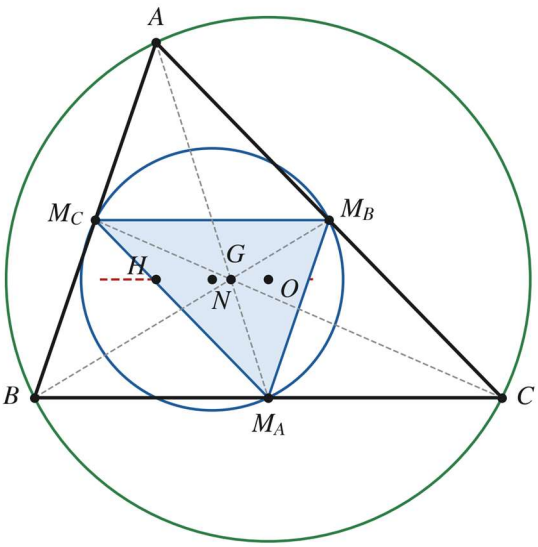
(c) l'homothétie $h(G, -1/2)$ envoie A, B, C sur M_A, M_B, M_C.

Démonstration.

(a) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM_A}$, et $OM_A = R\,|\cos A|$ a été calculé dans la preuve de la proposition 4.4.2.

(b) De $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ on tire $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OG} = -2\overrightarrow{GO}$.

(c) Comme G est l'isobarycentre, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{GM_A} = 1/2\,(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = -1/2\,\overrightarrow{GA}$. ■



L'homothétie de centre G et de rapport −1/2 envoie ABC sur le triangle médian (bleu), O sur N et Γ sur le cercle d'Euler.

7.2 Le cercle des neuf points, revisité

Nous avons démontré au chapitre 4 (théorème 4.2.2) que les neuf points — milieux des côtés, pieds des hauteurs, milieux de $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$ — sont cocycliques sur un cercle de centre N (milieu de $[OH]$) et de rayon $R/2$. Voici une seconde lecture de ce résultat, par deux homothéties.

Proposition 7.2.1 (Deux homothéties pour le cercle d'Euler)

Le cercle des neuf points est l'image de Γ à la fois par $h(H, 1/2)$ et par $h(G, -1/2)$.

Démonstration. L'homothétie $h(H, 1/2)$ envoie O sur le milieu N de $[OH]$, donc Γ sur le cercle de centre N et de rayon $R/2$. L'homothétie $h(G, -1/2)$ envoie O sur le point N' tel que $\overrightarrow{GN'} = -1/2\,\overrightarrow{GO}$; or, avec $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$, le milieu N de $[OH]$ vérifie $\overrightarrow{GN} = 1/2\,(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GH}) = -1/2\,\overrightarrow{GO}$: donc $N' = N$, et l'image de Γ est le même cercle de centre N et de rayon $R/2$. Ce cercle contient donc les images de A, B, C par les deux homothéties, à savoir les milieux de $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$ et les milieux M_A, M_B, M_C (proposition 7.1.1 (c)). Les pieds des hauteurs s'y ajoutent par l'argument de l'angle droit de la preuve du théorème 4.2.2. ■

7.3 Les réflexions de l'orthocentre

Théorème 7.3.1 (Symétriques de l'orthocentre)

Soient H l'orthocentre de ABC et Γ son cercle circonscrit.

(a) Le symétrique H_1 de H par rapport à (BC) appartient à Γ ; c'est le second point d'intersection de la hauteur (AH) avec Γ.

(b) Le symétrique de H par rapport au milieu M_A de $[BC]$ est le point A' diamétralement opposé à A sur Γ.

(c) $BHCA'$ est un parallélogramme ; en particulier $HM_A = M_A A'$ et $AH = 2\,OM_A$.

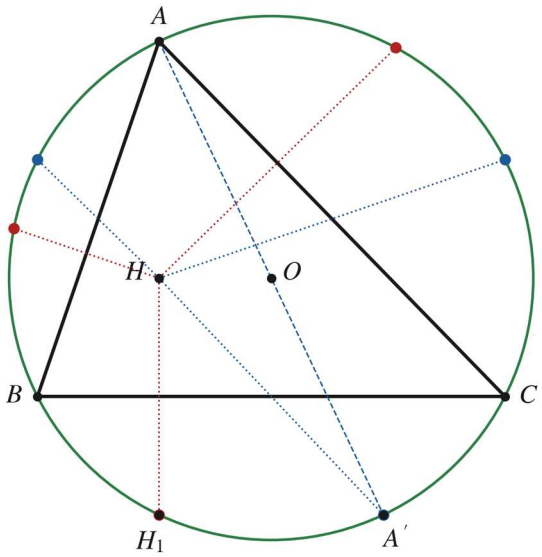
Démonstration.

(a) Si l'angle en B ou en C est droit, H est ce sommet, $H_1 = H$ est sur Γ : on écarte ce cas, de sorte que $H \neq B, C$. En angles orientés, comme $(BH) \perp (CA)$ et $(CH) \perp (AB)$:

$$\measuredangle(HB, HC) = \measuredangle(HB, CA) + \measuredangle(CA, AB) + \measuredangle(AB, HC) = 90° + \measuredangle(AC, AB) + 90° = \measuredangle(AC, AB).$$

La symétrie d'axe (BC) fixe B et C et renverse les angles orientés : $\measuredangle(H_1B, H_1C) = -\measuredangle(HB, HC) = \measuredangle(AB, AC)$. Par le théorème 2.3.1, A, B, C, H_1 sont cocycliques (ils ne sont pas alignés), donc $H_1 \in \Gamma$. Enfin H_1 est sur la perpendiculaire à (BC) passant par H, c'est-à-dire sur la hauteur (AH).

(b) et (c) : la relation d'Euler donne $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM_A}$, donc M_A est le milieu de $[HA']$; les diagonales $[BC]$ et $[HA']$ du quadrilatère $BHCA'$ ont le même milieu, c'est un parallélogramme. Dans le triangle AHA', O et M_A sont les milieux de $[AA']$ et $[HA']$, d'où $AH = 2\,OM_A$ (exemple 1.5.1). ■



Les symétriques de H par rapport aux côtés (rouge) et par rapport aux milieux des côtés (bleu) sont tous sur Γ ; celui par rapport à M_A est l'antipode A'.

À retenir — Le réflexe

Dès qu'un problème mentionne l'orthocentre et le cercle circonscrit, tracer immédiatement : le symétrique de H par rapport aux trois côtés, le symétrique de H par rapport aux trois milieux, et l'antipode A'. Dans la majorité des cas, le point mystérieux de l'énoncé est l'un d'eux.

7.4 Le triangle orthique

Théorème 7.4.1 (Triangle orthique)

Soient ABC un triangle acutangle et H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs.

(a) H est le centre du cercle inscrit du triangle $H_AH_BH_C$, et A, B, C en sont les centres des cercles exinscrits.

(b) Les côtés du triangle orthique sont antiparallèles aux côtés de ABC : $\widehat{AH_BH_C} = \widehat{ABC}$, donc BH_CH_BC est cyclique.

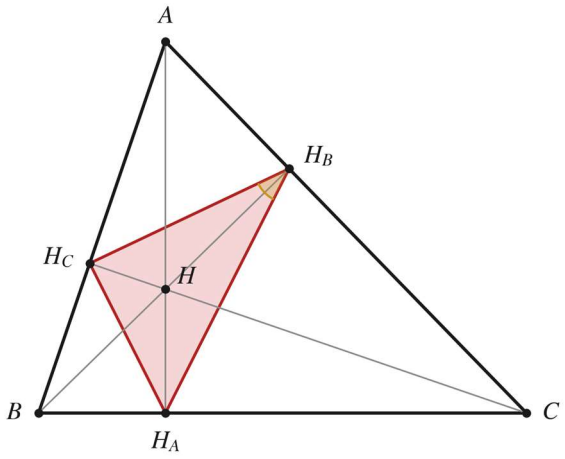
(c) Le triangle orthique a pour angles $180° - 2A$, $180° - 2B$, $180° - 2C$.

Démonstration. Le triangle étant acutangle, les pieds sont intérieurs aux côtés et H est intérieur au triangle.

(b) BH_CH_BC est cyclique car $\widehat{BH_CC} = \widehat{BH_BC} = 90°$ (cercle de diamètre $[BC]$). Par le théorème 3.1.2 (iv), l'angle extérieur en H_B égale l'angle intérieur opposé : $\widehat{AH_BH_C} = 180° - \widehat{CH_BH_C} = \widehat{H_CBC} = \widehat{ABC}$.

(c) AH_BHH_C est cyclique (deux angles droits en H_B et H_C, cercle de diamètre $[AH]$), donc $\widehat{HH_BH_C} = \widehat{HAH_C} = \widehat{H_AAB} = 90° - B$. De même, CH_AHH_B est cyclique et $\widehat{HH_BH_A} = \widehat{HCH_A} = \widehat{H_CCB} = 90° - B$: la droite (H_BH) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{H_CH_BH_A}$. Il en est de même aux deux autres sommets ; H, intersection de trois bissectrices intérieures, est le centre du cercle inscrit. Les côtés de ABC sont perpendiculaires à ces bissectrices intérieures (par exemple $(CA) \perp (BH_B)$), donc ce sont les bissectrices extérieures (proposition 2.4.1) ; le point A, intersection des bissectrices extérieures en H_B et H_C et de la bissectrice intérieure (H_AA), est le centre du cercle exinscrit correspondant.

(d) Le calcul précédent donne $\widehat{H_CH_BH_A} = 2(90° - B) = 180° - 2B$, et de même aux autres sommets. ■



Le triangle orthique (rouge) : H est le centre de son cercle inscrit, car les hauteurs en sont les bissectrices.

7.5 Droites de Simson et de Steiner

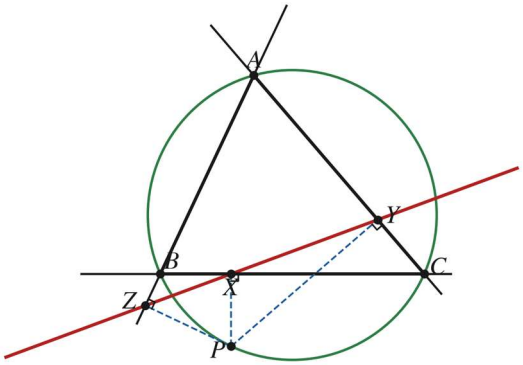
Théorème 7.5.1 (Droite de Simson)

Soient P un point du plan et X, Y, Z ses projetés orthogonaux sur (BC), (CA), (AB). Alors X, Y, Z sont alignés si, et seulement si, P appartient au cercle circonscrit de ABC. La droite (XYZ) s'appelle alors la droite de Simson de P.

Démonstration. Supposons P distinct des sommets et des points X, Y, Z (les cas particuliers se vérifient directement). Les points B, X, Z sont sur le cercle de diamètre $[PB]$ et C, X, Y sur le cercle de diamètre $[PC]$ (angles droits en X, Y, Z). En angles orientés de droites (théorème 2.3.1) :

$$\measuredangle(XZ, XP) = \measuredangle(BZ, BP) = \measuredangle(AB, BP), \qquad \measuredangle(XP, XY) = \measuredangle(CP, CY) = \measuredangle(CP, CA).$$

Par Chasles, $\measuredangle(XZ, XY) = \measuredangle(AB, BP) + \measuredangle(CP, CA)$. Or X, Y, Z sont alignés si, et seulement si, $\measuredangle(XZ, XY) = 0$, c'est-à-dire $\measuredangle(BA, BP) = \measuredangle(CA, CP)$, c'est-à-dire (théorème 2.3.1) si A, B, C, P sont cocycliques ; ils ne peuvent pas être alignés. ■



Droite de Simson : les projetés X, Y, Z d'un point P du cercle circonscrit sur les côtés sont alignés.

Théorème 7.5.2 (Droite de Steiner et propriétés de la droite de Simson)

Soit P un point du cercle circonscrit, distinct des sommets.

(a) Les symétriques P_A, P_B, P_C de P par rapport aux trois côtés sont alignés sur une droite passant par H : la droite de Steiner de P, image de la droite de Simson par $h(P, 2)$.

(b) La droite de Simson de P coupe $[PH]$ en son milieu, lequel appartient au cercle des neuf points.

(c) Les droites de Simson de deux points P et Q du cercle forment l'angle orienté $\measuredangle(BQ, BP)$, égal à l'angle inscrit interceptant l'arc $\overset{\frown}{PQ}$. En particulier, les droites de Simson de deux points diamétralement opposés sont perpendiculaires et se coupent sur le cercle des neuf points.

Démonstration.

(a) L'homothétie $h(P, 2)$ envoie X, Y, Z sur P_A, P_B, P_C ; ces trois points sont donc alignés sur l'image s' de la droite de Simson s. Montrons que $H \in (P_A P_B)$. Soient H_1 et H_2 les seconds points d'intersection des hauteurs (AH) et (BH) avec Γ ; ce sont les symétriques de H par rapport à (BC) et (CA) (théorème 7.3.1). La symétrie d'axe (BC) envoie la droite (PH_1) sur la droite $(P_A H)$ et renverse les angles orientés ; donc

$$\measuredangle(BC, HP_A) = -\measuredangle(BC, H_1P) = \measuredangle(H_1P, BC) = \measuredangle(H_1P, H_1A) + \measuredangle(H_1A, BC) = \measuredangle(CP, CA) + 90°,$$

en utilisant la cocyclicité de A, C, P, H_1 et $(H_1A) \perp (BC)$. De même, avec la symétrie d'axe (CA) et le point H_2 : $\measuredangle(CA, HP_B) = \measuredangle(H_2P, H_2B) + \measuredangle(H_2B, CA) = \measuredangle(CP, CB) + 90°$. Par Chasles,

$$\measuredangle(HP_A, HP_B) = \measuredangle(HP_A, BC) + \measuredangle(BC, CA) + \measuredangle(CA, HP_B) = -\measuredangle(CP, CA) + \measuredangle(CB, CA) + \measuredangle(CP, CB) = 0.$$

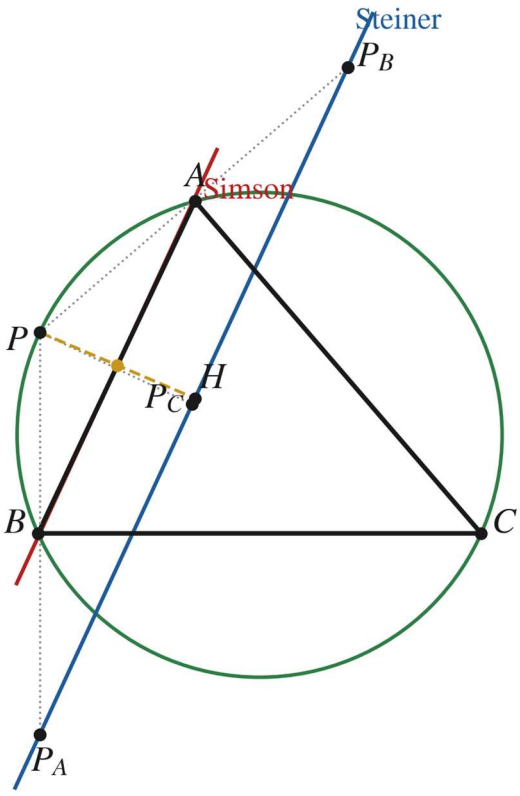
Donc H, P_A, P_B sont alignés : $H \in s'$ (si $H = P_A$ ou $H = P_B$, c'est immédiat).

(b) L'homothétie $h(P, 1/2)$ envoie s' sur s et H sur le milieu M de $[PH]$; comme $H \in s'$, on a $M \in s$. De plus $h(H, 1/2)$ envoie Γ sur le cercle d'Euler (proposition 7.2.1) et $P \in \Gamma$ sur M : donc M est sur le cercle d'Euler.

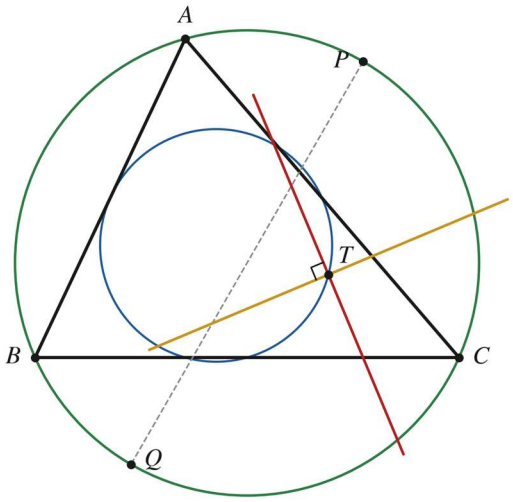
(c) Soit s_P la droite de Simson de P, passant par $X \in (BC)$ et $Z \in (AB)$. Comme $(XP) \perp (BC)$, la démonstration du théorème 7.5.1 donne $\measuredangle(BC, s_P) = \measuredangle(BC, XP) + \measuredangle(XP, XZ) = 90° - \measuredangle(AB, BP)$. Donc, pour deux points P, Q :

$$\measuredangle(s_P, s_Q) = \measuredangle(BC, s_Q) - \measuredangle(BC, s_P) = \measuredangle(AB, BP) - \measuredangle(AB, BQ) = \measuredangle(BQ, BP).$$

Si $[PQ]$ est un diamètre, $\measuredangle(BQ, BP) = 90°$ (corollaire 2.2.2) : $s_P \perp s_Q$. Les milieux M_P et M_Q de $[HP]$ et $[HQ]$ sont les images de P et Q par $h(H, 1/2)$; ils sont donc diamétralement opposés sur le cercle d'Euler, et s_P, s_Q passent respectivement par M_P, M_Q (point (b)). Deux droites perpendiculaires passant par les extrémités d'un diamètre se coupent sur le cercle correspondant (corollaire 2.2.2). ■



Droite de Steiner (bleu), image de la droite de Simson (rouge) par l'homothétie h(P, 2) ; elle passe par H, et la droite de Simson passe par le milieu de [PH].



Les droites de Simson de deux points diamétralement opposés P et Q sont perpendiculaires et se coupent en un point T du cercle d'Euler (bleu).

7.6 Exemples résolus

Exemple 7.6.1 (Distance de H à un côté). Soit ABC un triangle acutangle. Montrer que $HH_A = 2R\cos B\cos C$ et que $AH = 2R\cos A$.

Solution. D'après la proposition 7.1.1 (a), $AH = 2\,OM_A = 2R\cos A$.

Pour HH_A : le triangle BH_AH est rectangle en H_A, et son angle en B vaut $\widehat{HBH_A} = \widehat{H_BBC} = 90° - C$ (triangle BH_BC rectangle en H_B). Donc

$$HH_A = BH_A \cdot \tan\widehat{HBH_A} = BH_A \cdot \tan(90° - C) = BH_A \cot C.$$

Or $BH_A = c\cos B$ (triangle ABH_A rectangle en H_A) et $c = 2R\sin C$, d'où $HH_A = 2R\sin C\cos B \cdot \frac{\cos C}{\sin C} = 2R\cos B\cos C$. On vérifie la cohérence : $AH + HH_A = AH_A = c\sin B = 2R\sin B\sin C$, et en effet $\cos A + \cos B\cos C = -\cos(B + C) + \cos B\cos C = \sin B\sin C$.

Exemple 7.6.2. Soient ABC un triangle acutangle d'orthocentre H et M le milieu de $[BC]$. La droite (AH) recoupe le cercle circonscrit en H_1. Montrer que M est le milieu de $[HA']$, où A' est l'antipode de A, et que $MH = MH_1$.

Solution. D'après le théorème 7.3.1 (a), H_1 est le symétrique de H par rapport à (BC) ; comme $M \in (BC)$, la symétrie conserve les distances à M : $MH = MH_1$. D'après (b), le symétrique de H par rapport à M est l'antipode A' de A : M est bien le milieu de $[HA']$. En particulier $MH = MH_1 = MA'$: M est le centre du cercle circonscrit au triangle HH_1A', rectangle en H_1 (car $[AA']$ est un diamètre et $H_1 \in \Gamma$).

7.7 Exercices

Exercice 7.1 ★. Montrer que $OH^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$.

Exercice 7.2 ★. Montrer que $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$, puis en déduire l'inégalité $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$.

Exercice 7.3 ★★★ (Théorème de Feuerbach). Soit ABC un triangle, N le centre de son cercle des neuf points et I celui de son cercle inscrit. Montrer que $NI = \frac{R}{2} - r$, et en déduire que le cercle inscrit est tangent intérieurement au cercle des neuf points.

Exercice 7.4 ★★. Soit P un point du cercle circonscrit de ABC. Montrer que la droite de Simson de P passe par le milieu de $[PH]$.

Exercice 7.5 ★★. Soient ABC un triangle et H son orthocentre. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles ABH, BCH, CAH ont même rayon R que le cercle circonscrit à ABC.

7.8 Corrigés

Solution de l'exercice 7.1. Avec O pour origine, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, donc

$$OH^2 = 3R^2 + 2\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\right) = 3R^2 + 2R^2(\cos 2C + \cos 2A + \cos 2B),$$

puisque $\widehat{AOB} = 2C$, etc. L'identité classique $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A\cos B\cos C$ donne $OH^2 = 3R^2 + 2R^2(-1 - 4\cos A\cos B\cos C) = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$.

Solution de l'exercice 7.2. Avec O pour origine : $OH^2 = \left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right|^2 = 3R^2 + 2\sum \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$. Or $c^2 = AB^2 = \left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right|^2 = 2R^2 - 2\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, donc $2\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 2R^2 - c^2$. En sommant les trois relations analogues :

$$OH^2 = 3R^2 + \left(6R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)\right) = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Comme $OH^2 \geq 0$, on obtient $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$, avec égalité si, et seulement si, $O = H$, c'est-à-dire si, et seulement si, le triangle est équilatéral.

Solution de l'exercice 7.3. On utilise la formule de la médiane dans le triangle OIH, avec N milieu de $[OH]$:

$$NI^2 = \frac{OI^2 + HI^2}{2} - \frac{OH^2}{4}.$$

Avec $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (Euler), $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ et $HI^2 = 2r^2 - 4R^2\cos A\cos B\cos C$ (formule classique), un calcul utilisant $a^2 + b^2 + c^2 = 2s^2 - 2r^2 - 8Rr$ et $\cos A\cos B\cos C = \frac{s^2 - (2R+r)^2}{4R^2}$ conduit à $NI^2 = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2$.

Comme $\frac{R}{2} - r \geq 0$ d'après l'inégalité d'Euler $R \geq 2r$, on a $NI = \frac{R}{2} - r$: la distance des centres est égale à la différence des rayons, donc les deux cercles sont tangents intérieurement.

Solution de l'exercice 7.4. Soient X le projeté de P sur (BC) et P' le symétrique de P par rapport à (BC) : X est le milieu de $[PP']$. On sait que P', H et les deux autres symétriques sont alignés sur la droite de Steiner δ. L'homothétie $h(P, 1/2)$ envoie δ sur la droite de Simson et H sur le milieu de $[PH]$: ce milieu appartient donc à la droite de Simson.

Solution de l'exercice 7.5. $\widehat{BHC} = 180° - A$, donc dans le triangle BHC la loi des sinus donne $\frac{BC}{\sin\widehat{BHC}} = 2R'$ avec $\sin\widehat{BHC} = \sin A$: ainsi $2R' = \frac{a}{\sin A} = 2R$. Autrement dit, le cercle $\odot(BHC)$ est le symétrique de $\odot(ABC)$ par rapport à (BC).

7.9 Problèmes d'entraînement

Exercice 7.6 ★★. Soient ABC un triangle d'orthocentre H, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de B et C, et Q le second point d'intersection du cercle de diamètre $[AH]$ avec le cercle circonscrit. Montrer que (AQ), (BC) et (H_BH_C) sont concourantes ou parallèles.

Exercice 7.7 ★★ (Balkan 2009). Soient ABC un triangle, M_A, M_B, M_C les milieux des côtés et N le centre du cercle d'Euler. Montrer que N est le centre du cercle circonscrit au triangle médian.

Exercice 7.8 ★★. Soient P et Q deux points diamétralement opposés du cercle circonscrit de ABC. Montrer que leurs droites de Simson sont perpendiculaires et que leur point d'intersection appartient au cercle des neuf points.

Exercice 7.9 ★★★ (Iran TST). Soient ABC un triangle acutangle, H son orthocentre et D le pied de la hauteur issue de A. Le cercle de diamètre $[AD]$ coupe (AB) et (AC) en E et F, et recoupe le cercle circonscrit en Q. Montrer que (EF) est parallèle à la tangente en A au cercle circonscrit, et que (EF), (BC) et (AQ) sont concourantes ou parallèles.

À retenir — Bilan du chapitre

- $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$: la formule mère.
- $AH = 2\,OM_A = 2R\cos A$; $HH_A = 2R\cos B\cos C$ (triangle acutangle).
- Les symétriques de H par rapport à (BC) et par rapport à M_A sont sur Γ (le second est l'antipode de A).
- Cercle des neuf points : centre N milieu de $[OH]$, rayon $R/2$, image de Γ par $h(H, 1/2)$ et par $h(G, -1/2)$.
- $\odot\,(BHC)$ est le symétrique de $\odot\,(ABC)$ par rapport à (BC) : même rayon R.
- Simson : alignement des projetés $\Leftrightarrow$ point sur le cercle circonscrit.

CHAPITRE 8

8 Transformations : homothéties, rotations, similitudes

Une transformation ne « démontre » rien à elle seule : elle transporte une hypothèse d'un endroit de la figure vers un autre, là où elle devient évidente. Le talent consiste à deviner quelle transformation envoie l'objet compliqué sur l'objet simple.

8.1 Homothéties

Définition 8.1.1 (Homothétie)

Soient Ω un point et $k \in \mathbb{R}^*$. L'homothétie $h(\Omega, k)$ associe à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$.

Propriétés des homothéties

L'homothétie $h = h(\Omega, k)$ vérifie $\overrightarrow{h(M)h(N)} = k\,\overrightarrow{MN}$ pour tous points M, N. En conséquence, elle multiplie les longueurs par $|k|$, conserve les angles orientés, envoie toute droite sur une droite parallèle, et tout cercle de centre ω et de rayon ρ sur le cercle de centre $h(\omega)$ et de rayon $|k|\rho$.

Démonstration. $\overrightarrow{h(M)h(N)} = \overrightarrow{\Omega h(N)} - \overrightarrow{\Omega h(M)} = k\left(\overrightarrow{\Omega N} - \overrightarrow{\Omega M}\right) = k\,\overrightarrow{MN}$. Les longueurs sont donc multipliées par $|k|$; l'image de la droite passant par M et dirigée par $\vec{u}$ est la droite passant par $h(M)$ et dirigée par $k\vec{u}$, qui lui est parallèle, et les directions étant conservées, les angles orientés de droites le sont aussi. Enfin $\omega M = \rho$ équivaut à $h(\omega)h(M) = |k|\rho$. ■

Théorème 8.1.2 (Centres d'homothétie de deux cercles)

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles de centres $O_1 \neq O_2$ et de rayons r_1, r_2.

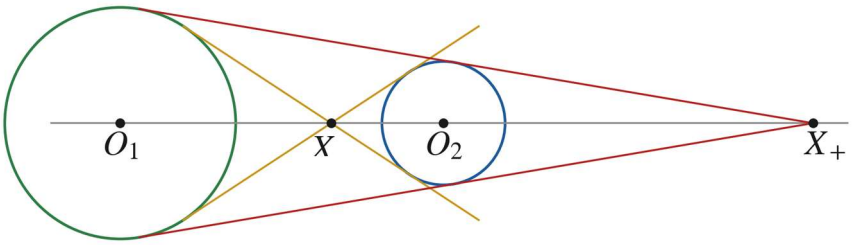
(a) Il existe exactement deux homothéties envoyant $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$ (une seule si $r_1 = r_2$) : de rapports $+\frac{r_2}{r_1}$ et $-\frac{r_2}{r_1}$, de centres respectifs le centre d'homothétie externe X_+ et interne X_-, qui vérifient $\frac{\overline{X_\pm O_1}}{\overline{X_\pm O_2}} = \pm\frac{r_1}{r_2}$.

(b) Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents en T, alors T est l'un des deux centres d'homothétie : interne si la tangence est extérieure, externe si elle est intérieure.

Démonstration.

(a) Par les propriétés des homothéties, $h(\Omega, k)$ envoie $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$ si, et seulement si, $|k|r_1 = r_2$ et $h(\Omega, k)(O_1) = O_2$, c'est-à-dire $k = \pm\frac{r_2}{r_1}$ et $\overrightarrow{\Omega O_2} = k\overrightarrow{\Omega O_1}$. Pour $k \neq 1$, cette dernière condition détermine un unique point Ω de la droite (O_1O_2) (proposition 1.2.3), vérifiant $\frac{\overline{\Omega O_1}}{\overline{\Omega O_2}} = \frac{1}{k}$. Pour $k = 1$ (possible seulement si $r_1 = r_2$), il n'y a pas de solution : l'application correspondante est une translation.

(b) Si les cercles sont tangents en T, les points O_1, O_2, T sont alignés (les deux cercles ont la même tangente en T, donc les rayons $[O_1T]$ et $[O_2T]$ sont portés par la même perpendiculaire à celle-ci). On a $TO_1 = r_1$, $TO_2 = r_2$: T divise $[O_1O_2]$ dans le rapport $\frac{r_1}{r_2}$, intérieurement si la tangence est extérieure (T entre les centres), extérieurement sinon. C'est donc X_- ou X_+. ■



Les deux centres d'homothétie X_+ (externe) et X_- (interne) de deux cercles, à l'intersection des tangentes communes.

Méthode 8.1.3 — Le réflexe « tangence ⇒ homothétie »

Si deux cercles sont tangents en T, l'homothétie de centre T qui envoie l'un sur l'autre transforme :

- tout point P du premier cercle en le point P' du second tel que T, P, P' soient alignés ;
- la tangente en P en la tangente en P' : ces deux tangentes sont parallèles ;
- en particulier, si T, P, P' sont alignés avec $P \in \mathcal{C}_1$, $P' \in \mathcal{C}_2$, alors les arcs correspondants sont « homologues » : P est le milieu d'arc si, et seulement si, P' l'est.

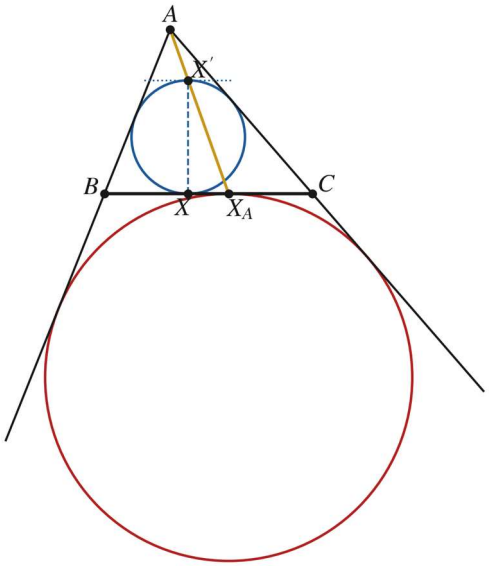
Ce seul principe résout une grande partie des problèmes de cercles tangents.

Exemple 8.1.4 (Cercle inscrit et cercle exinscrit). *Soit ABC un triangle, ω le cercle inscrit touchant $[BC]$ en X, et ω_A le cercle exinscrit dans l'angle $\hat{A}$, touchant $[BC]$ en X_A. Soit X' le point diamétralement opposé à X dans ω. Montrer que A, X', X_A sont alignés.*

Solution. ω et ω_A sont tous deux tangents aux deux côtés de l'angle $\hat{A}$, et leurs centres I et I_A sont sur la bissectrice $[AI)$. L'homothétie h de centre A et de rapport $k = \frac{r_A}{r} > 0$ envoie I sur I_A (car $\frac{AI_A}{AI} = \frac{r_A}{r}$, les triangles rectangles formés avec les points de contact sur (AB) étant semblables), donc ω sur ω_A.

La tangente t à ω en X' est perpendiculaire à (XX'), qui est perpendiculaire à (BC) : donc $t \parallel (BC)$, et t est la tangente à ω parallèle à (BC) située du côté de A. Montrons que $h(t) = (BC)$. La droite $h(t)$ est parallèle à t, donc à (BC). Les distances de A aux droites t et (BC) valent $h_a - 2r$ et h_a, où h_a est la hauteur issue de A (le cercle ω, de diamètre $[XX']$ perpendiculaire à (BC), est situé entre ces deux droites), et h multiplie la distance à A par $k = \frac{r_A}{r}$. Or $\frac{h_a}{h_a - 2r} = \frac{r_A}{r}$: avec $h_a = \frac{2S}{a}$, $r = \frac{S}{s}$ et $r_A = \frac{S}{s-a}$ (théorème 4.1.3), on a $h_a - 2r = 2S\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{s}\right) = \frac{2S(s-a)}{as}$, d'où $\frac{h_a}{h_a - 2r} = \frac{s}{s-a} = \frac{r_A}{r}$. Donc $h(t) = (BC)$, et $h(X')$ est le point de contact de ω_A avec (BC), c'est-à-dire X_A. Ainsi A, X', X_A sont alignés.

Remarque. On retrouve que X_A est déterminé par X ; avec le théorème 4.3.2, $BX = CX_A = s - b$: le point X_A est le symétrique de X par rapport au milieu de $[BC]$.



Exemple 8.1.4 : l'homothétie de centre A qui envoie le cercle inscrit sur le cercle exinscrit envoie X' sur X_A.

8.2 Rotations et symétries

Théorème 8.2.1 (Composée de rotations et de symétries)

(a) La composée de deux rotations d'angles α et β est une rotation d'angle $\alpha+\beta$, ou une translation si $\alpha+\beta \equiv 0 \pmod{360°}$.

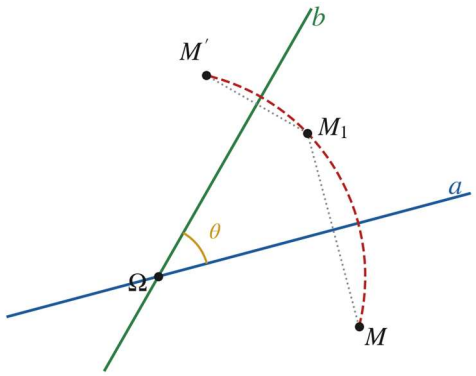
(b) La composée $s_b \circ s_a$ de deux symétries axiales d'axes a et b sécants en Ω est la rotation de centre Ω et d'angle $2\measuredangle(a,b)$ (bien défini modulo $360°$).

(c) Soient $O_1 \neq O_2$ et $\rho_1 = \rho(O_1, 2\varphi_1)$, $\rho_2 = \rho(O_2, 2\varphi_2)$, avec $\varphi_1+\varphi_2 \not\equiv 0 \pmod{180°}$. Soient d_1 la droite passant par O_1 telle que $\measuredangle(d_1, O_1O_2) = \varphi_1$ et d_2 la droite passant par O_2 telle que $\measuredangle(O_1O_2, d_2) = \varphi_2$. Alors $\rho_2 \circ \rho_1$ est la rotation d'angle $2(\varphi_1+\varphi_2)$ et de centre $O_3 = d_1 \cap d_2$; le triangle $O_1O_2O_3$ a des angles φ_1 en O_1 et φ_2 en O_2 (modulo $180°$).

Démonstration. Identifions le plan à $\mathbb{C}$. La rotation de centre ω et d'angle α s'écrit $z \mapsto e^{i\alpha}(z-\omega)+\omega = e^{i\alpha}z + c$. La composée de $z \mapsto e^{i\alpha}z + c$ et de $z \mapsto e^{i\beta}z + c'$ est $z \mapsto e^{i(\alpha+\beta)}z + c''$: si $e^{i(\alpha+\beta)} \neq 1$, elle a un unique point fixe $z_0 = \frac{c''}{1-e^{i(\alpha+\beta)}}$ et s'écrit $z \mapsto e^{i(\alpha+\beta)}(z-z_0)+z_0$, rotation d'angle $\alpha+\beta$; sinon c'est une translation.

(b) Prenons Ω pour origine et notons θ_a, θ_b des angles directeurs de a et b. La symétrie d'axe a s'écrit $z \mapsto e^{2i\theta_a}\bar{z}$. Donc $s_b \circ s_a(z) = e^{2i\theta_b}\,\overline{e^{2i\theta_a}\bar{z}} = e^{2i(\theta_b-\theta_a)}z$: c'est la rotation de centre Ω et d'angle $2(\theta_b-\theta_a) = 2\measuredangle(a,b)$, qui ne dépend pas du choix des angles directeurs modulo $180°$.

(c) Notons $\ell = (O_1O_2)$. Par (b), $\rho_1 = s_\ell \circ s_{d_1}$ et $\rho_2 = s_{d_2} \circ s_\ell$. Comme $s_\ell \circ s_\ell = \mathrm{id}$, $\rho_2 \circ \rho_1 = s_{d_2} \circ s_{d_1}$, rotation de centre $d_1 \cap d_2$ et d'angle $2\measuredangle(d_1,d_2) = 2(\varphi_1+\varphi_2)$; les droites d_1 et d_2 sont sécantes car $\measuredangle(d_1,d_2) = \varphi_1+\varphi_2 \neq 0$. ■

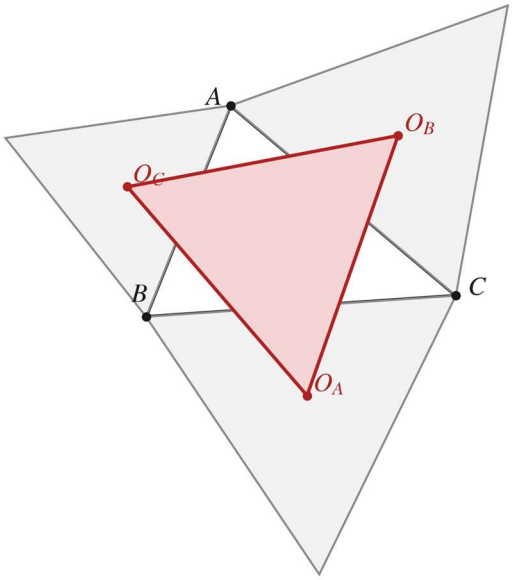


La composée de deux symétries d'axes a et b sécants en Ω est la rotation de centre Ω et d'angle 2θ.

Exemple 8.2.2 (Le théorème de Napoléon). *Sur les côtés d'un triangle ABC, on construit extérieurement trois triangles équilatéraux de centres O_A, O_B, O_C. Montrer que $O_AO_BO_C$ est équilatéral.*

Solution. Supposons ABC direct. Le centre O_C du triangle équilatéral construit extérieurement sur $[AB]$ vérifie $O_CA = O_CB$ et $\widehat{AO_CB} = 120°$; la rotation ρ_C de centre O_C et d'angle $120°$, dans le sens convenable (le même pour les trois, par symétrie de la construction), envoie A sur B. De même ρ_A, de centre O_A, envoie B sur C, et ρ_B, de centre O_B, envoie C sur A. La composée $\rho_B \circ \rho_A \circ \rho_C$ fixe A ; son angle vaut $360°$, c'est donc une translation (théorème 8.2.1) ayant un point fixe : l'identité. Ainsi $\rho_A \circ \rho_C = \rho_B^{-1}$, rotation de centre O_B et d'angle $-120° \equiv 240°$.

Par le théorème 8.2.1 (c) appliqué à ρ_C puis ρ_A (avec $\varphi_1 = \varphi_2 = 60°$), $\rho_A \circ \rho_C$ est la rotation d'angle $240°$ dont le centre O_3 forme avec O_C et O_A un triangle ayant des angles de $60°$ en O_C et en O_A. Deux rotations égales et distinctes de l'identité ont le même centre : $O_3 = O_B$. Le triangle $O_CO_AO_B$ a donc deux angles de $60°$: il est équilatéral.



Théorème de Napoléon : les centres des trois triangles équilatéraux extérieurs forment un triangle équilatéral.

8.3 La similitude directe : l'outil décisif

Définition 8.3.1 (Similitude directe)

Une similitude directe de centre Ω, de rapport $k > 0$ et d'angle θ est la composée $h(\Omega, k) \circ \rho(\Omega, \theta)$. En écriture complexe, c'est $z \mapsto az + b$ avec $a \neq 0$; son centre est le point fixe $z_0 = \frac{b}{1-a}$ (si $a \neq 1$), son rapport $|a|$ et son angle $\arg a$.

Théorème 8.3.2 (Existence et unicité)

Pour tous segments $[AB]$ et $[CD]$ (non réduits à un point), il existe une unique similitude directe envoyant A sur C et B sur D. Son rapport est $\frac{CD}{AB}$ et son angle est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Démonstration. Notons a, b, c, d les affixes. On cherche $z \mapsto \alpha z + \beta$ avec $\alpha a + \beta = c$ et $\alpha b + \beta = d$. En soustrayant, $\alpha(b - a) = d - c$, donc $\alpha = \frac{d-c}{b-a} \neq 0$ (car $a \neq b$ et $c \neq d$), puis $\beta = c - \alpha a$: la solution existe et est unique. Son rapport est $|\alpha| = \frac{CD}{AB}$ et son angle $\arg\alpha = \arg(d - c) - \arg(b - a) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$. ■

Théorème 8.3.3 (Centre d'une similitude directe)

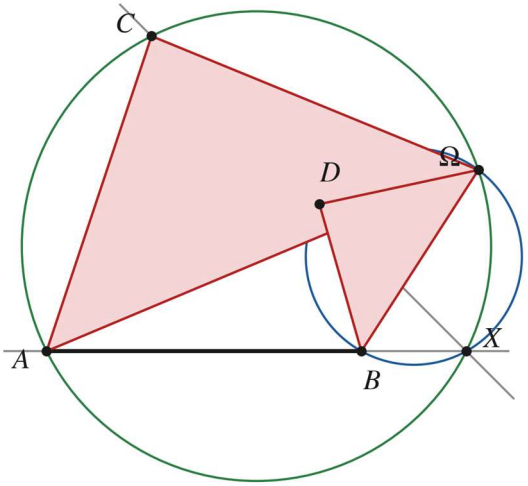
Soient A, B, C, D quatre points tels que (AB) et (CD) se coupent en un point X distinct des quatre, et soit Ω le centre de l'unique similitude directe σ envoyant $A \mapsto C$ et $B \mapsto D$ (on suppose σ distincte d'une translation). Alors

$$\Omega \text{ est le second point d'intersection des cercles } \odot(XAC) \text{ et } \odot(XBD).$$

De plus, Ω est aussi le centre de la similitude directe envoyant $A \mapsto B$ et $C \mapsto D$; et les triangles ΩAC et ΩBD sont directement semblables, de même que ΩAB et ΩCD.

Démonstration. *Le centre est sur les deux cercles.* La similitude σ de centre Ω envoie A sur C et B sur D, donc la droite (AB) sur la droite (CD) ; comme σ tourne toutes les directions du même angle θ, on a $\measuredangle(AB, CD) = \theta$ modulo $180°$. D'autre part, σ envoie A sur C avec $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}) = \theta$, d'où $\measuredangle(\Omega A, \Omega C) = \theta = \measuredangle(AB, CD) = \measuredangle(XA, XC)$. Par le théorème 2.3.1, Ω, X, A, C sont cocycliques (si $\Omega \neq A, C$). De même, $\measuredangle(\Omega B, \Omega D) = \theta = \measuredangle(XB, XD)$ et $\Omega \in \odot(XBD)$. Si $\Omega \neq X$, c'est donc le second point commun des deux cercles. Si $\Omega = X$, alors σ, de centre X, envoie $A \mapsto C$ et $B \mapsto D$; on a donc $\frac{XC}{XA} = \frac{XD}{XB}$ avec des orientations compatibles, et l'homothétie de centre X qui envoie A sur B envoie aussi C sur D, donc $\odot(XAC)$ sur $\odot(XBD)$: ces deux cercles sont tangents en X, et l'énoncé s'entend alors avec le point de tangence X.

Les triangles semblables. La similitude σ envoie le triangle ΩAB sur le triangle ΩCD : ils sont directement semblables. Donc $\frac{\Omega B}{\Omega A} = \frac{\Omega D}{\Omega C}$ et $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = (\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega D})$; il en résulte $\frac{\Omega C}{\Omega A} = \frac{\Omega D}{\Omega B}$ et $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}) = (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega D})$. La similitude de centre Ω, de rapport $\frac{\Omega B}{\Omega A}$ et d'angle $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$ envoie donc A sur B et C sur D : c'est la similitude annoncée, de centre Ω, et les triangles ΩAC et ΩBD sont directement semblables. ■



Le centre Ω de la similitude directe envoyant A sur C et B sur D est le second point commun des cercles XAC et XBD ; les triangles ΩAC et ΩBD sont semblables.

À retenir — Les quatre lectures du lemme

Avec les notations précédentes :

(a) Si $ABCD$ est un quadrilatère cyclique de cercle Γ et $X = (AB) \cap (CD)$, le centre de la similitude envoyant $[AB]$ sur $[DC]$ est le second point d'intersection de $\odot\,(XAD)$ et $\odot\,(XBC)$.

(b) Le centre de la similitude directe envoyant $[AB]$ sur $[CD]$ est le même que celui de la similitude envoyant $[AC]$ sur $[BD]$: on peut échanger les rôles.

(c) Si Ω est le centre de la similitude envoyant $[AB]$ sur $[CD]$ et si $Y = (AC) \cap (BD)$, alors Ω est aussi le second point d'intersection de $\odot\,(YAB)$ et $\odot\,(YCD)$ (appliquer le théorème à la similitude $A \mapsto B$, $C \mapsto D$) : cela fournit deux autres cercles à tracer.

(d) Réciproquement, si Ω est le second point d'intersection de deux cercles $\odot\,(XAC)$ et $\odot\,(XBD)$, avec $X = (AB) \cap (CD)$, alors c'est le centre de la similitude $A \mapsto C$, $B \mapsto D$ (par unicité du second point commun), et les triangles ΩAB et ΩCD sont semblables : on dispose immédiatement d'une égalité de rapports $\frac{\Omega A}{\Omega C} = \frac{\Omega B}{\Omega D}$ et d'une égalité d'angles, souvent la clé du problème.

Théorème 8.3.4 (Point de Miquel d'un triangle)

Soient ABC un triangle et $X \in (BC)$, $Y \in (CA)$, $Z \in (AB)$ distincts des sommets. Alors les cercles $\odot\,(AYZ)$, $\odot\,(BZX)$, $\odot\,(CXY)$ ont un point commun M, appelé point de Miquel du triplet (X, Y, Z).

Démonstration. C'est l'exemple 3.3.2. Rappelons l'argument : si M est le second point d'intersection de $\odot\,(AYZ)$ et $\odot\,(BZX)$, alors

$$\measuredangle(MX, MY) = \measuredangle(MX, MZ) + \measuredangle(MZ, MY) = \measuredangle(BX, BZ) + \measuredangle(AZ, AY) = \measuredangle(BC, BA) + \measuredangle(AB, AC) = \measuredangle(CX, CY),$$

donc M, X, Y, C sont cocycliques. ■

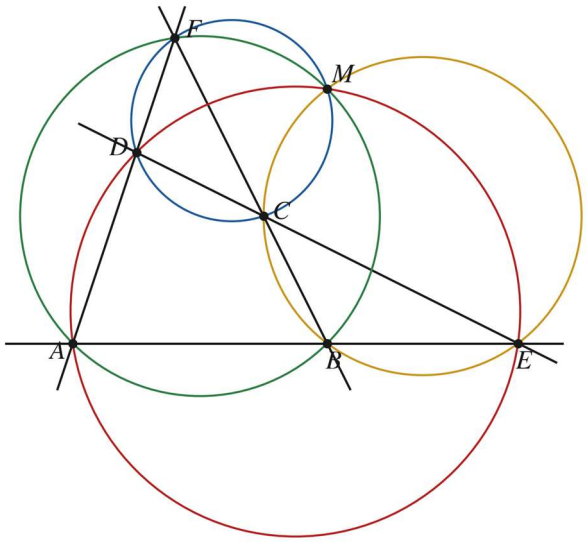
Théorème 8.3.5 (Point de Miquel du quadrilatère complet)

Soient quatre droites en position générale (deux à deux sécantes, trois jamais concourantes), formant quatre triangles. Les quatre cercles circonscrits à ces triangles sont concourants en un point M (le point de Miquel du quadrilatère complet). Si l'on nomme A, B, C, D quatre des points d'intersection de sorte que les quatre droites soient (AB), (BC), (CD) et (DA), ce point est le centre de la similitude directe envoyant $[AB]$ sur $[DC]$.

Démonstration. Notons $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ les droites et T_{ijk} le triangle formé par ℓ_i, ℓ_j, ℓ_k. Appliquons le théorème 8.3.4 au triangle T_{123} et aux trois points où ℓ_4 coupe ses côtés : les cercles circonscrits aux trois triangles T_{124}, T_{134}, T_{234} ont un point commun M. De même, avec le triangle T_{124} et la droite ℓ_3 : les cercles de T_{123}, T_{134}, T_{234} ont un point commun M'.

Les points M et M' sont tous deux sur les cercles de T_{134} et T_{234}, qui ont en commun le sommet $W = \ell_3 \cap \ell_4$ et au plus un autre point. Or $M \neq W$: sinon W serait sur le cercle de T_{124}, qui contient déjà les deux points $\ell_4 \cap \ell_1$ et $\ell_4 \cap \ell_2$ de ℓ_4 ; une droite coupant un cercle en au plus deux points, on aurait $W \in \{\ell_4 \cap \ell_1, \ell_4 \cap \ell_2\}$ et trois droites concourantes. De même $M' \neq W$. Donc $M = M'$, et ce point est sur les quatre cercles.

Enfin, avec $X = (AB) \cap (CD)$, le théorème 8.3.3 appliqué à $A \mapsto D$, $B \mapsto C$ montre que le centre de cette similitude est le second point commun de $\odot(XAD)$ et $\odot(XBC)$, qui sont deux des quatre cercles : c'est M. ■



Point de Miquel du quadrilatère complet : les quatre cercles circonscrits aux quatre triangles passent par M.

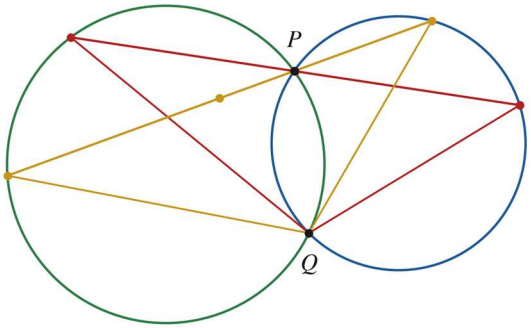
8.4 Exemples résolus

Exemple 8.4.1 (Triangle de forme constante). *Deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en P et Q. Une droite variable passant par P coupe $\mathcal{C}_1$ en A et $\mathcal{C}_2$ en B. Montrer que le triangle QAB garde une forme constante, et que le lieu du milieu de $[AB]$ est un cercle.*

Solution. En angles orientés de droites, $\measuredangle(AQ, AB) = \measuredangle(AQ, AP)$ est un angle inscrit dans $\mathcal{C}_1$ interceptant la corde $[QP]$: il ne dépend pas de la position de A sur $\mathcal{C}_1$ (théorème 2.3.1). De même,

$\measuredangle(BQ, BA) = \measuredangle(BQ, BP)$ est constant. Les angles orientés du triangle QAB en A et B sont donc constants : ces triangles sont tous directement semblables. En particulier, le rapport $\frac{QB}{QA}$ et l'angle $(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QB})$ sont constants : $B = \sigma(A)$ pour une similitude directe fixe σ de centre Q, qui envoie $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$.

Le milieu M de $[AB]$ vérifie, en écriture complexe avec Q pour origine, $m = \frac{a+\sigma(a)}{2} = \frac{1+\lambda}{2}\, a$, où $\sigma(z) = \lambda z$. C'est l'image de A par la similitude fixe $z \mapsto \frac{1+\lambda}{2} z$ de centre Q ; comme A décrit $\mathcal{C}_1$, M décrit l'image de $\mathcal{C}_1$ par cette similitude, c'est-à-dire un cercle.



Exemple 8.4.1 : quelle que soit la droite passant par P, les triangles QAB sont semblables.

Exemple 8.4.2 (Un problème type « spirale »). *Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Les droites (AB) et (CD) se coupent en X, les droites (AD) et (BC) en Y. Soit M le second point d'intersection des cercles $\odot(XAD)$ et $\odot(XBC)$. Montrer que M est le centre de la similitude directe envoyant $[AD]$ sur $[BC]$, et que M, X, Y sont alignés.*

Solution. Par le théorème 8.3.3 appliqué aux droites (AB) et (DC) concourantes en X, le second point d'intersection M de $\odot(XAD)$ et $\odot(XBC)$ est le centre de la similitude directe envoyant $A \mapsto D$, $B \mapsto C$, donc aussi celui de la similitude envoyant $A \mapsto B$, $D \mapsto C$.

Pour l'alignement : appliquons le même théorème aux droites (AD) et (BC), concourantes en Y. Le centre de la similitude envoyant $A \mapsto B$, $D \mapsto C$ est le second point d'intersection de $\odot(YAB)$ et $\odot(YDC)$. Par unicité du centre, c'est encore M. Ainsi M appartient aux quatre cercles $\odot(XAD)$, $\odot(XBC)$, $\odot(YAB)$, $\odot(YDC)$: c'est le point de Miquel du quadrilatère complet.

Une chasse aux angles donne alors $\measuredangle(MX, MA) = \measuredangle(DX, DA) = \measuredangle(DC, DA)$ (cocyclicité de M, X, A, D) et $\measuredangle(MY, MA) = \measuredangle(BY, BA) = \measuredangle(BC, BA)$ (cocyclicité de M, Y, A, B) ; comme $ABCD$ est cyclique, $\measuredangle(DC, DA) = \measuredangle(BC, BA)$, d'où $\measuredangle(MX, MA) = \measuredangle(MY, MA)$ et donc $(MX) = (MY)$: M, X, Y sont alignés.

8.5 Exercices

Exercice 8.1 ★. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles tangents extérieurement en T. Une droite tangente à $\mathcal{C}_1$ en A et à $\mathcal{C}_2$ en B est donnée. Montrer que $\widehat{ATB} = 90°$.

Exercice 8.2 ★★. Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ tangents intérieurement en T ($\mathcal{C}_2$ à l'intérieur). Une corde $[AB]$ de $\mathcal{C}_1$ est tangente à $\mathcal{C}_2$ en P. Montrer que (TP) est la bissectrice de $\widehat{ATB}$.

Exercice 8.3 ★. Soit ABC un triangle et soient M_B, M_C les milieux de $[CA]$ et $[AB]$. Montrer que le cercle circonscrit au triangle AM_BM_C est l'image du cercle circonscrit à ABC par $h(A, 1/2)$, et en déduire son rayon.

Exercice 8.4 ★★. Soient $ABCD$ un carré et P un point intérieur tel que $PA = 1$, $PB = 2$, $PC = 3$. Calculer $\widehat{APB}$.

Exercice 8.5 ★★. Soient A, B, C, D quatre points et Ω le centre de la similitude directe envoyant $[AB]$ sur $[CD]$. Montrer que Ω est aussi le centre de celle envoyant $[AC]$ sur $[BD]$.

8.6 Corrigés

Solution de l'exercice 8.1. Soit δ la tangente commune en T ; elle coupe (AB) en M. Par égalité des tangentes issues d'un point, $MA = MT = MB$. Donc T appartient au cercle de diamètre $[AB]$ (centre M, rayon MA) : $\widehat{ATB} = 90°$.

Solution de l'exercice 8.2. L'homothétie h de centre T envoyant $\mathcal{C}_2$ sur $\mathcal{C}_1$ envoie P sur un point $P' \in \mathcal{C}_1$ tel que la tangente à $\mathcal{C}_1$ en P' soit parallèle à (AB) : P' est donc le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas T. Ainsi $(TP) = (TP')$ passe par le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$: c'est la bissectrice de $\widehat{ATB}$.

Remarque. C'est le lemme d'Archimède, utilisé sans cesse.

Solution de l'exercice 8.3. $h(A, 1/2)$ envoie $B \mapsto M_C$, $C \mapsto M_B$, $A \mapsto A$; elle envoie donc $\odot(ABC)$ sur $\odot(AM_CM_B)$, dont le rayon est $R/2$.

Solution de l'exercice 8.4. Soit ρ la rotation de centre B et d'angle $90°$ envoyant A sur C. Alors $P' = \rho(P)$ vérifie $P'C = PA = 1$, $BP' = BP = 2$ et $\widehat{PBP'} = 90°$, donc $PP' = 2\sqrt{2}$. Dans le triangle $PP'C$: $PC = 3$, $P'C = 1$, $PP' = 2\sqrt{2}$, et $1 + 8 = 9$: il est rectangle en P'. Donc $\widehat{BP'C} = \widehat{BP'P} + \widehat{PP'C} = 45° + 90° = 135°$, et $\widehat{APB} = \widehat{CP'B} = 135°$.

Solution de l'exercice 8.5. Notons $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega$ les affixes de A, B, C, D, Ω. Dire que Ω est le centre de la similitude directe envoyant $A \mapsto C$ et $B \mapsto D$ signifie qu'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$\gamma - \omega = a(\alpha - \omega), \qquad \delta - \omega = a(\beta - \omega).$$

En divisant membre à membre, $\frac{\delta-\omega}{\gamma-\omega} = \frac{\beta-\omega}{\alpha-\omega}$. En posant $a' = \frac{\beta-\omega}{\alpha-\omega}$, on obtient $\beta - \omega = a'(\alpha - \omega)$ et $\delta - \omega = a'(\gamma - \omega)$: la similitude directe de centre Ω et de rapport complexe a' envoie $A \mapsto B$ et $C \mapsto D$.

À retenir

C'est le principe d'échange, à retenir absolument.

8.7 Problèmes d'entraînement

Exercice 8.6 ★★ (Lemme d'Archimède, forme forte). Soient $\mathcal{C}$ un cercle, $[AB]$ une corde et $\mathcal{C}'$ un cercle tangent intérieurement à $\mathcal{C}$ en T et tangent à $[AB]$ en P. Soit M le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas T. Montrer que $MP \cdot MT = MA^2$.

Exercice 8.7 ★★. Soient trois cercles deux à deux tangents extérieurement. Montrer que les trois tangentes communes intérieures sont concourantes.

Exercice 8.8 ★★★ (Monge). Soient trois cercles de rayons deux à deux distincts. Montrer que leurs trois centres d'homothétie externes sont alignés.

Exercice 8.9 ★★★ (Shortlist). Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique et M le point de Miquel du quadrilatère complet associé. Montrer que M est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O sur la droite (XY), où $X = (AB) \cap (CD)$ et $Y = (AD) \cap (BC)$.

À retenir — Bilan du chapitre

- Tangence de cercles ⇒ homothétie de centre le point de tangence : tangentes parallèles, points homologues alignés avec le centre.
- Lemme d'Archimède : (TP) passe par le milieu d'arc.
- Similitude directe : unique similitude $[AB] \to [CD]$; son centre est le second point d'intersection de $\odot(XAC)$ et $\odot(XBD)$ où $X = (AB) \cap (CD)$.
- Échange : centre de $[AB] \to [CD]$ = centre de $[AC] \to [BD]$.
- Point de Miquel : trois (ou quatre) cercles concourants — à chercher dès qu'un quadrilatère complet apparaît.

CHAPITRE 9

9 Méthodes calculatoires : trigonométrie, complexes, coordonnées barycentriques

Un problème de géométrie a toujours une solution calculatoire. Elle est parfois longue, mais elle est sûre : c'est le filet de sécurité du compétiteur. Savoir choisir entre trigonométrie, nombres complexes et coordonnées barycentriques fait gagner des heures. Toutes les formules des tableaux de ce chapitre sont démontrées : un calcul n'a de valeur que si ses outils sont justes.

9.1 Choisir sa méthode

Méthode 9.1.1 — Arbre de décision

- **Trigonométrie** : angles imposés, bissectrices, rapports de longueurs, un seul cercle. Outils : loi des sinus, Al-Kashi, Ceva trigonométrique.
- **Nombres complexes** : un cercle privilégié que l'on place comme cercle unité, beaucoup de milieux d'arcs, de réflexions, de projections. Fatal si plusieurs cercles quelconques interviennent.
- **Coordonnées barycentriques** : configurations liées au triangle ABC (points remarquables, céviennes, conjugués isogonaux, cercles passant par des sommets). Le triangle de référence doit être le triangle de l'énoncé.
- **Coordonnées cartésiennes** : perpendicularités, milieux, cercles de diamètres donnés, et surtout configurations avec un repère naturel (triangle rectangle, carré).

9.2 Trigonométrie

Théorème 9.2.1 (Formules du triangle)

Dans un triangle ABC de circonrayon R, d'inrayon r, de demi-périmètre s et d'aire S :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = rs = \frac{abc}{4R} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad r = (s-a)\tan\frac{A}{2},$$

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \qquad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \qquad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Démonstration. Les formules des deux premières lignes sont les théorèmes 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 et la proposition 4.3.3 ; la formule de $\cos A$ est Al-Kashi. Pour les demi-angles, $\sin\frac{A}{2}$ et $\cos\frac{A}{2}$ sont positifs car $0 < \frac{A}{2} < 90°$, et

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc},$$

$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2} = \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc} = \frac{(b+c-a)(a+b+c)}{4bc} = \frac{s(s-a)}{bc}$. ∎

Exemple 9.2.2 (Longueur d'une bissectrice). *Montrer que la bissectrice intérieure issue de A a pour longueur $t_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$.*

Solution. En écrivant $[ABC] = [ABD] + [ADC]$ où D est le pied de la bissectrice, et en calculant chaque aire par la formule du sinus avec l'angle en A :

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}c\,t_a\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}b\,t_a\sin\frac{A}{2} \Longrightarrow t_a = \frac{bc\sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c},$$

en utilisant $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$. Avec le théorème 9.2.1, $t_a^2 = \frac{4bc\,s(s-a)}{(b+c)^2}$: on retrouve l'exemple 4.5.2.

9.3 Les nombres complexes

On identifie le plan à $\mathbb{C}$. La méthode consiste à placer le cercle privilégié comme cercle unité : alors $|z| = 1$ équivaut à $\bar{z} = \frac{1}{z}$, ce qui linéarise tout.

Formulaire complexe — cercle unité (a, b, c, d de module 1)

Configuration	Équation ou condition
Droite (ab) (corde)	$z + ab\bar{z} = a + b$
Tangente en a	$z + a^2\bar{z} = 2a$
Intersection des cordes (ab), (cd)	$z = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}$
Intersection des tangentes en a, b	$z = \frac{2ab}{a+b}$
Projeté orthogonal de p sur (ab)	$z = \frac{1}{2}(a + b + p - ab\bar{p})$
Symétrique de p par rapport à (ab)	$z = a + b - ab\bar{p}$
Orthocentre de abc	$h = a + b + c$
Centre de gravité	$g = \frac{a+b+c}{3}$
z_1, z_2, z_3 alignés	$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \in \mathbb{R}$
$(z_1z_2) \perp (z_3z_4)$	$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R}$
z_1, z_2, z_3, z_4 cocycliques ou alignés	$\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} \in \mathbb{R}$

Justification du formulaire. *Critères généraux.* Pour $u \neq 0$, l'argument de u est l'angle orienté du vecteur réel 1 vers le vecteur u. Donc $\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$ est réel si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{z_3z_1}$ et $\overrightarrow{z_2z_1}$ sont colinéaires (alignement), et $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}$ est imaginaire pur si, et seulement si, les directions diffèrent de $90°$ (perpendicularité). Pour la cocyclicité, $\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ mesure (modulo $180°$ si l'on ne garde que la direction) l'angle $\measuredangle(z_3z_2, z_3z_1)$; le quotient du tableau est réel si, et seulement si, $\measuredangle(z_3z_2, z_3z_1) = \measuredangle(z_4z_2, z_4z_1)$, ce qui est le critère du théorème 2.3.1.

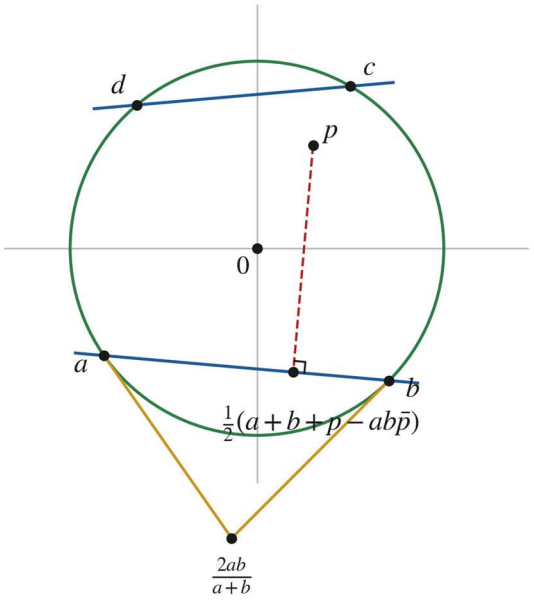
Corde. Un point z est sur (ab) si, et seulement si, $\frac{z-a}{b-a}$ est réel, c'est-à-dire égal à son conjugué $\frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}$. Avec $\bar{a}=\frac{1}{a}$ et $\bar{b}=\frac{1}{b}$, on a $\bar{b}-\bar{a}=\frac{a-b}{ab}$, donc le conjugué vaut $\frac{ab^{-}-b}{a-b}$. L'égalité $\frac{z-a}{b-a}=\frac{ab\bar{z}-b}{a-b}$ s'écrit $-(z-a)=ab\bar{z}-b$, soit $z+ab\bar{z}=a+b$.

Tangente. Le point z est sur la tangente en a si, et seulement si, $(z-a)\perp(a-0)$, c'est-à-dire $\frac{z-a}{a}$ imaginaire pur : $\frac{z-a}{a}=-\overline{\left(\frac{z-a}{a}\right)}=-a(\bar{z}-\bar{a})=-a\bar{z}+1$, soit $z+a^2\bar{z}=2a$.

Intersections. En retranchant les équations des cordes (ab) et (cd), $(ab-cd)\bar{z}=a+b-c-d$; en reportant dans $z=a+b-ab\bar{z}$, on obtient $z=\frac{(a+b)(ab-\ \ )-ab(a+b-c-d)}{ab-c}=\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-c}$. De même, les équations des tangentes en a et b donnent $(a^2-b^2)\bar{z}=2(a-b)$, $\bar{z}=\frac{2}{a+b}$, puis $z=2a-\frac{2a^2}{a+b}=\frac{2ab}{a+b}$.

Symétrique et projeté. Posons $p'=a+b-ab\bar{p}$ et $m=1/2\,(p+p')$. D'une part $m+ab\bar{m}=1/2\,[(a+b+p-ab\bar{p})+ab(1/a+1/b+\bar{p}-p/ab)]=a+b$: m est sur (ab). D'autre part $p'-p=a+b-p-ab\bar{p}$ a pour conjugué $\frac{a+b-p}{ab}-\bar{p}=\frac{p'-p}{ab}$, tandis que $\overline{b-a}=-\frac{b-a}{ab}$; donc $\frac{p'-p}{b-a}$ est égal à l'opposé de son conjugué : il est imaginaire pur, et $(pp')\perp(ab)$. Ainsi p' est le symétrique de p et m le projeté orthogonal.

Orthocentre et centre de gravité. Le centre du cercle circonscrit est l'origine ; la relation d'Euler $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ (théorème 4.2.1) donne $h=a+b+c$, et $g=\frac{a+b+c}{3}$ par définition de l'isobary-centre. ■



Le formulaire complexe sur le cercle unité : cordes, intersection des tangentes en a et b, projeté orthogonal de p sur (ab).

Théorème 9.3.1 (Paramétrage du cercle inscrit)

Si A, B, C sont sur le cercle unité, on peut écrire $a=u^2$, $b=v^2$, $c=w^2$ avec $|u|=|v|=|w|=1$ et un choix de signes tel que les milieux des arcs $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, $\widehat{AB}$ ne contenant pas respectivement A, B, C soient $-vw$, $-wu$, $-uv$. Alors :

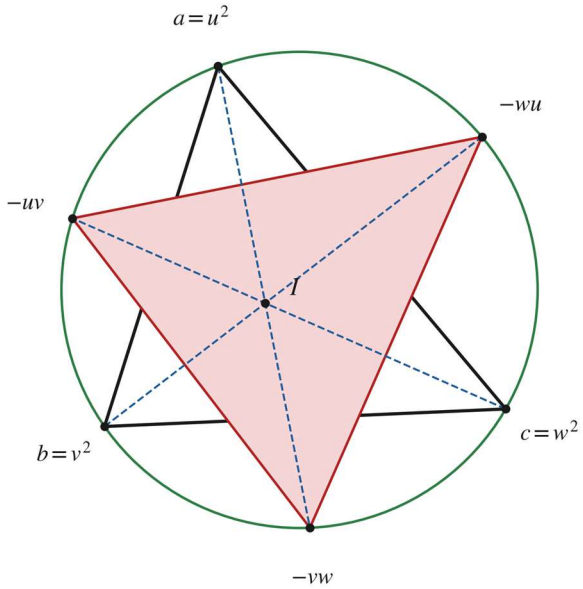
$$I = -(uv + vw + wu), \qquad I_A = uv + wu - vw, \qquad \text{et de même pour } I_B,\ I_C.$$

Ce paramétrage est la technique pour tout problème mêlant cercle circonscrit et centre du cercle inscrit.

Démonstration. *Choix des racines.* Numérotons les sommets dans le sens direct et écrivons $a = e^{2i\alpha}$, $b = e^{2i\beta}$, $c = e^{2i\gamma}$ avec $\alpha < \beta < \gamma < \alpha + \pi$. L'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant pas A correspond aux arguments de 2β à 2γ ; son milieu est $e^{i(\beta+\gamma)}$. L'arc $\overset{\frown}{CA}$ ne contenant pas B va de 2γ à $2\alpha + 2\pi$; son milieu est $e^{i(\gamma+\alpha+\pi)} = -e^{i(\gamma+\alpha)}$. L'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas C a pour milieu $e^{i(\alpha+\beta)}$. Posons $u = e^{i\alpha}$, $v = -e^{i\beta}$, $w = e^{i\gamma}$: alors $u^2 = a$, $v^2 = b$, $w^2 = c$, et les trois milieux sont bien $-vw$, $-wu$, $-uv$.

Le centre inscrit. Notons $M_A = -vw$, $M_B = -wu$, $M_C = -uv$. La bissectrice issue de A passe par M_A (milieu de l'arc, corollaire 2.2.2 (b)). Montrons que $(AM_A) \perp (M_BM_C)$: on a $a - M_A = u^2 + vw$ et $M_B - M_C = u(v - w)$, et le quotient $q = \dfrac{u^2+vw}{u(v-w)}$ a pour conjugué $\dfrac{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{vw}}{\frac{1}{u}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{w}\right)} = \dfrac{vw+u^2}{u(w-v)} = -q$: il est imaginaire pur. Ainsi les trois bissectrices (AM_A), (BM_B), (CM_C) sont les hauteurs du triangle $M_AM_BM_C$, inscrit dans le cercle unité ; leur point commun I est l'orthocentre de ce triangle : $I = M_A + M_B + M_C = -(uv + vw + wu)$.

Le centre exinscrit. Par la proposition 2.4.1, le cercle de diamètre $[II_A]$ passe par B et C ; son centre est donc sur la médiatrice de $[BC]$ et sur la droite (AI) : c'est M_A (lemme du trident, preuve du théorème 4.3.4). Donc M_A est le milieu de $[II_A]$ et $I_A = 2M_A - I = -2vw + uv + vw + wu = uv + wu - vw$. ■



Paramétrage a = u², b = v², c = w² : les milieux d'arcs sont −vw, −wu, −uv, et I est l'orthocentre de leur triangle (rouge).

Exemple 9.3.2 (Le lemme du trident par les complexes). *Avec les notations ci-dessus, montrer que $M = -vw$ (milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant pas A) vérifie $MB = MC = MI$.*

Solution. $MB = |-vw - v^2| = |v|\,|w + v| = |v + w|$ et $MC = |-vw - w^2| = |w|\,|v + w| = |v + w|$: donc $MB = MC$. Enfin

$$MI = |-vw + uv + vw + wu| = |uv + wu| = |u|\,|v + w| = |v + w|.$$

D'où $MB = MC = MI$.

9.4 Les coordonnées barycentriques

Définition 9.4.1 (Coordonnées barycentriques)

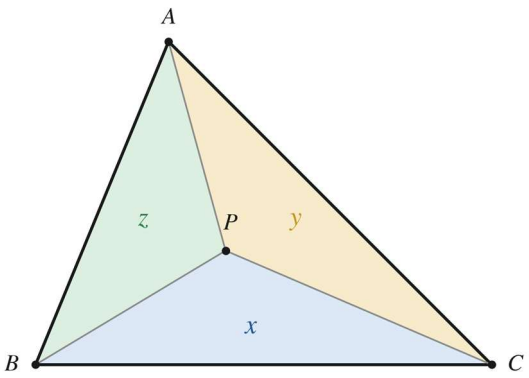
Le triangle de référence est ABC, d'aire S. Tout point P du plan s'écrit de manière unique, à un facteur multiplicatif près, sous la forme $P = (x:y:z)$ signifiant $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ avec $x + y + z \neq 0$. On dit que les coordonnées sont normalisées si $x + y + z = 1$; alors

$$x = \frac{[PBC]}{[ABC]}, \qquad y = \frac{[PCA]}{[ABC]}, \qquad z = \frac{[PAB]}{[ABC]}$$

(aires orientées).

Justification. Fixons une origine Ω. La relation $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ équivaut à $(x + y + z)\overrightarrow{\Omega P} = x\overrightarrow{\Omega A} + y\overrightarrow{\Omega B} + z\overrightarrow{\Omega C}$: pour $x + y + z \neq 0$, elle définit un unique point P, qui ne change pas si l'on multiplie (x, y, z) par un réel non nul. Réciproquement, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base, donc tout P s'écrit $\overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire $P = (1 - y - z)A + yB + zC$ au sens des barycentres, et ces coefficients normalisés sont uniques.

Pour les aires : l'aire orientée $[PBC] = 1/2 \det(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC})$ est une fonction affine de P. Si $P = xA + yB + zC$ avec $x + y + z = 1$, elle vaut donc $x[ABC] + y[BBC] + z[CBC] = x[ABC]$. De même pour les deux autres. ■



Coordonnées barycentriques normalisées : x, y, z sont les aires des triangles PBC, PCA, PAB rapportées à l'aire de ABC.

Coordonnées des points remarquables ($S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$, etc., notations de Conway)

Point	Coordonnées	Point	Coordonnées
Sommets	$A = (1:0:0)$, $B = (0:1:0)$, $C = (0:0:1)$	Milieu de $[BC]$	$(0:1:1)$
Centre de gravité	$G = (1:1:1)$	Centre du cercle inscrit	$I = (a:b:c)$
Centre exinscrit	$I_A = (-a:b:c)$	Point de Lemoine	$K = (a^2:b^2:c^2)$
Circoncentre	$O = (a^2S_A:b^2S_B:c^2S_C)$	Orthocentre	$H = (S_BS_C:S_CS_A:S_AS_B)$
Point de Nagel	$(s-a:s-b:s-c)$	Point de Gergonne	$\big((s-b)(s-c):(s-c)(s-a):(s-a)(s-b)\big)$

Justification du tableau. Les sommets, le milieu et G découlent de la définition. Pour les autres, on calcule les aires orientées des triangles PBC, PCA, PAB (triangle ABC direct).

- I est à la distance r des trois côtés et intérieur : $[IBC] = 1/2\,ar$, $[ICA] = 1/2\,br$, $[IAB] = 1/2\,cr$, d'où $I = (a{:}\,b{:}\,c)$. Pour I_A, à la distance r_A des trois droites et situé de l'autre côté de (BC) : $[I_ABC] = -1/2\,ar_A$, $[I_ACA] = 1/2\,br_A$, $[I_AAB] = 1/2\,cr_A$, d'où $I_A = (-a{:}\,b{:}\,c)$.
- O : l'angle au centre $\widehat{BOC}$ vaut $2A$ (théorème 2.2.1), donc $[OBC] = 1/2\,R^2\sin 2A$ (avec le signe convenable si A est obtus : l'aire orientée vaut encore $1/2\,R^2\sin 2A$). Or $\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{S_A}{bc} = \frac{a^2S_A}{Rabc}$, proportionnel à a^2S_A.
- H (triangle acutangle ; le cas général s'en déduit par un calcul d'aires orientées identique) : $[HBC] = 1/2\,a\cdot HH_A = aR\cos B\cos C$ (exemple 7.6.1), proportionnel, après division par $R\cos A\cos B\cos C$, à $\frac{a}{\cos A} = \frac{abc}{S_A}$, donc à $\frac{1}{S_A}$, c'est-à-dire à S_BS_C.
- K est le conjugué isogonal de $G = (1{:}\,1{:}\,1)$, donc $K = (a^2{:}\,b^2{:}\,c^2)$ par le théorème 9.4.2 (e) ci-dessous.
- Nagel : c'est l'exemple 9.4.4 ci-dessous. Gergonne : le pied de la cévienne issue de A est $(0{:}\,s-c{:}\,s-b)$, qui divise $[BC]$ dans le rapport $\frac{s-b}{s-c}$ (théorème 4.3.2) ; le point $\big((s-b)(s-c){:}\,(s-c)(s-a){:}\,(s-a)(s-b)\big)$, proportionnel à $\left(\frac{1}{s-a}{:}\,\frac{1}{s-b}{:}\,\frac{1}{s-c}\right)$, est sur la droite joignant A à ce pied, et de même pour les deux autres céviennes. ■

Théorème 9.4.2 (Droites, alignement, concourance)

(a) Une droite a une équation $ux + vy + wz = 0$, avec (u, v, w) non proportionnel à $(1,1,1)$.

(b) Trois points $P_i = (x_i{:}\,y_i{:}\,z_i)$ sont alignés si, et seulement si, $\det(x_i, y_i, z_i) = 0$.

(c) Trois droites d'équations $u_ix + v_iy + w_iz = 0$ sont concourantes ou parallèles si, et seulement si, $\det(u_i, v_i, w_i) = 0$.

(d) La droite (BC) a pour équation $x = 0$; l'équation $x + y + z = 0$ ne contient aucun point : c'est, par convention, la droite à l'infini.

(e) Si $P = (x{:}\,y{:}\,z)$ est intérieur au triangle, son conjugué isogonal est $\left(\frac{a^2}{x}{:}\,\frac{b^2}{y}{:}\,\frac{c^2}{z}\right)$; son conjugué isotomique (point de concours des céviennes symétriques par rapport aux milieux des côtés) est $\left(\frac{1}{x}{:}\,\frac{1}{y}{:}\,\frac{1}{z}\right)$.

Démonstration.

(a) Une droite est l'ensemble des zéros d'une fonction affine non constante f. Pour P normalisé, $P = xA + yB + zC$ donne $f(P) = xf(A) + yf(B) + zf(C)$; l'équation s'écrit $ux + vy + wz = 0$ avec $u = f(A)$, $v = f(B)$, $w = f(C)$, non tous égaux (f non constante), et elle reste valable pour des coordonnées non normalisées par homogénéité.

(b) Si les trois points sont sur une droite $ux + vy + wz = 0$, le vecteur non nul (u, v, w) est solution du système dont la matrice a pour lignes les (x_i, y_i, z_i) : le déterminant est nul. Réciproquement, si le déterminant est nul, il existe $(u, v, w) \neq 0$ avec $ux_i + vy_i + wz_i = 0$ pour tout i ; ce vecteur n'est pas proportionnel à $(1,1,1)$ car $x_i + y_i + z_i \neq 0$; c'est donc une droite contenant les trois points.

(c) De même, le déterminant est nul si, et seulement si, le système admet une solution $(x,y,z) \neq 0$. Si $x+y+z \neq 0$, c'est un point commun ; si $x+y+z=0$, les trois droites ont une même direction (celle du vecteur $x\overrightarrow{\Omega A}+y\overrightarrow{\Omega B}+z\overrightarrow{\Omega C}$, indépendant de l'origine) : elles sont parallèles.

(d) $[PBC]=0$ si, et seulement si, $P \in (BC)$. La somme des coordonnées d'un point est non nulle par définition.

(e) La cévienne (AP) coupe (BC) en $D=(0:y:z)$, qui vérifie $\frac{BD}{DC}=\frac{z}{y}$. Par la relation $(*)$ de la preuve du théorème 6.4.1, $\frac{\sin\widehat{BAD}}{\sin\widehat{DAC}}=\frac{z}{y}\cdot\frac{b}{c}$. L'isogonale (AD') échange les deux angles, donc $\frac{BD'}{D'C}=\frac{y}{z}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{c}{b}=\frac{c^2/z}{b^2/y}$, et $D'=\left(0:\frac{b^2}{y}:\frac{c^2}{z}\right)$. Le point $\left(\frac{a^2}{x}:\frac{b^2}{y}:\frac{c^2}{z}\right)$ est sur la droite (AD'), formée des points $\left(t:\frac{b^2}{y}:\frac{c^2}{z}\right)$; par symétrie des rôles, il est sur les trois isogonales. Pour le conjugué isotomique, le symétrique de D par rapport au milieu de $[BC]$ est $(0:z:y)$, proportionnel à $\left(0:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}\right)$, et l'on conclut de même. ■

Théorème 9.4.3 (Cercles et distances)

(a) Pour un point P de coordonnées normalisées (x,y,z), la puissance de P par rapport au cercle circonscrit vaut $-(a^2yz+b^2zx+c^2xy)$. Le cercle circonscrit a donc pour équation $a^2yz+b^2zx+c^2xy=0$.

(b) Tout cercle a une équation de la forme $a^2yz+b^2zx+c^2xy-(x+y+z)(ux+vy+wz)=0$.

(c) Formule de distance : si le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ s'écrit $x\overrightarrow{\Omega A}+y\overrightarrow{\Omega B}+z\overrightarrow{\Omega C}$ avec $x+y+z=0$ (coordonnées de Q normalisées moins celles de P), alors $PQ^2=-a^2yz-b^2zx-c^2xy$.

Démonstration.

(c) Le vecteur $x\overrightarrow{\Omega A}+y\overrightarrow{\Omega B}+z\overrightarrow{\Omega C}$ ne dépend pas de Ω lorsque $x+y+z=0$; prenons $\Omega=A$: $\overrightarrow{PQ}=y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC}$. Avec $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=b^2+c^2-a^2$:

$$PQ^2=y^2c^2+z^2b^2+yz(b^2+c^2-a^2)=-a^2yz+c^2y(y+z)+b^2z(y+z)=-a^2yz-c^2xy-b^2zx,$$

car $y+z=-x$.

(a) Prenons l'origine en O, de sorte que $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=R$ et $2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2R^2-c^2$ (Al-Kashi dans OAB), etc. Pour P normalisé, $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ et

$$OP^2-R^2=R^2(x^2+y^2+z^2)+\sum 2xy\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-R^2(x+y+z)^2=\sum xy\left(2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-2R^2\right)=-\sum c^2xy.$$

(b) Soit $\mathcal{C}'$ un cercle de centre Q et de rayon ρ. La différence $\mathrm{pow}(P,\mathcal{C}')-\mathrm{pow}(P,\Gamma)=(PQ^2-\rho^2)-(PO^2-R^2)$ est une fonction affine de P (les termes en $\left|\overrightarrow{\Omega P}\right|^2$ se simplifient). Par l'argument de (a) du théorème 9.4.2, elle s'écrit $ux+vy+wz$ pour P normalisé, avec $u=\mathrm{pow}(A,\mathcal{C}')$, etc. Donc $P\in\mathcal{C}'$ si, et seulement si, $-(a^2yz+b^2zx+c^2xy)+(ux+vy+wz)=0$; en homogénéisant par $x+y+z=1$, on obtient l'équation annoncée. ■

Exemple 9.4.4 (Concourance par barycentriques). *Montrer que les droites joignant chaque sommet au point de contact du cercle exinscrit opposé concourent (point de Nagel), à l'aide des coordonnées barycentriques.*

Solution. Le cercle exinscrit dans l'angle $\hat{A}$ touche $[BC]$ en X_A avec $BX_A = s - c$ et $X_AC = s - b$ (théorème 4.3.2), donc $X_A = (0 : s - b : s - c)$ (le poids de B est proportionnel à la distance X_AC). La droite (AX_A) est formée des points $(t : s - b : s - c)$; elle a pour équation $(s - c)y - (s - b)z = 0$. Les trois équations analogues sont

$$(s - c)y - (s - b)z = 0, \qquad (s - a)z - (s - c)x = 0, \qquad (s - b)x - (s - a)y = 0,$$

et le point $(s - a : s - b : s - c)$ vérifie les trois (par exemple $(s - c)(s - b) - (s - b)(s - c) = 0$). Les trois céviennes concourent en ce point.

9.5 Exemples résolus

Exemple 9.5.1 (Symétrique de l'orthocentre par les complexes). *Soit ABC un triangle inscrit dans le cercle unité et H son orthocentre. Montrer que le symétrique de H par rapport à (BC) est sur le cercle circonscrit.*

Solution. Avec $|a| = |b| = |c| = 1$ et $h = a + b + c$, le symétrique de h par rapport à la corde (bc) est

$$h' = b + c - bc\bar{h} = b + c - bc\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = b + c - \frac{bc}{a} - c - b = -\frac{bc}{a}.$$

Or $\left|-\frac{bc}{a}\right| = 1$: le point h' est sur le cercle unité. On retrouve le théorème 7.3.1 (a) en une ligne.

Exemple 9.5.2 (Distance en barycentriques). *Retrouver la formule d'Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr$.*

Solution. Normalisons : $I = \left(\frac{a}{2s}, \frac{b}{2s}, \frac{c}{2s}\right)$. Par le théorème 9.4.3 (a) :

$$\mathrm{pow}(I) = -\frac{a^2bc + b^2ca + c^2ab}{4s^2} = -\frac{abc(a + b + c)}{4s^2} = -\frac{abc}{2s} = -\frac{4RS}{2s} = -2Rr,$$

en utilisant $abc = 4RS$ et $S = rs$. Comme $\mathrm{pow}(I) = OI^2 - R^2$, on conclut $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

9.6 Exercices

Exercice 9.1 ★. Soient A, B, C, D sur le cercle unité. Montrer que $(AB) \perp (CD)$ si, et seulement si, $ab + cd = 0$.

Exercice 9.2 ★★ (Droite de Nagel). Montrer, en coordonnées barycentriques normalisées, que $\mathrm{Na} = 3G - 2I$; en déduire que I, G et le point de Nagel sont alignés, avec $IG/G\mathrm{Na} = 1/2$.

Exercice 9.3 ★★. Soit ABC un triangle inscrit dans le cercle unité, M, N, P les milieux des arcs $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas A, B, C. Montrer que I est l'orthocentre du triangle MNP.

Exercice 9.4 ★★. Soit ABC un triangle. Déterminer les coordonnées barycentriques du pied de la symédiane issue de A, puis retrouver $\frac{BS}{SC} = \frac{c^2}{b^2}$.

Exercice 9.5 ★★. Soient A, B, C sur le cercle unité et P un point du plan. Montrer que les projetés orthogonaux de P sur les trois côtés sont alignés si, et seulement si, $|p| = 1$ (droite de Simson).

9.7 Corrigés

Solution de l'exercice 9.1. (AB) a pour vecteur directeur $a - b$ et (CD) le vecteur $c - d$. On a

$$(AB)\perp(CD)\Leftrightarrow\frac{a-b}{c-d}\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{a-b}{c-d}+\overline{\left(\frac{a-b}{c-d}\right)}=0.$$

Or $\overline{a-b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-\frac{a-b}{ab}$ (en utilisant $\bar{a}=1/a$) et de même pour $c-d$, donc $\overline{\left(\frac{a-b}{c-d}\right)}=\frac{cd}{ab}\cdot\frac{a-b}{c-d}$. L'équation devient $\frac{a-b}{c-d}\left(1+\frac{cd}{ab}\right)=0$, c'est-à-dire $ab+cd=0$.

Solution de l'exercice 9.2. En normalisant, $G=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, $I=\left(\frac{a}{2s},\frac{b}{2s},\frac{c}{2s}\right)$ et $\mathrm{Na}=\left(\frac{s-a}{s},\frac{s-b}{s},\frac{s-c}{s}\right)$. Alors

$$3G-2I=\left(1-\frac{a}{s},1-\frac{b}{s},1-\frac{c}{s}\right)=\left(\frac{s-a}{s},\frac{s-b}{s},\frac{s-c}{s}\right)=\mathrm{Na}.$$

La relation $\mathrm{Na}=3G-2I$ signifie $\overrightarrow{I\mathrm{Na}}=3\overrightarrow{IG}$, donc I, G, Na sont alignés et $IG/G\mathrm{Na}=1/2$: c'est l'exact analogue de la droite d'Euler, avec (O,G,H) remplacé par (I,G,Na).

Solution de l'exercice 9.3. Avec $a=u^2$, $b=v^2$, $c=w^2$ et $M=-vw$, $N=-wu$, $P=-uv$, l'orthocentre de MNP — triangle inscrit dans le cercle unité — vaut $M+N+P=-(uv+vw+wu)=I$.

Solution de l'exercice 9.4. Le point de Lemoine est $K=(a^2:b^2:c^2)$. Le pied de la cévienne issue de A passant par K s'obtient en annulant la première coordonnée : $S=(0:b^2:c^2)$. Or dans $(0:y:z)$ le rapport $\frac{BS}{SC}=\frac{z}{y}=\frac{c^2}{b^2}$.

Solution de l'exercice 9.5. Le projeté de p sur (bc) est $x=\frac{1}{2}(b+c+p-bc\bar{p})$, et de même pour y et z. Alors

$$x-y=\frac{1}{2}(b-a+ac\bar{p}-bc\bar{p})=\frac{(b-a)(1-c\bar{p})}{2},\qquad x-z=\frac{(c-a)(1-b\bar{p})}{2}.$$

L'alignement équivaut à $\frac{x-y}{x-z}\in\mathbb{R}$, c'est-à-dire à $\frac{(b-a)(1-c\bar{p})}{(c-a)(1-b\bar{p})}\in\mathbb{R}$. En conjuguant et en simplifiant (avec $\bar{a}=1/a$, etc.), cette condition se réduit à $p\bar{p}=1$, c'est-à-dire $|p|=1$.

9.8 Problèmes d'entraînement

Exercice 9.6 ★★. Soit ABC un triangle inscrit dans le cercle unité, H son orthocentre, et P un point du cercle. Montrer que le milieu de $[PH]$ est sur le cercle des neuf points, dont on donnera l'équation complexe.

Exercice 9.7 ★★★ (Barycentriques). Montrer que l'équation du cercle inscrit est

$$(s-a)^2x^2+(s-b)^2y^2+(s-c)^2z^2-2(s-b)(s-c)yz-2(s-c)(s-a)zx-2(s-a)(s-b)xy=0.$$

Indication : c'est une conique tangente aux trois côtés ; vérifier la tangence à $x=0$.

Exercice 9.8 ★★. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique inscrit dans le cercle unité. Montrer que les orthocentres des quatre triangles BCD, CDA, DAB, ABC forment un quadrilatère isométrique à $ABCD$ (image par une symétrie centrale).

Exercice 9.9 ★★ (Napoléon par les complexes). Redémontrer le théorème de Napoléon en écriture complexe, en utilisant $j=e^{2i\pi/3}$ et la caractérisation $z_1+jz_2+j^2z_3=0$ des triangles équilatéraux directs.

À retenir — Bilan du chapitre

- Complexes : placer le cercle clé en cercle unité ; $\bar{z} = 1/z$; $h = a + b + c$; $I = -(uv + vw + wu)$.
- Barycentriques : $I = (a : b : c)$, $K = (a^2 : b^2 : c^2)$, cercle circonscrit $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$.
- Conjugué isogonal : inverser et pondérer par a^2, b^2, c^2.
- Distance barycentrique : $PQ^2 = -a^2yz - b^2zx - c^2xy$ pour un déplacement de somme nulle.
- Avant de calculer : estimer le temps. Un calcul de trois pages qui aboutit vaut mieux qu'une synthèse élégante qui n'aboutit pas — mais l'inverse est vrai aussi.

PARTIE III — Les techniques pointues

CHAPITRE 10

10 L'inversion

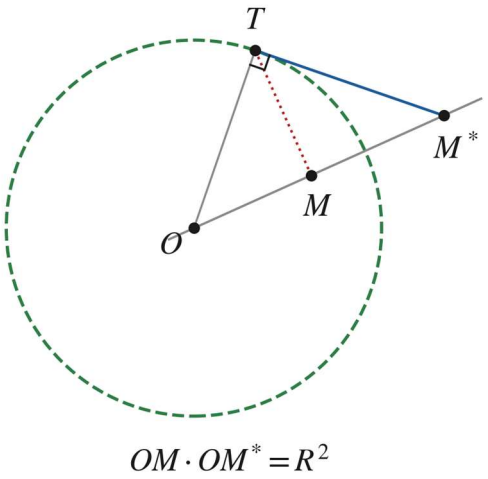
L'inversion échange droites et cercles. C'est donc l'outil qui simplifie les figures surchargées de cercles : bien choisie, elle transforme une configuration de quatre cercles tangents en trois droites et un cercle, et le problème devient trivial. Mal choisie, elle complique tout. Le choix du pôle est tout.

10.1 Définition et premières propriétés

Définition 10.1.1 (Inversion)

Soient O un point et $k \in \mathbb{R}^*$. L'inversion $\mathrm{Inv}(O,k)$ de pôle O et de puissance k associe à tout point $M \neq O$ le point M' de la droite (OM) défini par $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$. On écrit $M' = M^*$. L'inversion est une involution : $(M^*)^* = M$. Si $k > 0$, le cercle $\mathcal{C}\left(O, \sqrt{k}\right)$ — le cercle d'inversion — est fixe point par point.

En écriture vectorielle, $\overrightarrow{OM^*} = \frac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM}$; pour $k > 0$, M^* est sur la demi-droite $[OM)$, et l'inversion échange l'intérieur et l'extérieur du cercle d'inversion. Si M est extérieur, M^* est le milieu de la corde des contacts des tangentes issues de M (figure ci-dessous : le triangle OTM est rectangle en T, et $OM \cdot OM^* = OT^2$ par la relation métrique dans le triangle rectangle).



Un point M et son inverse M par rapport au cercle d'inversion de centre O et de rayon R.*

Proposition 10.1.2 (Images des droites et des cercles)

Soit $\mathrm{Inv}(O,k)$ une inversion.

(a) Une droite passant par O (privée de O) est globalement invariante.

(b) Une droite ne passant pas par O a pour image un cercle passant par O (privé de O), et réciproquement.

(c) Un cercle ne passant pas par O a pour image un cercle ne passant pas par O. Plus précisément, si $\mathcal{C}$ a pour centre ω et si $p = \mathrm{pow}(O,\mathcal{C}) \neq 0$, alors $\mathcal{C}^*$ est l'image de $\mathcal{C}$ par l'homothétie $h\left(O, \frac{k}{p}\right)$.

Attention.
Le centre d'un cercle n'a pas pour image le centre de son image.

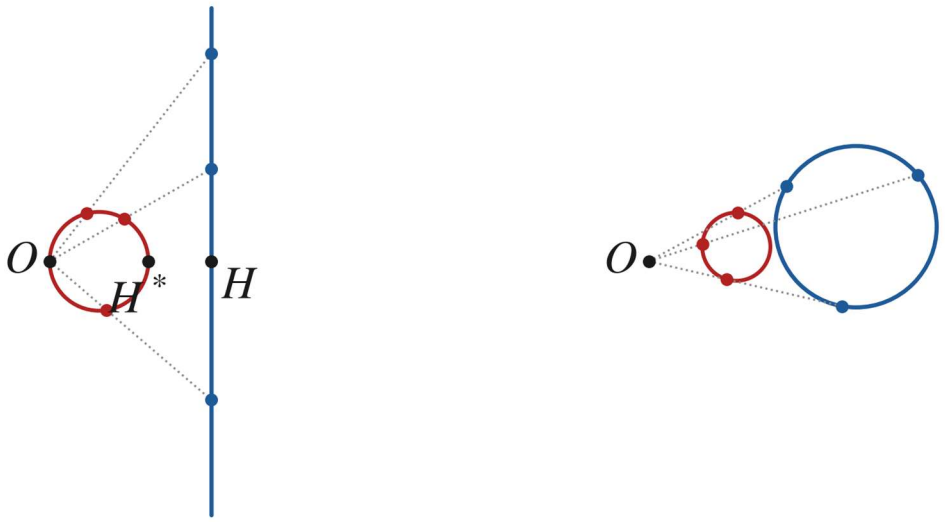
Démonstration.

(a) Par définition, M^* est sur la droite (OM).

Lemme. Pour $A, B \neq O$ non alignés avec O, les triangles OAB et OB^*A^* sont semblables. En effet $\overline{OA} \cdot \overline{OA^*} = \overline{OB} \cdot \overline{OB^*} = k$ donne $\frac{OA}{OB} = \frac{OB^*}{OA^*}$, et l'angle en O est le même (les droites $(OA^*) = (OA)$ et $(OB^*) = (OB)$; si $k < 0$, les deux demi-droites sont retournées, ce qui ne change pas l'angle géométrique). Deux triangles ayant un angle égal compris entre des côtés proportionnels sont semblables.

(b) Soit d une droite ne passant pas par O, H le projeté de O sur d et $M \in d$, $M \neq H$. Par le lemme, $\widehat{OM^*H^*} = \widehat{OHM} = 90°$: le point M^* voit $[OH^*]$ sous un angle droit, donc (corollaire 2.2.2) il est sur le cercle de diamètre $[OH^*]$. Réciproquement, tout point $N \neq O$ de ce cercle est l'inverse d'un point de d : la droite (ON) n'est pas parallèle à d (sinon elle serait la perpendiculaire en O à (OH^*), tangente en O au cercle de diamètre $[OH^*]$, et N serait égal à O) ; elle coupe donc d en un point M, et M^* est à la fois sur (ON) et sur le cercle, donc $M^* = N$. Comme l'inversion est une involution, l'image d'un cercle passant par O est une droite ne passant pas par O.

(c) Si $M \in \mathcal{C}$ et si la droite (OM) recoupe $\mathcal{C}$ en N ($N = M$ en cas de tangence), alors $\overline{OM} \cdot \overline{ON} = p$ (théorème 5.1.2), donc $\overline{OM^*} = \frac{k}{\overline{OM}} = \frac{k}{p}\overline{ON}$: M^* est l'image de N par $h\left(O, \frac{k}{p}\right)$. Quand M décrit $\mathcal{C}$, N aussi, donc $\mathcal{C}^* = h\left(O, \frac{k}{p}\right)(\mathcal{C})$, qui est un cercle (propriétés des homothéties, section 8.1), ne passant pas par O car $\mathcal{C}$ n'y passe pas. ■



À gauche : l'image d'une droite (bleu) ne passant pas par O est un cercle passant par O (rouge), de diamètre [OH]. À droite : l'image d'un cercle ne passant pas par O est un cercle, homothétique du premier par rapport à O.*

Proposition 10.1.3 (Formule des distances)

Si A^* et B^* sont les images de A et B par $\mathrm{Inv}(O, k)$, alors

$$A^*B^* = \frac{|k| \cdot AB}{OA \cdot OB}.$$

De plus, si O, A, B ne sont pas alignés, les triangles OAB et OB^*A^* sont semblables (inversement).

Démonstration. Si O, A, B ne sont pas alignés, le lemme de la démonstration précédente donne la similitude, de rapport $\frac{OB^*}{OA} = \frac{|k|}{OA \cdot OB}$, d'où $A^*B^* = \frac{|k|}{OA \cdot OB} AB$. Si O, A, B sont alignés, prenons une abscisse sur la droite, d'origine O : $A^*B^* = \left|\frac{k}{b} - \frac{k}{a}\right| = \frac{|k|\,|a-b|}{|a|\,|b|}$, ce qui est la même formule. ■

Théorème 10.1.4 (Conformité)

L'inversion conserve les angles (non orientés) entre droites et cercles en un point d'intersection distinct du pôle : elle est conforme. En particulier, deux cercles tangents en un point distinct du pôle ont pour images deux cercles (ou une droite et un cercle) tangents ; deux cercles orthogonaux ont pour images deux cercles orthogonaux.

Démonstration. *Lemme de la tangente.* Soit c une droite ou un cercle passant par $P \neq O$, t sa tangente en P (c'est c elle-même si c est une droite), et t^* la tangente en P^* à l'image c^*. Montrons que $\measuredangle(OP, t^*) = -\measuredangle(OP, t)$.

- Si c est une droite passant par O, $c^* = c$ et $t = t^* = (OP)$: les deux angles sont nuls.
- Si c est un cercle ne passant pas par O, soit N le second point d'intersection de (OP) avec c. Par la proposition 10.1.2 (c), c^* est l'image de c par une homothétie de centre O qui envoie N sur P^* ; donc t^* est parallèle à la tangente t_N à c en N. Or les tangentes à un cercle aux deux extrémités d'une corde $[PN]$ sont symétriques par rapport à la médiatrice de cette corde, qui est perpendiculaire à (OP) ; cette symétrie renverse les angles orientés et fixe la direction de (OP), donc $\measuredangle(OP, t_N) = -\measuredangle(OP, t)$. (Si (OP) est tangente à c en P, alors $N = P$, $t = (OP)$, et le même argument donne $t^* \parallel t$, c'est-à-dire $t^* = (OP)$: les deux angles sont nuls.)
- Si c est une droite ne passant pas par O ou un cercle passant par O, on applique le cas précédent (ou le premier cas) à c^*, l'inversion étant une involution ; la relation obtenue est symétrique.

Conclusion. Si deux courbes c_1, c_2 se coupent en $P \neq O$ avec des tangentes t_1, t_2, alors

$$\measuredangle(t_1^*, t_2^*) = \measuredangle(t_1^*, OP) + \measuredangle(OP, t_2^*) = \measuredangle(OP, t_1) - \measuredangle(OP, t_2) = -\measuredangle(t_1, t_2).$$

L'angle géométrique est donc conservé (l'orientation est renversée). Deux courbes tangentes ($t_1 = t_2$) ont des images tangentes, deux courbes orthogonales des images orthogonales. ■

Proposition 10.1.5 (Cercles invariants)

Soit $k > 0$ et $\mathcal{C}$ un cercle de centre $\omega \neq O$ ne passant pas par O. Le cercle $\mathcal{C}$ est globalement invariant par $\mathrm{Inv}(O, k)$ si, et seulement si, $\mathrm{pow}(O, \mathcal{C}) = k$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\mathcal{C}$ est orthogonal au cercle d'inversion.

Démonstration. Par la proposition 10.1.2 (c), $\mathcal{C}^*$ est l'image de $\mathcal{C}$ par $h\left(O, \frac{k}{p}\right)$; ce cercle a pour centre l'image de ω, qui est égale à $\omega \neq O$ si, et seulement si, le rapport vaut 1, c'est-à-dire $p = k$. Enfin, deux cercles de centres O, ω et de rayons $\sqrt{k}$, ρ sont orthogonaux si, et seulement si, en un

point commun T, les rayons $[OT]$ et $[\omega T]$ sont perpendiculaires, c'est-à-dire (Pythagore) $O\omega^2 = k + \rho^2$, soit $\mathrm{pow}(O, \mathcal{C}) = O\omega^2 - \rho^2 = k$. ■

10.2 Bien choisir son pôle

Méthode 10.2.1 — Les quatre choix qui marchent

1. **Pôle en un point commun à plusieurs cercles.** Si trois cercles passent par P, inverser en P les transforme en trois droites : la figure devient élémentaire.
2. **Pôle en un point de tangence.** Deux cercles tangents en P deviennent deux droites parallèles (elles n'ont aucun point commun, puisque les cercles n'en avaient pas d'autre que P).
3. **Inversion $\sqrt{bc}$.** Dans un triangle ABC, l'inversion de pôle A et de puissance $AB \cdot AC$ composée avec la symétrie d'axe la bissectrice de $\hat{A}$ échange B et C, (BC) et $\odot(ABC)$, I et I_A, le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ et le pied de la bissectrice, le cercle exinscrit et le cercle mixtilinéaire (proposition 10.2.4). C'est l'outil roi des problèmes « I et Γ ».
4. **Inversion de pôle I (ou H).** Utile lorsque le cercle inscrit (ou le cercle de diamètre $[BC]$) doit devenir une droite.

Exemple 10.2.2 (Le théorème de Ptolémée par inversion). *Soient A, B, C, D quatre points distincts. Montrer que $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$, avec égalité si, et seulement si, A, B, C, D sont sur un cercle (ou une droite) dans l'ordre A, B, C, D.*

Solution. Appliquons $\mathrm{Inv}(A, 1)$. D'après la proposition 10.1.3,

$$B^*C^* = \frac{BC}{AB \cdot AC}, \qquad C^*D^* = \frac{CD}{AC \cdot AD}, \qquad B^*D^* = \frac{BD}{AB \cdot AD}.$$

L'inégalité triangulaire $B^*D^* \leq B^*C^* + C^*D^*$ s'écrit $\frac{BD}{AB \cdot AD} \leq \frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD}$. En multipliant par $AB \cdot AC \cdot AD$: $AC \cdot BD \leq BC \cdot AD + AB \cdot CD$. L'égalité a lieu si, et seulement si, $C^* \in [B^*D^*]$. Si la droite (B^*D^*) ne passe pas par A, cela signifie que B, C, D sont sur un cercle passant par A (image de cette droite, proposition 10.1.2 (b)), avec C sur l'arc $\overset{\frown}{BD}$ ne contenant pas A (image du segment $[B^*D^*]$) : c'est exactement la condition « $ABCD$ cyclique dans cet ordre ». Si la droite (B^*D^*) passe par A, les quatre points sont alignés dans cet ordre.

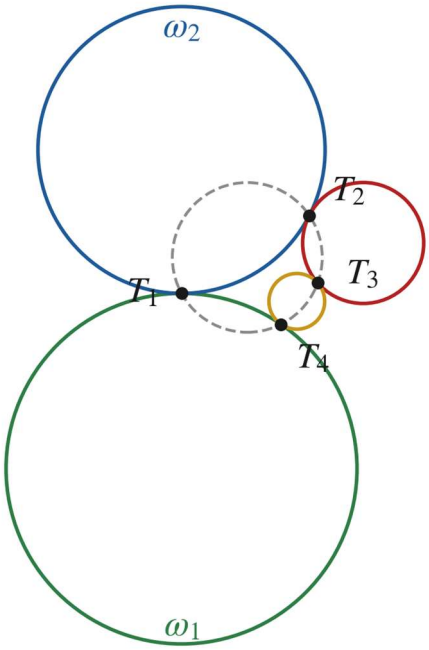
Exemple 10.2.3 (Quatre cercles tangents en chaîne). *Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ quatre cercles tels que ω_i soit tangent extérieurement à ω_{i+1} en T_i (indices modulo 4), les points T_i étant distincts. Montrer que T_1, T_2, T_3, T_4 sont cocycliques (ou alignés).*

Solution. Notons D_i le disque fermé limité par ω_i ; la tangence extérieure signifie $D_i \cap D_{i+1} = \{T_i\}$. Inversons de pôle T_1 et de puissance 1. Les cercles ω_1 et ω_2 passent par le pôle et y sont tangents : leurs images sont deux droites parallèles ℓ_1 et ℓ_2 (méthode 10.2.1). Les disques D_1 et D_2, qui ne se rencontrent qu'en T_1, ont pour images deux demi-plans disjoints limités par ℓ_1 et ℓ_2 ; la bande Σ comprise entre ℓ_1 et ℓ_2 est l'image de l'extérieur commun des deux disques.

Le pôle T_1 n'appartient pas à D_3 (sinon, étant sur ω_2, il serait dans $D_2 \cap D_3 = \{T_2\}$) ni à D_4. Les images ω_3^*, ω_4^* sont donc des cercles, et les disques D_3, D_4 ont pour images les disques D_3^*, D_4^* qu'ils limitent. Comme $D_3 \cap D_2 = \{T_2\}$, le disque D_3^* est dans la bande Σ et tangent à ℓ_2 en T_2^* ; de même D_4^* est dans Σ et tangent à ℓ_1 en T_4^* ; enfin $D_3^* \cap D_4^* = \{T_3^*\}$: les cercles ω_3^* et ω_4^* sont tangents extérieurement en T_3^*.

Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal aux droites ℓ_1, ℓ_2, dirigé de ℓ_2 vers ℓ_1, et r_3, r_4 les rayons de ω_3^*, ω_4^*, de centres c_3, c_4. Comme $D_3^* \subset \Sigma$ est tangent à ℓ_2 en T_2^*, on a $c_3 = T_2^* + r_3\vec{n}$; de même $c_4 = T_4^* - r_4\vec{n}$. Soit h l'homothétie de centre T_3^* envoyant ω_3^* sur ω_4^* ; la tangence étant extérieure, son rapport est $\lambda = -\frac{r_4}{r_3}$ (théorème 8.1.2), et $h(c_3) = c_4$. Elle multiplie les vecteurs par λ, donc $c_4 - h(T_2^*) = \lambda(c_3 - T_2^*) = -r_4\vec{n}$, soit $h(T_2^*) = c_4 + r_4\vec{n} = T_4^*$. Les points T_2^*, T_3^*, T_4^* sont donc alignés (un point, son image par h et le centre de h sont alignés).

Si cette droite ne passe pas par T_1, son image réciproque est un cercle passant par T_1 (proposition 10.1.2 (b)) : T_1, T_2, T_3, T_4 sont cocycliques. Sinon, ils sont alignés.



Quatre cercles tangents extérieurement en chaîne : les points de contact T_1, T_2, T_3, T_4 sont cocycliques.

L'hypothèse de tangence extérieure est nécessaire.

Si certaines tangences sont intérieures, les points de contact ne sont pas cocycliques en général : dans la figure inversée, les cercles ω_3^* et ω_4^* peuvent alors être tangents intérieurement, et l'homothétie de rapport positif envoie ℓ_2 sur la « mauvaise » tangente. Un contre-exemple numérique se construit sans difficulté.

Proposition 10.2.4 (L'inversion √bc)

Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ, et ψ la composée de l'inversion $\mathrm{Inv}(A, AB \cdot AC)$ et de la symétrie d'axe la bissectrice intérieure de $\hat{A}$ (ces deux transformations commutent). Alors :

(a) $\psi(B) = C$ et $\psi(C) = B$; ψ échange la droite (BC) et le cercle Γ ;

(b) $AI \cdot AI_A = AB \cdot AC$ et $\psi(I) = I_A$;

(c) si D est le pied de la bissectrice issue de A et M le second point d'intersection de cette bissectrice avec Γ, alors $AD \cdot AM = AB \cdot AC$ et $\psi(D) = M$;

(d) ψ échange le cercle exinscrit dans l'angle A et le cercle tangent à (AB), à (AC) et intérieurement à Γ (cercle mixtilinéaire inscrit).

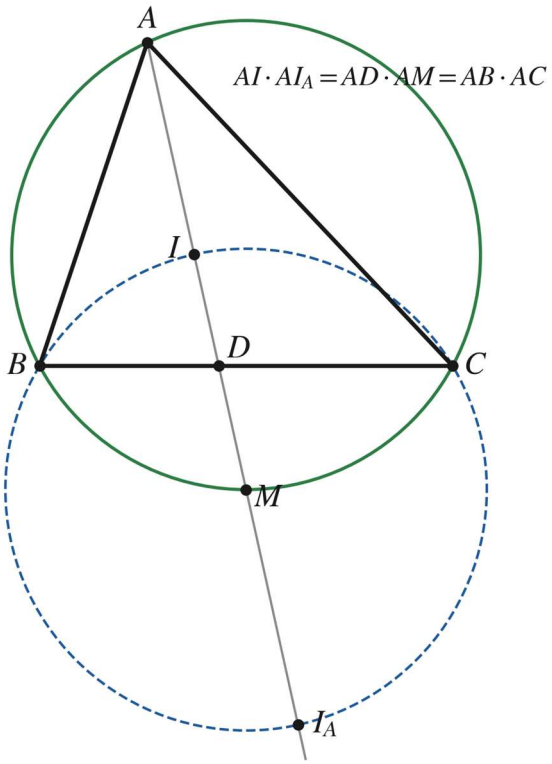
Démonstration.

(a) L'inversion envoie B sur le point de la demi-droite $[AB)$ à la distance $\frac{AB\cdot AC}{AB} = AC$ de A ; la symétrie envoie ce point sur le point de $[AC)$ à la distance AC, c'est-à-dire C. De même $\psi(C) = B$. La droite (BC) ne passe pas par A ; son image par l'inversion est un cercle passant par A (proposition 10.1.2), et la symétrie le transforme en un cercle passant par A, $\psi(B) = C$ et $\psi(C) = B$: c'est Γ.

(b) Les triangles ABI et AI_AC sont semblables : ils ont un angle $\frac{A}{2}$ en A, et $\widehat{ABI} = \frac{B}{2}$, tandis que dans le triangle AI_AC, l'angle en C vaut $C + \frac{180^\circ - C}{2} = 90^\circ + \frac{C}{2}$, donc l'angle en I_A vaut $180^\circ - \frac{A}{2} - 90^\circ - \frac{C}{2} = \frac{B}{2}$. D'où $\frac{AB}{AI_A} = \frac{AI}{AC}$, soit $AI \cdot AI_A = AB \cdot AC$. Comme I et I_A sont sur la demi-droite $[AI)$, axe de la symétrie, $\psi(I) = I_A$.

(c) Le point D est sur (BC) et sur l'axe de la symétrie ; son image est sur $\psi\big((BC)\big) = \Gamma$ et sur la demi-droite $[AD)$: c'est M. La définition de l'inversion donne $AD \cdot AM = AB \cdot AC$.

(d) Le cercle exinscrit ω_A est tangent aux droites (AB), (AC), (BC) et ne passe pas par A. La transformation ψ échange les droites (AB) et (AC) (chacune passant par A est invariante par l'inversion, et la symétrie les échange) et échange (BC) et Γ ; par conformité (théorème 10.1.4), $\psi(\omega_A)$ est un cercle tangent à (AC), à (AB) et à Γ. Enfin, un point X situé au-delà de (BC) par rapport à A est envoyé à l'intérieur du disque limité par Γ : si $[AX]$ coupe (BC) en Y, alors $AX > AY$, donc $\psi(X)$ est plus proche de A que $\psi(Y) \in \Gamma$ sur la même demi-droite, et le segment joignant A à un point de Γ est dans le disque. Comme ω_A est au-delà de (BC), son image est intérieure au disque et tangente intérieurement à Γ. ■



L'inversion √bc : elle échange I et I_A, D et M, la droite (BC) et le cercle Γ ; le cercle de diamètre [II_A] est centré en M.

10.3 Exemples résolus

Exemple 10.3.1 (L'inversion √bc en action). *Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ, d'incentre I, et soit M le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A. Montrer que $MI = MB = MC$.*

Solution. Par la proposition 10.2.4 (b), $\psi(I) = I_A$ et I, I_A sont sur la bissectrice (AI). Les bissectrices (BI) et (BI_A), intérieure et extérieure en B, sont perpendiculaires, donc $\widehat{IBI_A} = 90°$, et de même $\widehat{ICI_A} = 90°$ (proposition 2.4.1). Ainsi B et C appartiennent au cercle de diamètre $[II_A]$. Le centre de ce cercle est le milieu de $[II_A]$: il est à la fois sur la droite (AI) et sur la médiatrice de $[BC]$. Or ces deux droites se coupent en M (la bissectrice passe par le milieu de l'arc, qui est sur la médiatrice de $[BC]$; elles ne sont pas confondues si $AB \neq AC$, et le cas isocèle se traite directement). Donc M est ce centre, et $MI = MI_A = MB = MC$.

Exemple 10.3.2 (Chaîne de Pappus dans l'arbelos). *Soient A, C, B alignés dans cet ordre. L'arbelos est la région comprise entre les demi-cercles de diamètres $[AB]$, $[AC]$, $[CB]$, situés d'un même côté de (AB). On inscrit la chaîne de Pappus : $\mathcal{C}_1$ est tangent aux trois demi-cercles, et $\mathcal{C}_{n+1}$ est tangent aux demi-cercles de diamètres $[AB]$, $[AC]$ et à $\mathcal{C}_n$. Montrer que la distance du centre de $\mathcal{C}_n$ à la droite (AB) vaut n fois le diamètre de $\mathcal{C}_n$.*

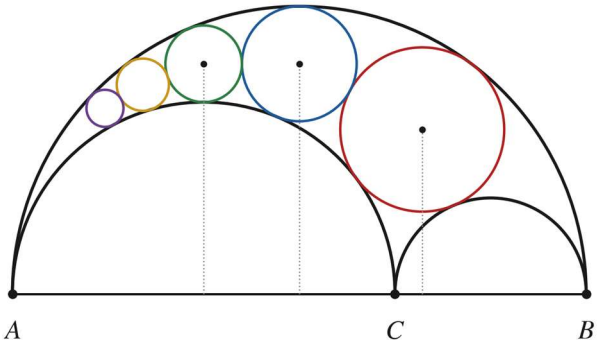
Solution. Complétons les demi-cercles en cercles, et choisissons l'inversion ι de pôle A et de puissance $k = \mathrm{pow}(A, \mathcal{C}_n) > 0$ (A est extérieur à $\mathcal{C}_n$) : elle laisse $\mathcal{C}_n$ globalement invariant (proposition 10.1.5).

Les cercles de diamètres $[AB]$ et $[AC]$ passent par le pôle A : leurs images sont deux droites ℓ_1, ℓ_2. Ces cercles étant symétriques par rapport à la droite (AB), globalement invariante par ι, leurs images

le sont aussi : ℓ_1 et ℓ_2 sont perpendiculaires à (AB), donc parallèles entre elles. Le cercle de diamètre $[CB]$ ne passe pas par A : son image est un cercle γ_0, symétrique par rapport à (AB) (donc centré sur (AB)), tangent à ℓ_1 et ℓ_2 (conformité).

Tous les cercles de la chaîne sont tangents aux deux cercles passant par A : leurs images sont donc des cercles tangents aux deux droites parallèles ℓ_1, ℓ_2, tous de même diamètre d, égal à la distance entre ℓ_1 et ℓ_2, et centrés sur la droite médiane de la bande. Ils sont tangents en chaîne, et le premier est tangent à γ_0, lui aussi de diamètre d et centré sur (AB) : ils forment une pile de cercles égaux, dont les centres sont à des distances $d, 2d, 3d, \ldots$ de (AB).

L'image de $\mathcal{C}_n$ est le n-ième cercle de cette pile ; mais $\iota(\mathcal{C}_n) = \mathcal{C}_n$. Donc $\mathcal{C}_n$ a pour diamètre d et son centre est à la distance nd de (AB).



La chaîne de Pappus dans l'arbelos : le centre du n-ième cercle est à la hauteur n fois son diamètre.

10.4 Exercices

Exercice 10.1 ★. Soient A, B, C alignés dans cet ordre. Montrer que les cercles de diamètres $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$ délimitent un arbelos, et qu'il existe un cercle inscrit dans l'arbelos tangent aux trois.

Exercice 10.2 ★★. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R, et P un point extérieur. Montrer que la polaire de P (chapitre 12) coupe la droite (OP) en l'image de P par l'inversion de pôle O et de puissance R^2.

Exercice 10.3 ★★. Montrer que deux cercles de centres O_1, O_2 et de rayons r_1, r_2 sont orthogonaux si, et seulement si, $O_1O_2^2 = r_1^2 + r_2^2$, et que dans ce cas l'inversion $\mathrm{Inv}(O_1, r_1^2)$ laisse le second cercle globalement invariant.

Exercice 10.4 ★★. Soient ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. Montrer que $AI \cdot AI_A = AB \cdot AC$, où I et I_A sont les centres des cercles inscrit et exinscrit relatif à A.

Exercice 10.5 ★★★. Soient deux cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sécants en P et Q. Pour tout point M de $\mathcal{C}_1$ distinct de P, la droite (MP) recoupe $\mathcal{C}_2$ en M'. Montrer que $\frac{MQ}{M'Q}$ est constant.

10.5 Corrigés

Solution de l'exercice 10.1. Inverser de pôle A : les cercles de diamètres $[AB]$ et $[AC]$ deviennent deux droites perpendiculaires à (AB), le cercle de diamètre $[BC]$ (qui ne passe pas par A) devient un cercle tangent à ces deux droites. Le cercle inscrit devient l'unique cercle tangent aux deux

droites et à ce cercle, de l'autre côté : son existence et sa tangence sont évidentes, et l'inversion réciproque conclut.

Solution de l'exercice 10.2. Si (PT) est tangente en T et si P^* est le projeté de T sur (OP), le triangle OTP, rectangle en T, donne $OT^2 = OP^* \cdot OP$, c'est-à-dire $OP \cdot OP^* = R^2$: $P^* = \mathrm{Inv}(O, R^2)(P)$, et P^* est bien le pied de la polaire.

Solution de l'exercice 10.3. Les cercles sont orthogonaux si, et seulement si, en un point commun X les rayons $[O_1X]$ et $[O_2X]$ sont perpendiculaires, c'est-à-dire si, et seulement si, le triangle O_1XO_2 est rectangle en X, c'est-à-dire si, et seulement si, $O_1O_2^2 = r_1^2 + r_2^2$ (Pythagore). Cette condition s'écrit aussi $\mathrm{pow}(O_1, \mathcal{C}_2) = O_1O_2^2 - r_2^2 = r_1^2$, ce qui est exactement le critère d'invariance de la proposition 10.1.5.

Solution de l'exercice 10.4. Les triangles ABI et AI_AC sont semblables : $\widehat{BAI} = \widehat{I_AAC}$ (même bissectrice) et $\widehat{AIB} = 90° + \frac{C}{2} = \widehat{ACI_A}$ (car (CI_A) est la bissectrice extérieure en C, donnant $\widehat{ACI_A} = 90° + \frac{C}{2}$ par un calcul analogue à celui du chapitre 2). Donc les triangles AIB et ACI_A sont semblables, d'où $\frac{AI}{AC} = \frac{AB}{AI_A}$, c'est-à-dire $AI \cdot AI_A = AB \cdot AC$.

Remarque. C'est exactement la relation qui fait de ψ (inversion $\sqrt{bc}$) une transformation échangeant I et I_A.

Solution de l'exercice 10.5. Inversons de pôle P et de puissance $k > 0$: $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deviennent deux droites d_1, d_2 sécantes en Q^*, et M, M' deviennent deux points $M^* \in d_1$, $M'^* \in d_2$ alignés avec P. La formule des distances donne $MQ = \frac{k \cdot M^*Q^*}{PM^* \cdot PQ^*}$ et $M'Q = \frac{k \cdot M'^*Q^*}{PM'^* \cdot PQ^*}$, d'où

$$\frac{MQ}{M'Q} = \frac{M^*Q^*}{PM^*} \cdot \frac{PM'^*}{M'^*Q^*}.$$

La loi des sinus dans les triangles Q^*M^*P et $Q^*M'^*P$ donne $\frac{M^*Q^*}{PM^*} = \frac{\sin \widehat{M^*PQ^*}}{\sin \widehat{PQ^*M^*}}$ et $\frac{M'^*Q^*}{PM'^*} = \frac{\sin \widehat{M'^*PQ^*}}{\sin \widehat{PQ^*M'^*}}$. Comme M^*, P, M'^* sont alignés, les angles $\widehat{M^*PQ^*}$ et $\widehat{M'^*PQ^*}$ sont égaux ou supplémentaires : leurs sinus sont égaux, et

$$\frac{MQ}{M'Q} = \frac{\sin \widehat{PQ^*M'^*}}{\sin \widehat{PQ^*M^*}},$$

qui ne dépend que des angles fixes formés par la droite (PQ^*) avec d_1 et d_2 : le rapport est constant. On retrouve le fait que Q est le centre de la similitude directe envoyant $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$ (chapitre 8).

10.6 Problèmes d'entraînement

Exercice 10.6 ★★★ (Cercle d'Euler et Feuerbach). Montrer que le cercle des neuf points est tangent au cercle inscrit.

Indication : inverser de pôle le milieu de $[BC]$ et de puissance $\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$; le cercle inscrit et le cercle exinscrit sont invariants, et le cercle des neuf points devient une droite tangente aux deux.

Exercice 10.7 ★★ (Lemme d'Archimède). Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles tangents intérieurement en T. Une corde $[AB]$ de $\mathcal{C}_1$ est tangente à $\mathcal{C}_2$ en P. Montrer que (TP) bissecte $\widehat{ATB}$ (retrouver le lemme d'Archimède par inversion de pôle T).

Exercice 10.8 ★★ (Seconde relation de Ptolémée). Soient A, B, C, D cocycliques dans cet ordre. Montrer que

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}.$$

Exercice 10.9 ★★★. Soit ABC un triangle et ω son cercle inscrit, de points de contact X, Y, Z. Montrer, par inversion de pôle I et de puissance r^2, que le cercle circonscrit de ABC est l'image du cercle des neuf points du triangle XYZ.

À retenir — Bilan du chapitre

- $\overline{OM} \cdot \overline{OM^*} = k$; droite ↔ cercle passant par le pôle.
- $A^*B^* = \frac{|k|\,AB}{OA \cdot OB}$: la formule qui transforme les longueurs.
- L'inversion conserve les angles et donc la tangence.
- Choisir le pôle : point commun à plusieurs cercles, point de tangence, ou A avec l'inversion $\sqrt{bc}$.
- Le centre d'un cercle ne s'envoie pas sur le centre de l'image.

CHAPITRE 11

11 Cercle d'Apollonius, division harmonique et symédianes

La division harmonique est le pont entre la géométrie « métrique » et la géométrie projective. Elle apparaît dès qu'on voit une bissectrice, une tangente, une polaire ou un rapport de carrés. Le lecteur qui reconnaît une configuration harmonique gagne souvent la moitié du problème.

11.1 Le cercle d'Apollonius

Théorème 11.1.1 (Cercle d'Apollonius)

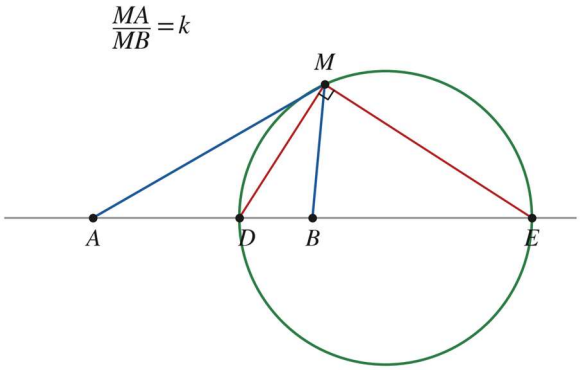
Soient $A \neq B$ deux points et $k > 0$, $k \neq 1$. L'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = k$ est un cercle, appelé cercle d'Apollonius de rapport k relatif à $[AB]$. Son diamètre est $[DE]$, où D et E sont les points de (AB) tels que $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -k$ et $\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = k$; pour tout M du cercle non situé sur (AB), ce sont les pieds des bissectrices intérieure et extérieure de $\widehat{AMB}$. Pour $k = 1$ (cas exclu ci-dessus), ce même ensemble est la médiatrice de $[AB]$.

Démonstration. Prenons un repère orthonormé où $A = (0,0)$ et $B = (1,0)$ (à une similitude près, ce qui ne change pas les rapports). La condition $MA^2 = k^2 MB^2$ s'écrit, pour $M = (x, y)$,

$$x^2 + y^2 = k^2((x-1)^2 + y^2) \Leftrightarrow (1-k^2)(x^2+y^2) + 2k^2 x - k^2 = 0.$$

Comme $k \neq 1$, on divise par $1 - k^2$: on obtient l'équation d'un cercle $x^2 + y^2 + 2\alpha x + \beta = 0$ centré sur l'axe des abscisses, qui contient au moins le point D (proposition 1.2.3 : il existe un unique point de (AB) réalisant chaque rapport), donc est non vide. Il est symétrique par rapport à (AB) et coupe cette droite exactement aux points de (AB) vérifiant $\frac{MA}{MB} = k$, c'est-à-dire D et E : $[DE]$ en est un diamètre.

Si M est sur ce cercle et hors de (AB), le théorème de la bissectrice (théorème 4.3.1) montre que les pieds des bissectrices intérieure et extérieure de $\widehat{AMB}$ partagent $[AB]$ dans les rapports $-\frac{MA}{MB} = -k$ et $\frac{MA}{MB} = k$: ce sont D et E. On retrouve que $\widehat{DME} = 90°$ (les deux bissectrices sont perpendiculaires). Pour $k = 1$, la condition $MA = MB$ définit la médiatrice. ■



Cercle d'Apollonius : les points M tels que MA/MB = k forment le cercle de diamètre [DE] ; (MD) et (ME) sont les bissectrices de l'angle AMB.

Définition 11.1.2 (Division harmonique)

Quatre points alignés A, B, C, D forment une division harmonique, notée $(A, B; C, D) = -1$, si $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -1$, c'est-à-dire $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$. On dit que C et D sont conjugués harmoniques par rapport à $\{A, B\}$. Plus généralement, le nombre $(A, B; C, D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ est le **birapport** des quatre points.

Par la proposition 1.2.3, pour A, B, C donnés (C distinct du milieu de $[AB]$), il existe un unique point D tel que $(A, B; C, D) = -1$; l'un des deux points C, D est intérieur au segment $[AB]$, l'autre extérieur.

Proposition 11.1.3 (Caractérisations métriques)

Soient A, B, C, D alignés, O le milieu de $[AB]$ et M le milieu de $[CD]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $(A, B; C, D) = -1$;

(b) (relation de Newton) $\overline{OC} \cdot \overline{OD} = OA^2 = OB^2$;

(c) (relation de Newton duale) $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MC^2 = MD^2$;

(d) (moyenne harmonique) $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$.

Démonstration. Prenons une abscisse sur la droite, d'origine O, et notons a, $-a$, c, d les abscisses de A, B, C, D ($a \neq 0$).

(a) $\Leftrightarrow$ (b) : la relation (a) s'écrit $\frac{a-c}{-a-c} = -\frac{a-d}{-a-d}$, soit $(c-a)(d+a) + (d-a)(c+a) = 0$, soit $2cd - 2a^2 = 0$: c'est $cd = a^2$, c'est-à-dire (b).

(b) : l'abscisse de M est $m = \frac{c+d}{2}$, et $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = (a-m)(-a-m) = m^2 - a^2$, tandis que $MC^2 = \left(\frac{c-d}{2}\right)^2$. L'égalité $m^2 - a^2 = \left(\frac{c-d}{2}\right)^2$ équivaut à $\frac{(c+d)^2-(c-d)^2}{4} = a^2$, c'est-à-dire $cd = a^2$.

(c) : avec $\overline{AB} = -2a$, $\overline{AC} = c - a$, $\overline{AD} = d - a$, la relation s'écrit $-\frac{1}{a} = \frac{(d-a)+(c-a)}{(c-a)(d-a)}$, soit $-(c-a)(d-a) = a(c+d) - 2a^2$, soit $-cd + a(c+d) - a^2 = a(c+d) - 2a^2$, c'est-à-dire $cd = a^2$. ■

Méthode 11.1.4 — Où voir une division harmonique ?

- **Bissectrices** : les pieds des bissectrices intérieure et extérieure issues de A sur (BC) sont conjugués harmoniques par rapport à B et C (théorème 4.3.1).
- **Céviennes** : si (AD), (BE), (CF) concourent et si $X = (EF) \cap (BC)$, alors $(B, C; D, X) = -1$ (proposition 11.1.6).
- **Polaire** : si P est extérieur à $\mathcal{C}$ et si une sécante issue de P coupe $\mathcal{C}$ en U, V et la polaire de P en W, alors $(U, V; W, P) = -1$ (chapitre 12).
- **Tangentes** : si (PA) et (PB) sont tangentes à $\mathcal{C}$ en A, B et si une droite issue de P coupe $\mathcal{C}$ en U, V, alors $(U, V; (AB) \cap (UV), P) = -1$ (c'est le cas précédent : (AB) est la polaire de P).
- **Angle droit** : si X, Y sont sur (AB), si $(MX) \perp (MY)$ et si (MX) bissecte $\widehat{AMB}$, alors $(A, B; X, Y) = -1$ (théorème 11.1.5).

Théorème 11.1.5 (Faisceau harmonique)

Soient quatre droites a, b, c, d concourantes en P, et une transversale ne passant pas par P qui les coupe en A, B, C, D. Alors

$$(A, B; C, D) = \frac{\sin(\vec{c}, \vec{a})}{\sin(\vec{c}, \vec{b})} \cdot \frac{\sin(\vec{d}, \vec{b})}{\sin(\vec{d}, \vec{a})},$$

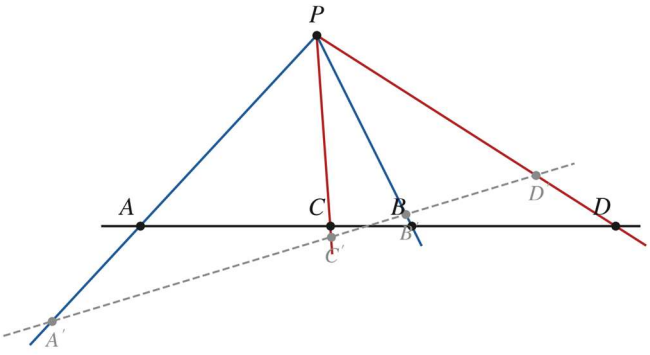
où $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ sont des vecteurs directeurs des quatre droites et $(\vec{u}, \vec{v})$ l'angle orienté de vecteurs. Ce nombre ne dépend donc pas de la transversale. En particulier, si $(A, B; C, D) = -1$ pour une transversale, il en est ainsi pour toutes : on dit que $(a, b; c, d) = -1$ est un faisceau harmonique. De plus, si $c \perp d$, alors $(a, b; c, d) = -1$ si, et seulement si, c et d sont les bissectrices de l'angle formé par a et b.

Démonstration. Les triangles PCA et PCB ont la même hauteur issue de P ; leurs aires orientées sont donc dans le rapport des bases : $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{[PCA]}{[PCB]}$. En calculant ces aires par la formule $[PXY] = 1/2\, PX \cdot PY \sin(\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY})$:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{PA \sin(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA})}{PB \sin(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PB})}, \qquad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{PA \sin(\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PA})}{PB \sin(\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PB})}.$$

En faisant le quotient, PA et PB disparaissent. Remplacer $\overrightarrow{PA}$ par un autre vecteur directeur $\lambda\vec{a}$ de a ne change rien, car le signe de λ apparaît deux fois (au numérateur et au dénominateur) ; de même pour b, c, d. Le birapport ne dépend donc que des quatre droites.

Si $c \perp d$, prenons $\vec{d}$ obtenu en tournant $\vec{c}$ de $90°$; alors $\sin(\vec{d}, \vec{x}) = \sin((\vec{c}, \vec{x}) - 90°) = -\cos(\vec{c}, \vec{x})$, et le birapport vaut $\frac{\tan(\vec{c}, \vec{a})}{\tan(\vec{c}, \vec{b})}$. Il vaut -1 si, et seulement si, $\tan(\vec{c}, \vec{a}) = -\tan(\vec{c}, \vec{b})$, c'est-à-dire $(\vec{c}, \vec{a}) \equiv -(\vec{c}, \vec{b}) \pmod{180°}$: la droite c fait des angles opposés avec a et b, c'est une bissectrice de l'angle (a, b), et d, qui lui est perpendiculaire, est l'autre. ■

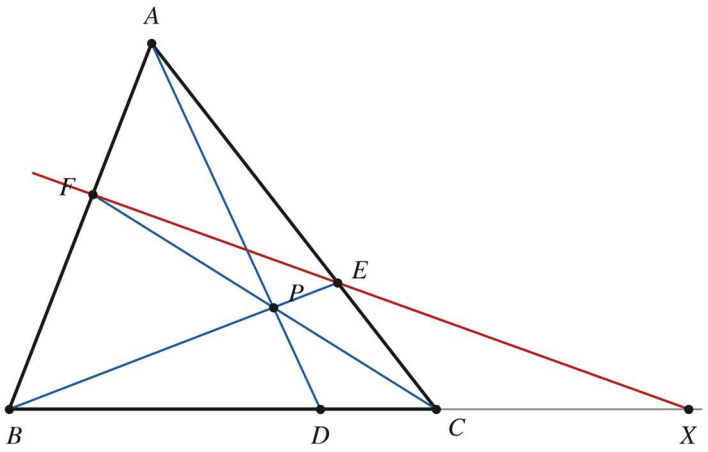


Faisceau harmonique issu de P : (A, B ; C, D) = −1, et toute autre transversale (pointillés) coupe les quatre droites en une division harmonique.

Proposition 11.1.6 (Quadrilatère complet)

Soient ABC un triangle et (AD), (BE), (CF) trois céviennes concourantes ($D \in (BC)$, $E \in (CA)$, $F \in (AB)$), avec (EF) non parallèle à (BC). Si $X = (EF) \cap (BC)$, alors $(B, C; D, X) = -1$.

Démonstration. Par Ceva (théorème 6.2.1), $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$. Par Ménélaüs (théorème 6.3.1) pour les points alignés X, E, F : $\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1$. En divisant : $\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = -\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$, soit $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}$: c'est $(B, C; D, X) = -1$. ■



Quadrilatère complet : si les céviennes concourent en P et si (EF) coupe (BC) en X, alors (B, C ; D, X) = −1.

11.2 Le quadrilatère harmonique

Définition 11.2.1 (Quadrilatère harmonique)

Un quadrilatère convexe cyclique $ABCD$ est dit harmonique si $AB \cdot CD = BC \cdot DA$.

Proposition 11.2.2 (Caractérisations du quadrilatère harmonique)

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe cyclique de cercle Γ, la diagonale $[AC]$ n'étant pas un diamètre de Γ. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $ABCD$ est harmonique ;

(b) les tangentes à Γ en A et en C se coupent sur la droite (BD) ;

(c) (BD) est la B-symédiane du triangle ABC (et alors aussi la D-symédiane du triangle ACD) ;

(d) pour tout point P de Γ distinct des quatre sommets, le faisceau $(PA, PC; PB, PD)$ est harmonique.

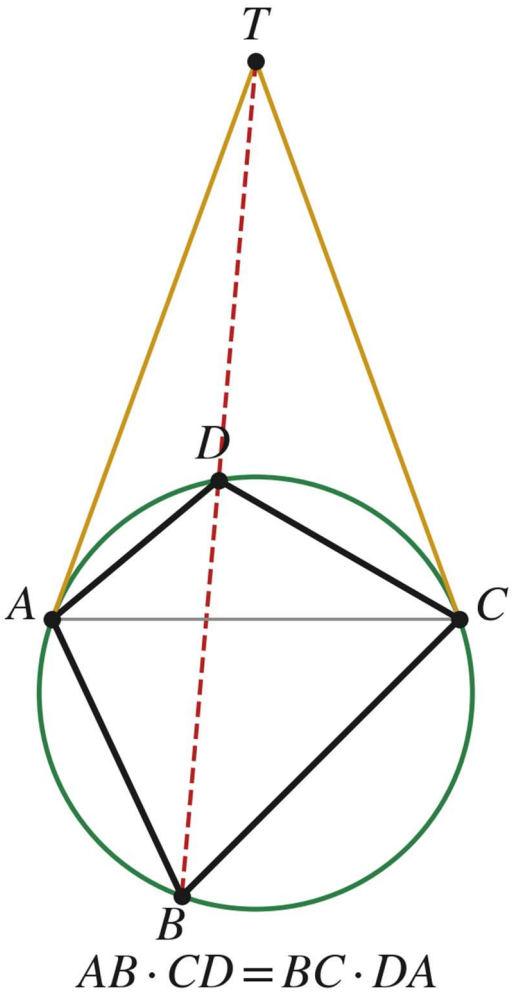
Démonstration. Soit T le point d'intersection des tangentes en A et C (elles se coupent, puisque $[AC]$ n'est pas un diamètre). Soit X le second point d'intersection de (BT) avec Γ.

Étape 1 : $ABCX$ est harmonique. Par le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{TAB} = \widehat{AXB}$, et les triangles TAB et TXA ont l'angle en T en commun : ils sont semblables, d'où $\frac{AB}{XA} = \frac{TA}{TX}$. De même $\frac{CB}{XC} = \frac{TC}{TX}$. Comme $TA = TC$ (longueurs des tangentes), $\frac{AB}{XA} = \frac{CB}{XC}$, soit $AB \cdot CX = BC \cdot XA$.

Étape 2 : unicité. Les points P de Γ tels que $\frac{PA}{PC} = \frac{BA}{BC}$ sont sur un cercle d'Apollonius (ou une droite si le rapport vaut 1), qui coupe Γ en au plus deux points ; l'un est B. Comme $X \neq B$ vérifie la condition (étape 1), c'est l'unique autre point. Donc : D vérifie (a) si, et seulement si, $D = X$, si, et seulement si, $D \in (BT)$, c'est-à-dire (b).

(b) ⟺ (c). Par la proposition 11.3.2 (c) ci-dessous appliquée au triangle ABC et au sommet B, la B-symédiane est la droite (BT) ; (c) équivaut donc à $D \in (BT)$. La condition (a) étant symétrique en B et D, on obtient de même que (DB) est la D-symédiane de ACD.

(a) ⟺ (d). Soit $P \in \Gamma$. Par la loi des sinus dans les triangles PAB, PBC, PCD, PDA inscrits dans Γ (de rayon R), $\left|\sin\left(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PA}\right)\right| = \frac{AB}{2R}$, etc. Le théorème 11.1.5 donne donc $|(PA, PC; PB, PD)| = \frac{AB \cdot CD}{BC \cdot DA}$, qui vaut 1 si, et seulement si, (a) a lieu. Le signe est négatif : les points B et D étant de part et d'autre de (AC), les droites (PB) et (PD) séparent (PA) et (PC), et une transversale coupe le faisceau en quatre points dont deux séparent les deux autres. Donc (a) équivaut à $(PA, PC; PB, PD) = -1$. ■



Quadrilatère harmonique : les tangentes en A et C se coupent sur la diagonale (BD).

11.3 Les symédianes

Définition 11.3.1 (Symédiane)

La A-symédiane du triangle ABC est la réflexion de la médiane (AM_A) par rapport à la bissectrice intérieure issue de A. Les trois symédianes concourent au point de Lemoine $K = (a^2 : b^2 : c^2)$ (exemple 6.5.1 et section 9.4).

Proposition 11.3.2 (Caractérisations de la symédiane)

Soit ABC un triangle inscrit dans Γ, et soit S le point où la A-symédiane recoupe (BC). Les propriétés suivantes caractérisent la A-symédiane :

(a) elle est la réflexion de la médiane par rapport à la bissectrice de $\hat{A}$;

(b) $\frac{BS}{SC} = \frac{c^2}{b^2}$;

(c) elle passe par le point T d'intersection des tangentes à Γ en B et en C (si $b \neq c$ ou si ces tangentes se coupent) ;

(d) elle recoupe Γ en le point X tel que $ABXC$ soit un quadrilatère harmonique ;

(e) à l'intérieur de l'angle $\widehat{BAC}$, elle est le lieu des points dont les distances à (AB) et (AC) sont dans le rapport $\frac{c}{b}$.

Démonstration.

(a) $\Leftrightarrow$ (b) a été établi au chapitre 6 (exemple 6.5.1) : une cévienne issue de A, de pied intérieur à $[BC]$, est déterminée par le rapport dans lequel elle partage $[BC]$.

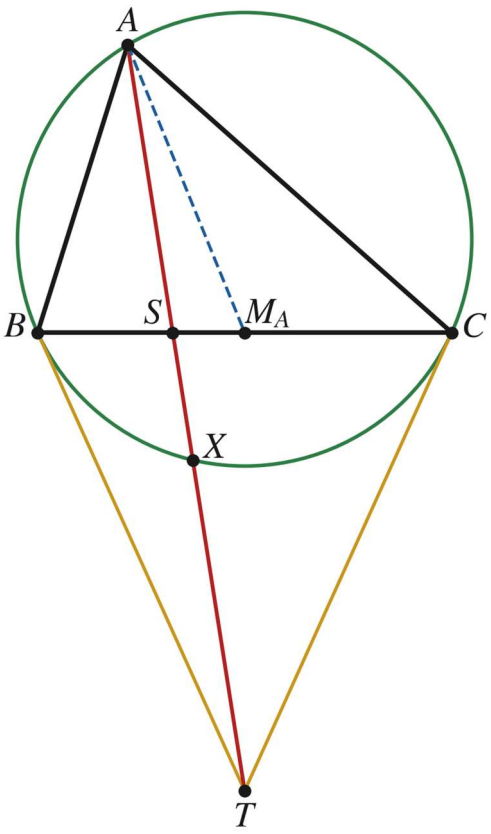
(b) et (d). Soit T le point d'intersection des tangentes en B et C, et soit X le second point d'intersection de (AT) avec Γ. La tangente en B donne $\widehat{TBX} = \widehat{BAX}$ (angle tangentiel), et l'angle en T est commun : les triangles TBX et TAB sont semblables, d'où $\frac{BX}{AB} = \frac{TB}{TA}$. De même $\frac{CX}{AC} = \frac{TC}{TA}$. Comme $TB = TC$ (tangentes issues de T), on obtient $\frac{BX}{AB} = \frac{CX}{AC}$, c'est-à-dire $AB \cdot CX = AC \cdot BX$: $ABXC$ est un quadrilatère harmonique, ce qui prouve (d).

Soit $S = (AX) \cap (BC)$. Les triangles ABX et ACX ont la même base $[AX]$; leurs aires sont dans le rapport des distances de B et C à (AX), c'est-à-dire $\frac{BS}{SC}$. En les calculant par la formule du sinus :

$$\frac{BS}{SC} = \frac{[ABX]}{[ACX]} = \frac{AB \cdot BX \sin\widehat{ABX}}{AC \cdot CX \sin\widehat{ACX}} = \frac{AB \cdot BX}{AC \cdot CX},$$

car $\widehat{ABX} + \widehat{ACX} = 180°$ ($ABXC$ cyclique) et les sinus sont donc égaux. En remplaçant $BX = \frac{AB}{AC}\,CX$, il vient $\frac{BS}{SC} = \frac{AB^2}{AC^2}$, c'est-à-dire (b) : la droite (AT) est bien la symédiane.

(e) Soit Q un point de la demi-droite $[AS)$, $Q \neq A$. Ses distances à (AB) et (AC) valent $AQ\sin\widehat{BAS}$ et $AQ\sin\widehat{SAC}$, dont le rapport est $\frac{\sin\widehat{BAS}}{\sin\widehat{SAC}} = \frac{BS}{SC} \cdot \frac{b}{c} = \frac{c}{b}$ (relation $(*)$ de la preuve du théorème 6.4.1). Réciproquement, pour un point Q intérieur à l'angle, le rapport $\frac{\sin\widehat{BAQ}}{\sin\widehat{QAC}}$ détermine la demi-droite $[AQ)$ (la fonction $\theta \mapsto \frac{\sin\theta}{\sin(A-\theta)}$ est strictement croissante sur $]0, A[$) : le lieu est la demi-droite $[AS)$ privée de A. ■



La symédiane (rouge) passe par le point T d'intersection des tangentes en B et C ; elle est la symétrique de la médiane (bleu) par rapport à la bissectrice.

À retenir — Le réflexe symédiane

Si vous voyez, dans une figure : deux tangentes qui se coupent, ou un rapport de carrés de côtés, ou un quadrilatère cyclique avec $AB \cdot CD = BC \cdot DA$, ou encore une réflexion d'une médiane — c'est la même droite, la symédiane. Passez librement d'une description à l'autre.

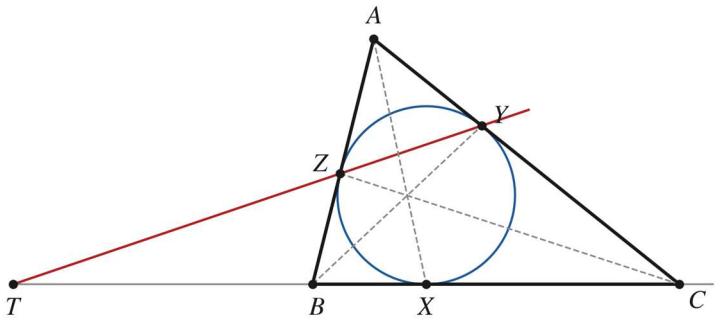
11.4 Exemples résolus

Exemple 11.4.1 (Le point de contact et la division harmonique). *Soit ABC un triangle avec $AB \neq AC$, ω son cercle inscrit touchant $[BC]$ en X, et Y, Z les points de contact sur $[CA]$, $[AB]$. Montrer que (YZ) coupe (BC) en un point T tel que $(B, C; X, T) = -1$.*

Solution. Les céviennes (AX), (BY), (CZ) concourent au point de Gergonne (proposition 6.2.3), et la proposition 11.1.6 donne aussitôt $(B, C; X, T) = -1$ (la droite (YZ) n'est pas parallèle à (BC), car $AY = AZ$ et $AB \neq AC$). On peut aussi conclure par Ménélaüs : avec $AY = AZ = s - a$, $BZ = BX = s - b$ et $CX = CY = s - c$, la droite (TYZ) donne $\frac{TB}{TC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$ en longueurs, soit

$$\frac{TB}{TC} = \frac{s-b}{s-c} = \frac{XB}{XC},$$

et comme T est extérieur à $[BC]$ et X intérieur, $\frac{\overline{TB}}{\overline{TC}} = -\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}$: c'est la définition de $(B, C; X, T) = -1$. La droite (YZ) est aussi la polaire de A par rapport à ω (chapitre 12).



Exemple 11.4.1 : la droite (YZ) coupe (BC) au conjugué harmonique T de X par rapport à B et C.

Exemple 11.4.2 (Une caractérisation métrique). *Soit* $(A,B;C,D)=-1$ *et* O *le milieu de* $[AB]$. *Montrer que* $\overline{OC}\cdot\overline{OD}=OA^2$, *puis que le cercle de diamètre* $[CD]$ *est orthogonal au cercle de diamètre* $[AB]$.

Solution. La première relation est la proposition 11.1.3 (b) ; rappelons le calcul. Plaçons l'origine en O et notons $a=\overline{OA}=-\overline{OB}$, $c=\overline{OC}$, $d=\overline{OD}$. La relation $(A,B;C,D)=-1$ s'écrit

$$\frac{c-a}{c+a}=-\frac{d-a}{d+a}\Longrightarrow(c-a)(d+a)+(d-a)(c+a)=0\Longrightarrow 2cd-2a^2=0,$$

soit $cd=a^2$. Cette égalité dit exactement que la puissance de O par rapport au cercle de diamètre $[CD]$ (théorème 5.1.2, avec la sécante (CD)) vaut OA^2, c'est-à-dire le carré du rayon du cercle de diamètre $[AB]$: les deux cercles sont orthogonaux (critère de la preuve de la proposition 10.1.5).

11.5 Exercices

Exercice 11.1 ★. Soit ABC un triangle et D,E les pieds des bissectrices intérieure et extérieure issues de A. Montrer que le cercle de diamètre $[DE]$ est le cercle d'Apollonius de rapport $\frac{AB}{AC}$ relatif à $[BC]$ et qu'il passe par A.

Exercice 11.2 ★★. Soient $(A,B;C,D)=-1$ et P un point hors de la droite. Montrer que si $(PC)\perp(PD)$, alors (PC) et (PD) sont les bissectrices de $\widehat{APB}$.

Exercice 11.3 ★. Soit ABC un triangle inscrit dans Γ, et T l'intersection des tangentes en B et C. Montrer que (AT) recoupe Γ en le point X tel que $ABXC$ soit harmonique.

Exercice 11.4 ★★. Soit $ABCD$ un quadrilatère harmonique. Montrer que (AC) et (BD) sont les symédianes respectives des triangles ABD et ABC issues de A et de B.

Exercice 11.5 ★★. Soient ABC un triangle et K son point de Lemoine. Montrer que K est le point dont la somme des carrés des distances aux trois côtés est minimale.

11.6 Corrigés

Solution de l'exercice 11.1. Le point A vérifie $\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{AC}$: il appartient au lieu, donc au cercle. Les points D et E y sont par construction, et $\widehat{DAE}=90°$ car les bissectrices intérieure et extérieure sont perpendiculaires : $[DE]$ est bien un diamètre.

Solution de l'exercice 11.2. C'est le théorème 11.1.5 : le faisceau $(PA,PB;PC,PD)$ est harmonique. Si deux de ses rayons sont perpendiculaires, ils sont nécessairement les bissectrices des deux

autres, car les bissectrices forment l'unique couple de droites perpendiculaires conjuguées harmoniques par rapport à (PA) et (PB).

Solution de l'exercice 11.3. (AT) est la A-symédiane (proposition 11.3.2 (c)) ; le point X est donc celui de (d), et $ABXC$ est harmonique.

Solution de l'exercice 11.4. Par la proposition 11.2.2 (c), appliquée deux fois (une fois pour chaque paire de sommets opposés).

Solution de l'exercice 11.5. Notons x, y, z les distances d'un point P intérieur au triangle aux côtés a, b, c. On a $ax + by + cz = 2S$ (constante). Par Cauchy–Schwarz,

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2 = 4S^2,$$

avec égalité si, et seulement si, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, c'est-à-dire si, et seulement si, P a pour coordonnées barycentriques $(ax : by : cz) = (a^2 : b^2 : c^2)$: c'est K.

11.7 Problèmes d'entraînement

Exercice 11.6 ★★. Soit ABC un triangle inscrit dans Γ ($AB \neq AC$). La tangente en A coupe (BC) en T. Montrer que $TA^2 = TB \cdot TC$, puis que T est le centre du cercle d'Apollonius de rapport $\frac{AB}{AC}$ relatif à $[BC]$; en déduire que ce cercle est orthogonal à Γ.

Exercice 11.7 ★★ (Classique). Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique dont les diagonales se coupent en P. Montrer que la polaire de P par rapport au cercle est la droite (XY), où $X = (AB) \cap (CD)$ et $Y = (AD) \cap (BC)$ (triangle autopolaire).

Exercice 11.8 ★★. Soit ABC un triangle et ω le cercle de diamètre $[BC]$. Montrer que les tangentes issues de A à ω touchent ω en deux points P, Q tels que (PQ) passe par l'orthocentre.

Exercice 11.9 ★★★. Soit ABC un triangle, T le pôle de (BC) par rapport au cercle circonscrit et X le second point d'intersection de la A-symédiane avec le cercle circonscrit. Montrer que $BX \cdot AC = CX \cdot AB$, puis que (BC), la tangente en A et la tangente en X sont concourantes ou parallèles.

À retenir — Bilan du chapitre

- Cercle d'Apollonius : $\frac{MA}{MB} = k$; diamètre $[DE]$ = pieds des deux bissectrices.
- $(A, B; C, D) = -1 \Leftrightarrow \overline{OC} \cdot \overline{OD} = OA^2$ (O milieu de $[AB]$) $\Leftrightarrow \frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$.
- Faisceau harmonique : la propriété se transporte par projection ; deux rayons perpendiculaires ⇒ bissectrices.
- Symédiane = réflexion de la médiane = droite vers le pôle de (BC) = rapport c^2/b^2 = quadrilatère harmonique.

CHAPITRE 12

12 Éléments de géométrie projective

La géométrie projective n'est pas au programme des olympiades : aucun problème ne l'exige. Mais rien n'interdit de s'en servir, et elle rend triviaux des énoncés qui résistent des heures à la chasse aux angles. Trois outils suffisent : le birapport, la polaire, et les théorèmes de Desargues et Pascal. Tous sont démontrés ici avec les seuls outils des chapitres précédents (Ménélaüs, puissance d'un point, aires).

12.1 Birapport

Définition 12.1.1 (Birapport)

Soient A, B, C, D quatre points alignés distincts. Leur birapport est

$$(A, B; C, D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{DB}}{\overline{CB} \cdot \overline{DA}}.$$

Si $(A, B; C, D) = -1$, la division est harmonique.

Deux propriétés algébriques immédiates servent sans cesse : $(A, B; D, C) = \frac{1}{(A,B;C,D)}$ (on échange les deux rapports), et $(C, D; A, B) = (A, B; C, D)$ (en développant, $\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\overline{AD}\cdot\overline{BC}} = \frac{\overline{CA}\cdot\overline{DB}}{\overline{DA}\cdot\overline{CB}}$). En particulier, $(A, B; C, D) = -1$ entraîne $(A, B; D, C) = -1$ et $(C, D; A, B) = -1$. De plus $(A, B; C, D) = 1$ équivaut à $C = D$ (proposition 1.2.3), ce qui est exclu.

Proposition 12.1.2 (Propriétés du birapport)

(a) Le birapport est invariant par projection centrale : si P est un point hors des droites d et d', et si A, B, C, D (sur d) se projettent depuis P en A', B', C', D' (sur d'), alors $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$.

(b) On peut donc définir le birapport d'un faisceau de quatre droites concourantes : $P(A, B; C, D)$.

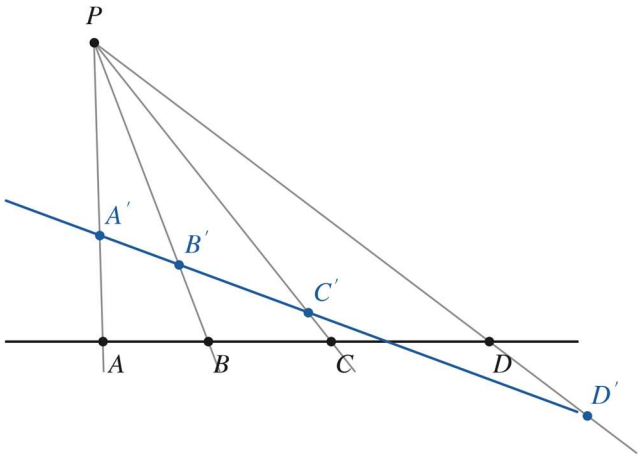
(c) **Birapport sur un cercle** : si A, B, C, D sont sur un cercle Γ et si $P, Q \in \Gamma$ sont distincts de ces quatre points, alors $P(A, B; C, D) = Q(A, B; C, D)$; cette valeur commune se note $(A, B; C, D)_\Gamma$, et sa valeur absolue vaut $\frac{CA\cdot DB}{CB\cdot DA}$ (longueurs des cordes).

Démonstration.

(a) et (b) : par le théorème 11.1.5, le birapport des points d'intersection d'une transversale avec quatre droites concourantes est une fonction des seules droites. Or A, B, C, D et A', B', C', D' sont les intersections des mêmes quatre droites (PA), (PB), (PC), (PD) avec deux transversales.

(b) Notons θ_X un angle directeur de la droite (PX). La formule du théorème 11.1.5 s'écrit $\frac{\sin(\theta_A-\theta_C)\sin(\theta_B-\theta_D)}{\sin(\theta_B-\theta_C)\sin(\theta_A-\theta_D)}$; remplacer θ_X par $\theta_X + 180°$ change le signe de deux facteurs, l'un au numérateur et l'autre au dénominateur. Le birapport est donc une fonction des angles orientés de droites $\measuredangle(PC, PA)$, $\measuredangle(PC, PB)$, $\measuredangle(PC, PD)$, définis modulo $180°$. Par le théorème 2.3.1,

ces angles sont les mêmes pour P et pour Q : les deux birapports sont égaux. Enfin, par la loi des sinus dans les triangles PCA, etc., inscrits dans Γ de rayon R, $|\sin\measuredangle(PC, PA)| = \frac{CA}{2R}$, d'où la valeur absolue annoncée. ■



Invariance du birapport par projection centrale : (A, B ; C, D) = (A', B' ; C', D').

Méthode 12.1.3 — Comment s'en servir

Pour montrer que trois points sont alignés ou que trois droites sont concourantes, on projette la configuration sur une droite bien choisie et on compare deux birapports. Le schéma type est :

$$(A, B; C, D) \overset{P}{=} (A', B'; C', D') \overset{Q}{=} (A'', B''; C'', D''),$$

puis on conclut par l'unicité du quatrième point de birapport donné : si $(A, B; C, D) = (A, B; C, D')$, alors $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{D'A}}{\overline{D'B}}$ et $D = D'$ (proposition 1.2.3).

12.2 Pôle et polaire

Définition 12.2.1 (Pôle et polaire)

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R, et $P \neq O$ un point. La polaire de P est la droite p perpendiculaire à (OP) passant par le point P^* de la demi-droite $[OP)$ tel que $OP \cdot OP^* = R^2$ (l'inverse de P). Réciproquement, P est le pôle de p.

Un point X appartient à la polaire de P si, et seulement si, la projection orthogonale de $\overrightarrow{OX}$ sur la droite (OP) est $\overrightarrow{OP^*}$, c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OP} = OP^* \cdot OP = R^2. \qquad (*)$$

Proposition 12.2.2 (Propriétés de la polaire)

(a) Si P est extérieur à $\mathcal{C}$, sa polaire est la droite joignant les deux points de contact des tangentes issues de P.

(b) Si $P \in \mathcal{C}$, sa polaire est la tangente en P.

(c) Si une droite issue de P coupe $\mathcal{C}$ en U, V et la polaire de P en W, alors $(U, V; W, P) = -1$.

Démonstration.

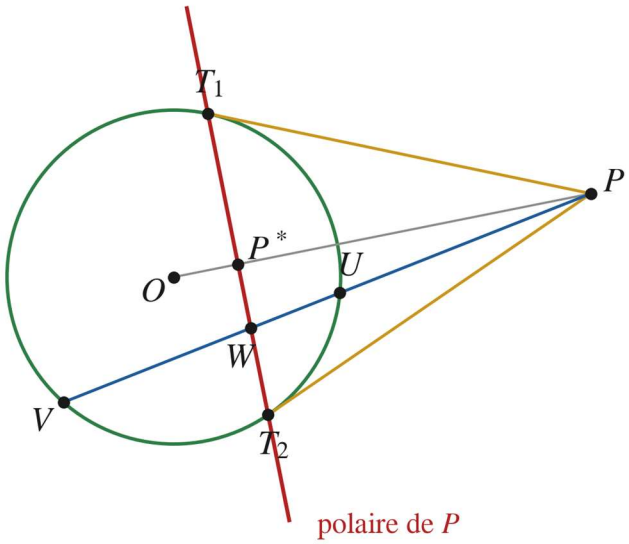
(a) Si (PT) est tangente en T, le triangle OTP est rectangle en T, donc $\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{OP} = OT^2 = R^2$ (la projection de T sur (OP) est le pied H de la hauteur, et $OH \cdot OP = OT^2$). Par $(*)$, T est sur la polaire ; de même pour le second point de contact.

(b) Si $P \in \mathcal{C}$, $P^* = P$ et la polaire est la perpendiculaire en P au rayon (OP) : c'est la tangente.

(c) Orientons la droite par un vecteur unitaire $\vec{u}$ et prenons P pour origine ; notons u, v, w les abscisses de U, V, W. Par le théorème 5.1.2, $uv = \mathrm{pow}(P, \mathcal{C}) = OP^2 - R^2 =: \pi$. Le milieu de $[UV]$ est la projection de O sur la droite, d'abscisse $m = \overrightarrow{PO} \cdot \vec{u}$, donc $u + v = 2m$. Le point $W = P + w\vec{u}$ vérifie $(*)$: $\left(\overrightarrow{OP} + w\vec{u}\right) \cdot \overrightarrow{OP} = R^2$, soit $OP^2 - wm = R^2$ (car $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OP} = -m$), d'où $w = \frac{\pi}{m}$ (la droite n'étant pas parallèle à la polaire, $m \neq 0$). Alors

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{u+v}{uv} = \frac{2m}{\pi} = \frac{2}{w}.$$

Par la proposition 11.1.3 (d) appliquée avec P comme premier point, $(P, W; U, V) = -1$, donc $(U, V; W, P) = (U, V; P, W) = -1$ par les propriétés algébriques ci-dessus. ■



La polaire de P (rouge) passe par les points de contact T_1, T_2 ; toute sécante issue de P la coupe au conjugué harmonique W de P par rapport à U et V.

Théorème 12.2.3 (La Hire)

Q appartient à la polaire de P si, et seulement si, P appartient à la polaire de Q. Par conséquent, les polaires des points d'une droite d ne passant pas par O sont concourantes au pôle de d.

Démonstration. Par $(*)$, les deux conditions s'écrivent $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} = R^2$ et $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = R^2$: elles sont identiques. Si D est le pôle de d, tout point Q de d est sur la polaire de D, donc D est sur la polaire de Q. ■

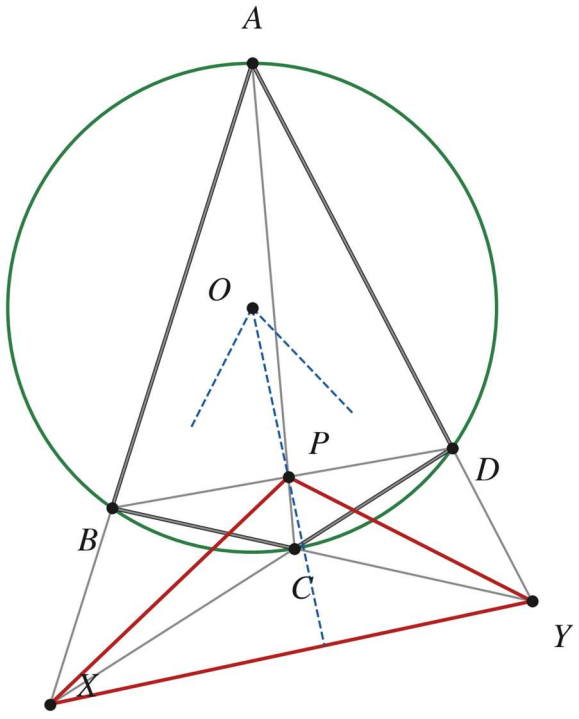
Théorème 12.2.4 (Brocard)

Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique de cercle $\mathcal{C}$ et de centre O. Posons $P = (AC) \cap (BD)$, $X = (AB) \cap (CD)$, $Y = (AD) \cap (BC)$ (on suppose que ces points existent). Alors le triangle PXY est autopolaire : la polaire de P est (XY), celle de X est (PY), celle de Y est (PX). En particulier O est l'orthocentre du triangle PXY.

Démonstration. Soit $M = (AB) \cap (PY)$ et $N = (CD) \cap (PY)$. La projection de centre Y de la droite (AB) sur la droite (CD) envoie A, B, X, M sur D, C, X, N (car $Y \in (AD)$, $Y \in (BC)$, X est sur les deux droites, et $N \in (YM)$). La projection de centre P de (CD) sur (AB) envoie D, C, X, N sur B, A, X, M (car $P \in (BD)$, $P \in (AC)$, et $M \in (PN)$). Par la proposition 12.1.2,

$$(A, B; X, M) = (D, C; X, N) = (B, A; X, M) = \frac{1}{(A, B; X, M)},$$

la dernière égalité venant de ce qu'échanger les deux premiers points revient à inverser le birapport. Donc $(A, B; X, M)^2 = 1$, et comme ce birapport n'est pas égal à 1, il vaut -1 ; de même $(D, C; X, N) = -1$. D'après la proposition 12.2.2 (c) et l'unicité du conjugué harmonique, M et N sont sur la polaire de X, qui est donc la droite $(MN) = (PY)$. Le même raisonnement montre que la polaire de Y est (PX). Par La Hire, P appartient aux polaires de X et de Y, donc X et Y appartiennent à la polaire de P, qui est donc (XY). Enfin, par définition de la polaire, $(OP) \perp (XY)$, $(OX) \perp (PY)$ et $(OY) \perp (PX)$: O est l'orthocentre de PXY. ■



Théorème de Brocard : le triangle PXY est autopolaire et O en est l'orthocentre (perpendiculaires en pointillés).

12.3 Desargues, Pascal, Brianchon

Dans cette section, les énoncés supposent que les points d'intersection considérés existent (droites non parallèles) : c'est la « position générale ».

Théorème 12.3.1 (Desargues)

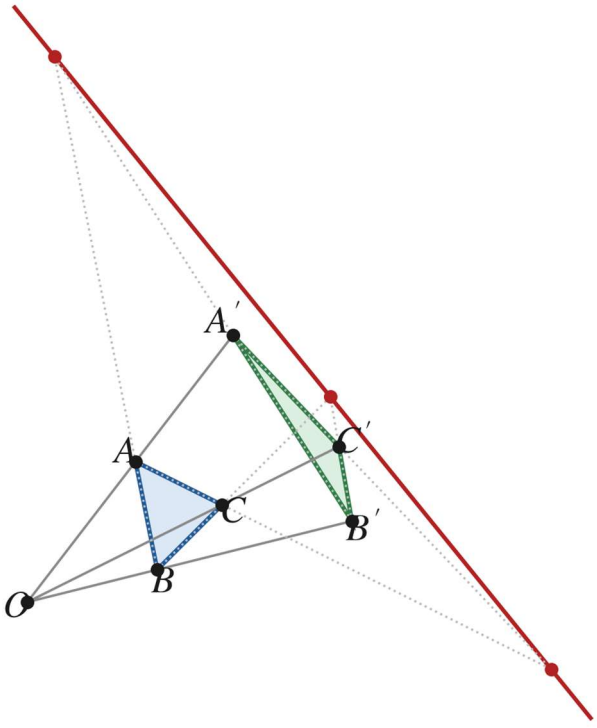
Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont en perspective par un point (les droites (AA'), (BB'), (CC') concourent) si, et seulement si, ils sont en perspective par une droite (les points $(BC) \cap (B'C')$, $(CA) \cap (C'A')$, $(AB) \cap (A'B')$ sont alignés).

Démonstration. *Sens direct.* Soient O le point de concours et $X = (BC) \cap (B'C')$, $Y = (CA) \cap (C'A')$, $Z = (AB) \cap (A'B')$. Appliquons Ménélaüs (théorème 6.3.1) aux triangles OBC, OCA, OAB coupés respectivement par les droites $(B'C'X)$, $(C'A'Y)$, $(A'B'Z)$:

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{B'B}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{C'O}} = -1, \quad \frac{\overline{OC'}}{\overline{C'C}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'O}} = -1, \quad \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'A}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'O}} = -1.$$

Multiplions ces trois égalités. Les facteurs relatifs à A' se regroupent en $\frac{\overline{AA}}{\overline{A'O}} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{A'A}} = \frac{\overline{AA}}{\overline{A'A}} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{A'O}} = (-1)(-1) = 1$, et de même pour B' et C'. Il reste $\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = -1$, et Ménélaüs dans le triangle ABC donne l'alignement de X, Y, Z.

Sens réciproque. Supposons X, Y, Z alignés. Les triangles YAA' et XBB' sont en perspective par le point Z : en effet (YX), (AB) et $(A'B')$ passent par Z. Par le sens direct, les points $(AA') \cap (BB')$, $(YA) \cap (XB)$ et $(YA') \cap (XB')$ sont alignés. Or $(YA) \cap (XB) = (CA) \cap (CB) = C$ et $(YA') \cap (XB') = (C'A') \cap (C'B') = C'$. Donc la droite (CC') passe par $O = (AA') \cap (BB')$: les trois droites concourent. ■



Théorème de Desargues : deux triangles en perspective par le point O le sont aussi par une droite (rouge).

Théorème 12.3.2 (Pascal)

Soient A, B, C, D, E, F six points d'un cercle (dans un ordre quelconque). Alors les trois points

$$X = (AB) \cap (DE), \qquad Y = (BC) \cap (EF), \qquad Z = (CD) \cap (FA)$$

sont alignés (droite de Pascal de l'hexagone $ABCDEF$).

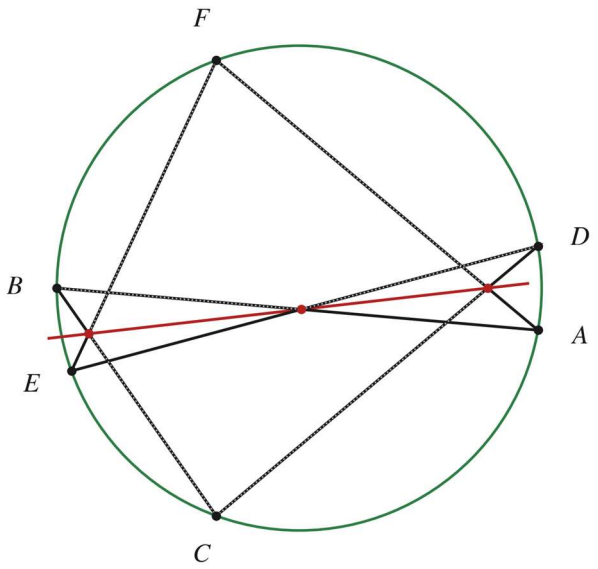
Démonstration. Les droites (AB), (CD), (EF) forment un triangle PQR, avec $P = (AB) \cap (CD)$, $Q = (CD) \cap (EF)$, $R = (EF) \cap (AB)$. Appliquons Ménélaüs à ce triangle et aux trois droites (DEX), (BCY), (FAZ) $(D, C, Z \in (PQ),\ E, F, Y \in (QR),\ A, B, X \in (RP))$:

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{DQ}} \cdot \frac{\overline{QE}}{\overline{ER}} \cdot \frac{\overline{RX}}{\overline{XP}} = -1, \quad \frac{\overline{PC}}{\overline{CQ}} \cdot \frac{\overline{QY}}{\overline{YR}} \cdot \frac{\overline{RB}}{\overline{BP}} = -1, \quad \frac{\overline{PZ}}{\overline{ZQ}} \cdot \frac{\overline{QF}}{\overline{FR}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{AP}} = -1.$$

Multiplions. Les facteurs contenant les six points du cercle se regroupent par sommet du triangle :

$$\frac{\overline{PC} \cdot \overline{PD}}{\overline{AP} \cdot \overline{BP}} = \frac{\overline{PC} \cdot \overline{PD}}{\overline{PA} \cdot \overline{PB}} = 1, \quad \frac{\overline{QE} \cdot \overline{QF}}{\overline{DQ} \cdot \overline{CQ}} = \frac{\overline{QE} \cdot \overline{QF}}{\overline{QD} \cdot \overline{QC}} = 1, \quad \frac{\overline{RA} \cdot \overline{RB}}{\overline{ER} \cdot \overline{FR}} = \frac{\overline{RA} \cdot \overline{RB}}{\overline{RE} \cdot \overline{RF}} = 1,$$

par la puissance des points P, Q, R par rapport au cercle (théorème 5.1.2). Il reste $\frac{\overline{RX}}{\overline{XP}} \cdot \frac{\overline{QY}}{\overline{YR}} \cdot \frac{\overline{PZ}}{\overline{ZQ}} = -1$, et Ménélaüs dans le triangle PQR donne l'alignement de X, Y, Z. ■



Théorème de Pascal pour un hexagone croisé : les trois points rouges sont alignés.

Méthode 12.3.3 — Pascal dégénéré : le vrai outil olympique

On peut faire coïncider deux points consécutifs de l'hexagone : la corde correspondante devient alors la tangente en ce point. La démonstration ci-dessus reste valable mot pour mot, car la puissance d'un point P situé sur la tangente en A vaut $PA^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PA}$ (théorème 5.1.2). Exemples d'utilisation :

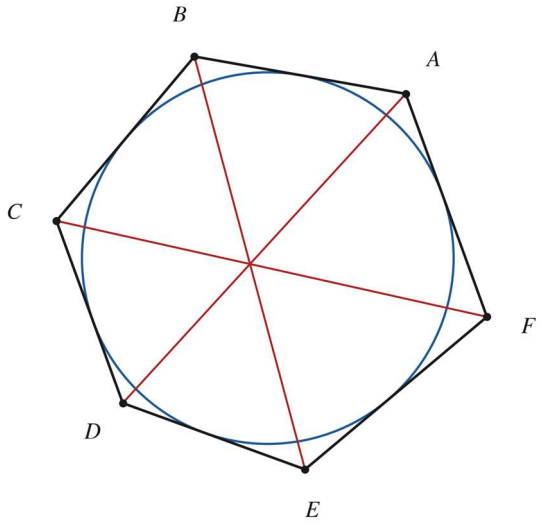
- $AABCDE$: la tangente en A remplace (AB) ;
- $AABBCC$: les tangentes en A, B, C coupent respectivement (BC), (CA), (AB) en trois points alignés ; par Desargues (réciproque), le triangle formé par les tangentes est en perspective avec ABC ;
- $AABCCD$: configuration « symédiane ».

Théorème 12.3.4 (Brianchon)

Si un hexagone $ABCDEF$ est circonscrit à un cercle, ses trois grandes diagonales (AD), (BE), (CF) sont concourantes.

Démonstration. Notons $T_1, \dots, T_6$ les points de contact des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$, $[FA]$. Le sommet A est l'intersection des tangentes en T_6 et T_1 ; par la proposition 12.2.2 (a), sa polaire est (T_6T_1). De même, les polaires de B, C, D, E, F sont (T_1T_2), (T_2T_3), (T_3T_4), (T_4T_5), (T_5T_6).

Soit $U = (T_6T_1) \cap (T_3T_4)$; il est sur les polaires de A et de D, donc (La Hire) A et D sont sur la polaire de U : cette polaire est (AD). De même, (BE) est la polaire de $V = (T_1T_2) \cap (T_4T_5)$ et (CF) celle de $W = (T_2T_3) \cap (T_5T_6)$. Par Pascal appliqué à l'hexagone $T_1T_2T_3T_4T_5T_6$, les points V, W, U sont alignés sur une droite ℓ. Par La Hire, leurs polaires (BE), (CF), (AD) passent par le pôle de ℓ : elles sont concourantes. (Brianchon est le dual de Pascal par polarité.) ■



Théorème de Brianchon : les trois grandes diagonales d'un hexagone circonscrit sont concourantes.

12.4 Exemples résolus

Exemple 12.4.1 (La polaire du point d'intersection des diagonales). *Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique, $[AC]$ n'étant pas un diamètre. Montrer que la tangente en A, la tangente en C et la droite (BD) sont concourantes si, et seulement si, $ABCD$ est harmonique.*

Solution. C'est l'équivalence (a) ⟺ (b) de la proposition 11.2.2. La polarité en donne une lecture éclairante : les tangentes en A et C se coupent au pôle T de (AC) (proposition 12.2.2 (a)). Dire que $T \in (BD)$ équivaut, par La Hire, à dire que le pôle de (BD) appartient à (AC) : la condition est symétrique entre les deux diagonales, comme la condition métrique $AB \cdot CD = BC \cdot DA$.

Exemple 12.4.2 (Le théorème du papillon). *Soit $[AB]$ une corde d'un cercle Γ, de milieu M. Deux autres cordes $[PQ]$ et $[RS]$ passent par M. Les droites (PS) et (RQ) coupent (AB) en X et Y. Montrer que M est le milieu de $[XY]$.*

Solution. Projetons depuis S les quatre points A, B, P, R de Γ sur la droite (AB) : les droites (SA), (SB), (SP), (SR) coupent (AB) respectivement en A, B, X et M (car (SR) est la corde $[RS]$, qui passe par M). Donc $(A, B; X, M) = (A, B; P, R)_\Gamma$ (proposition 12.1.2).

Projetons maintenant depuis Q ces mêmes points : (QA), (QB), (QR), (QP) coupent (AB) en A, B, Y et M, d'où

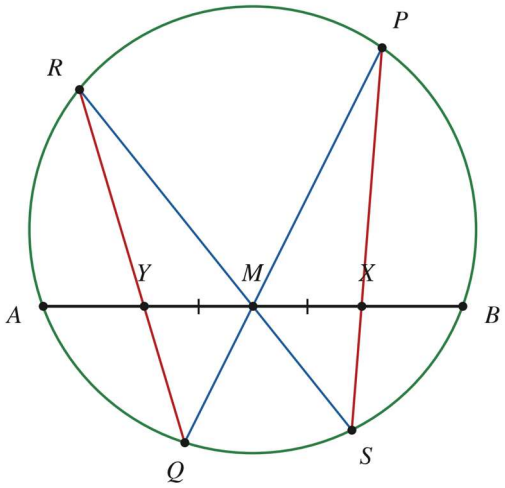
$$(A,B;Y,M) = (A,B;R,P)_\Gamma = \frac{1}{(A,B;P,R)_\Gamma}.$$

Par conséquent $(A,B;X,M)\cdot(A,B;Y,M) = 1$.

Munissons (AB) d'une abscisse d'origine M, avec $A=-a$ et $B=a$. Si X et Y ont pour abscisses x et y,

$$(A,B;X,M) = \frac{-a-x}{a-x}:\frac{-a}{a} = \frac{x+a}{a-x}, \qquad (A,B;Y,M) = \frac{y+a}{a-y}.$$

L'égalité $(x+a)(y+a) = (a-x)(a-y)$ se simplifie en $2a(x+y)=0$, donc $x+y=0$: M est bien le milieu de $[XY]$.



Théorème du papillon : M est le milieu de [XY].

12.5 Exercices

Exercice 12.1 ★. Montrer que $(A,B;C,D) = -1$ entraîne $(C,D;A,B) = -1$ et $(B,A;C,D) = -1$.

Exercice 12.2 ★★. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et P un point extérieur. Les tangentes issues de P touchent $\mathcal{C}$ en U,V. Une sécante issue de P coupe $\mathcal{C}$ en M,N. Montrer que (UV) coupe (MN) en le conjugué harmonique de P par rapport à M,N.

Exercice 12.3 ★★ (application de La Hire). Soit ABC un triangle et ω son cercle inscrit, de points de contact X,Y,Z sur $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Montrer que la polaire de A par rapport à ω est la droite (YZ), et retrouver ainsi la division harmonique $(B,C;X,T) = -1$ où $T = (YZ)\cap(BC)$.

Exercice 12.4 ★★. Soient A,B,C,D quatre points d'un cercle Γ. Montrer que $|(A,B;C,D)_\Gamma| = \frac{CA\cdot DB}{CB\cdot DA}$, où les longueurs sont celles des cordes, et que, si A,B,C,D sont dans cet ordre sur Γ, le quadrilatère $ABCD$ est harmonique si, et seulement si, $(A,C;B,D)_\Gamma = -1$.

Exercice 12.5 ★★. Soit $ABCDEF$ un hexagone inscrit dans un cercle tel que $(AB)\parallel(DE)$ et $(BC)\parallel(EF)$. Montrer que $(CD)\parallel(FA)$.

12.6 Corrigés

Solution de l'exercice 12.1. Les formules de symétrie du birapport donnent $(B,A;C,D) = \frac{1}{(A,B;C,D)}$ et $(C,D;A,B) = (A,B;C,D)$. Comme -1 est son propre inverse, les deux relations suivent.

Solution de l'exercice 12.2. C'est la proposition 12.2.2 (a) et (c) : (UV) est la polaire de P.

Solution de l'exercice 12.3. Les côtés sont tangents à ω, donc (propriété (b) de la proposition 12.2.2) le pôle de (AB) est Z et le pôle de (AC) est Y. Comme $A \in (AB)$ et $A \in (AC)$, le théorème de La Hire donne : la polaire de A passe par Z et par Y, donc c'est (YZ).

La droite (BC) touche ω au seul point X : (BC) est donc la polaire de X. Comme $T \in (BC)$, La Hire donne que X est sur la polaire de T ; et comme $T \in (YZ) =$ polaire de A, La Hire donne que A est sur la polaire de T. La polaire de T est donc (AX). Soit $W = (YZ) \cap (AX)$: la propriété (c) appliquée à la sécante (YZ) issue de T donne $(Y,Z;W,T) = -1$. Projetons depuis A sur la droite (BC) : $Y \mapsto C$, $Z \mapsto B$, $W \mapsto X$, $T \mapsto T$, d'où $(C,B;X,T) = -1$, et donc $(B,C;X,T) = -1$.

Solution de l'exercice 12.4. Depuis un point $P \in \Gamma$, la loi des sinus donne $\frac{\sin\widehat{APC}}{\sin\widehat{BPC}} = \frac{AC}{BC}$ (cordes sous-tendues), et de même avec D. En formant le quotient, on obtient la formule. Si A,B,C,D sont dans cet ordre sur Γ, les points B et D séparent A et C, donc $(A,C;B,D)_\Gamma < 0$, et $|(A,C;B,D)_\Gamma| = \frac{BA\cdot DC}{BC\cdot DA}$. La condition $(A,C;B,D)_\Gamma = -1$ se lit donc $AB \cdot CD = BC \cdot AD$: c'est la définition du quadrilatère harmonique.

Solution de l'exercice 12.5. Par Pascal, les points $(AB) \cap (DE)$, $(BC) \cap (EF)$, $(CD) \cap (FA)$ sont alignés. Les deux premiers sont à l'infini (droites parallèles) ; la droite de Pascal est donc la droite à l'infini, et le troisième point y appartient aussi : $(CD) \parallel (FA)$.

12.7 Problèmes d'entraînement

Exercice 12.6 ★★. Soit ABC un triangle et P un point. Les droites (AP), (BP), (CP) coupent (BC), (CA), (AB) en D,E,F. Montrer que $(EF) \cap (BC)$, $(FD) \cap (CA)$, $(DE) \cap (AB)$ sont alignés (droite trilinéaire polaire de P).

Exercice 12.7 ★★ (Steiner). Soient Γ un cercle et A,B,C,D quatre points de Γ. Montrer que les droites (AB), (CD) et la polaire du point $(AC) \cap (BD)$ sont concourantes ou parallèles.

Exercice 12.8 ★★. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Montrer que les tangentes en A et C et la droite (BD) sont concourantes ou parallèles si, et seulement si, les tangentes en B et D et la droite (AC) le sont.

Exercice 12.9 ★★★ (Pascal dégénéré). Soit ABC un triangle inscrit dans Γ et $P \in \Gamma$. Montrer que les projections de P sur les trois côtés sont alignées (droite de Simson) en utilisant Pascal appliqué à un hexagone bien choisi.

À retenir — Bilan du chapitre

- Birapport : invariant par projection ; se calcule aussi sur un cercle.
- Polaire : $OP \cdot OP^* = R^2$; La Hire ; division harmonique.
- Brocard : le triangle diagonal d'un quadrilatère cyclique est autopolaire, O en est l'orthocentre.
- Desargues, Pascal (et ses dégénérescences avec des tangentes), Brianchon.

- Une figure projective se « normalise » : on peut envoyer une droite à l'infini.

PARTIE IV — Objectif IMO

CHAPITRE 13

13 Le bestiaire des lemmes de configuration

Un problème de géométrie de l'OIM est presque toujours la superposition de deux ou trois configurations connues. Le compétiteur entraîné ne « cherche » pas au hasard : il reconnaît. Ce chapitre rassemble les configurations qu'il faut savoir identifier en dix secondes sur une figure, avec leurs démonstrations : celles qui ont déjà été faites sont rappelées par une référence précise, les autres sont données en entier.

13.1 Autour de l'incentre et du milieu d'arc

Théorème 13.1.1 (Lemme du trident)

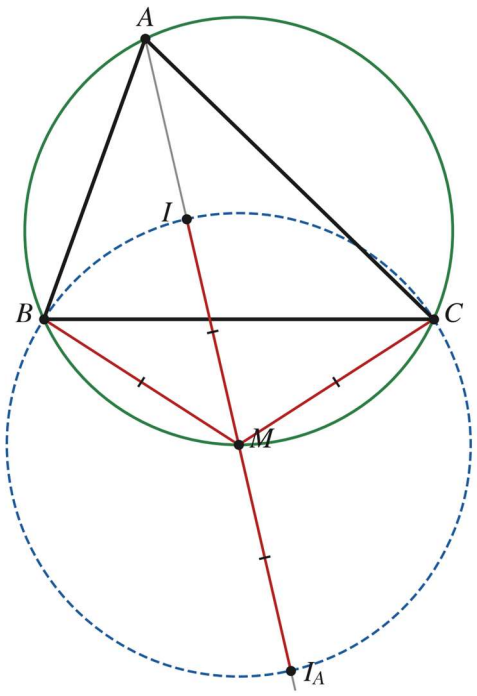
Soit ABC un triangle d'incentre I, de A-exincentre I_A, inscrit dans Γ. Soit M le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A. Alors

$$MB = MC = MI = MI_A,$$

et M est le milieu de $[II_A]$: autrement dit, M est le centre du cercle $\odot(BICI_A)$.

Démonstration. Les cordes $[MB]$ et $[MC]$ sous-tendent des arcs égaux, donc $MB = MC$; et M est sur la bissectrice (AI) (corollaire 2.2.2 (b)). L'égalité $MI = MB$ est l'étape 1 de la preuve du théorème 4.3.4 : les angles $\widehat{MBI}$ et $\widehat{MIB}$ valent tous deux $\frac{A}{2} + \frac{B}{2}$.

Pour I_A : dans le triangle ABI_A, l'angle en A vaut $\frac{A}{2}$ et l'angle en B vaut $B + \frac{180^\circ - B}{2} = 90^\circ + \frac{B}{2}$, donc $\widehat{AI_AB} = 90^\circ - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = \frac{C}{2}$. D'autre part $\widehat{MBI_A} = \widehat{IBI_A} - \widehat{IBM} = 90^\circ - \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \frac{C}{2}$ (proposition 2.4.1). Le triangle MBI_A a deux angles égaux : $MI_A = MB$. Comme I, M, I_A sont alignés sur la bissectrice, avec $MI = MI_A$ et $I \neq I_A$, M est le milieu de $[II_A]$. ■



Lemme du trident : M est équidistant de B, C, I et I_A.

Ce résultat, ses preuves (chasse aux angles aux chapitres 4 et 13, inversion au chapitre 10, complexes au chapitre 9) et ses conséquences constituent sans doute le lemme le plus rentable de toute la géométrie olympique.

Proposition 13.1.2 (Relations métriques)

Avec les mêmes notations :

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{s-a}{\cos\frac{A}{2}}, \qquad AI \cdot AI_A = AB \cdot AC, \qquad AI \cdot IM = 2Rr,$$

$$\widehat{BIC} = 90° + \frac{A}{2}, \qquad \widehat{BI_AC} = 90° - \frac{A}{2}.$$

Démonstration. Dans le triangle AZI rectangle en Z (Z point de contact sur $[AB]$), $IZ = r$, $AZ = s - a$ et $\widehat{IAZ} = \frac{A}{2}$: d'où $AI = \frac{r}{\sin(A/2)} = \frac{s-a}{\cos(A/2)}$. De même, avec le point de contact Z_A du cercle exinscrit, $AI_A = \frac{AZ_A}{\cos(A/2)} = \frac{s}{\cos(A/2)}$, d'où $AI \cdot AI_A = \frac{s(s-a)}{\cos^2(A/2)} = bc$ grâce à $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}$ (théorème 9.2.1). Comme I est intérieur à Γ, $AI \cdot IM = -\mathrm{pow}(I,\Gamma) = R^2 - OI^2 = 2Rr$ (théorème 4.3.4). Les deux angles sont la proposition 2.4.1. ■

Lemme 13.1.3 (Longueurs de contact)

Le cercle inscrit touche $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ en X, Y, Z avec

$$AY = AZ = s - a, \qquad BZ = BX = s - b, \qquad CX = CY = s - c.$$

Le cercle A-exinscrit touche $[BC]$ en X_A avec $BX_A = s - c$ et $CX_A = s - b$: X et X_A sont symétriques par rapport au milieu de $[BC]$. De plus, si X' est le point diamétralement opposé à X sur le cercle inscrit, alors A, X', X_A sont alignés.

Démonstration. Les longueurs sont le théorème 4.3.2 ; l'alignement est l'exemple 8.1.4. ■

13.2 Symédiane et quadrilatère harmonique

Théorème 13.2.1 (Caractérisations de la symédiane)

Dans un triangle ABC inscrit dans Γ, les objets suivants coïncident :

(a) la réflexion de la A-médiane par rapport à la bissectrice intérieure de $\hat{A}$;

(b) la droite (AT), où T est le pôle de (BC) (intersection des tangentes en B et C) ;

(c) la cévienne de pied S vérifiant $\frac{BS}{SC} = \frac{c^2}{b^2}$;

(d) la corde (AX) telle que $ABXC$ soit un quadrilatère harmonique ;

(e) le lieu des points P intérieurs à l'angle $\hat{A}$ tels que $\frac{d(P,(AB))}{d(P,(AC))} = \frac{AB}{AC}$.

Démonstration. C'est la proposition 11.3.2 ; le point T est bien le pôle de (BC) par la proposition 12.2.2 (a). ■

Proposition 13.2.2 (Deux conséquences fréquentes)

(a) Le cercle passant par B et tangent à (AC) en A, et le cercle passant par C et tangent à (AB) en A, se recoupent en un point Q de la A-symédiane, et les triangles QBA et QAC sont semblables.

(b) Dans un quadrilatère harmonique $ABXC$, on a $\frac{XB}{XC} = \frac{AB}{AC}$: X est sur le cercle d'Apollonius de $[BC]$ passant par A.

Démonstration.

(a) Le cercle ω_1 passant par B et tangent à (AC) en A donne, par le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{QAC} = \widehat{QBA}$; le cercle ω_2 passant par C et tangent à (AB) en A donne $\widehat{QAB} = \widehat{QCA}$. Les triangles QBA et QAC ont donc deux angles égaux : ils sont semblables, et $\frac{QB}{QA} = \frac{QA}{QC} = \frac{AB}{AC}$. Les distances de Q aux droites (AB) et (AC) valent $QA\sin\widehat{QAB}$ et $QA\sin\widehat{QAC}$; leur rapport est

$$\frac{\sin\widehat{QAB}}{\sin\widehat{QAC}} = \frac{\sin\widehat{QAB}}{\sin\widehat{QBA}} = \frac{QB}{QA} = \frac{AB}{AC},$$

par la loi des sinus dans le triangle QAB. Par le théorème 13.2.1 (e), Q est sur la A-symédiane (il est intérieur à l'angle $\widehat{BAC}$: le cercle ω_1, tangent à (AC) en A, est tout entier du côté de (AC) où se trouve B, et ω_2 du côté de (AB) où se trouve C).

(b) La définition $AB \cdot XC = AC \cdot XB$ donne $\frac{XB}{XC} = \frac{AB}{AC}$; A et X sont donc sur le même cercle d'Apollonius (théorème 11.1.1). ■

13.3 Similitude spirale et point de Miquel

Lemme 13.3.1 (Centre de la similitude spirale)

Si (AB) et (CD) se coupent en X, le centre Ω de la similitude directe envoyant $[AB]$ sur $[CD]$ est le second point commun de $\odot\,(XAC)$ et $\odot\,(XBD)$. Ce même point Ω est le centre de la similitude envoyant $[AC]$ sur $[BD]$.

Démonstration. C'est le théorème 8.3.3. ■

Méthode 13.3.2 — Reconnaître une similitude spirale

Cherchez sur la figure : deux cercles sécants, ou deux triangles semblables partageant un sommet, ou quatre points formant deux segments « correspondants ». Si deux cercles se coupent en P et Q, alors Q est le centre de la similitude envoyant le premier sur le second : pour toute droite passant par P et coupant les cercles en M et M', le triangle QMM' garde une forme constante (exemple 8.4.1).

13.4 Les faits sur l'orthocentre

Proposition 13.4.1 (Faits sur l'orthocentre)

Soit H l'orthocentre de ABC, Γ le cercle circonscrit de centre O et de rayon R, M_A le milieu de $[BC]$, H_A le pied de la hauteur issue de A et A' l'antipode de A.

(a) Le symétrique de H par rapport à la droite (BC) appartient à Γ.

(b) Le symétrique de H par rapport à M_A est A' ; $BHCA'$ est un parallélogramme.

(c) $AH = 2\,OM_A = 2R|\cos A|$ et, si le triangle est acutangle, $HH_A = 2R\cos B\cos C$.

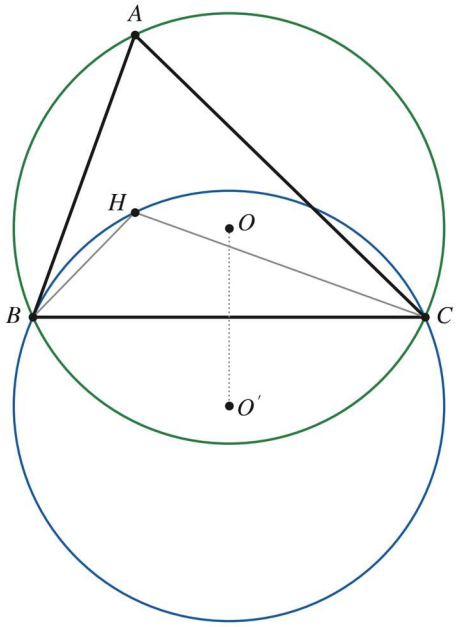
(d) $\odot\,(BHC)$ est le symétrique de Γ par rapport à (BC) : même rayon R, centre symétrique de O. En particulier, si le triangle est acutangle, $\widehat{BHC} = 180° - A$.

(e) Si ABC est acutangle, H est l'incentre du triangle orthique, et les côtés du triangle orthique sont antiparallèles aux côtés de ABC.

Démonstration.

(a) et (b) sont le théorème 7.3.1 ; (c) est la proposition 7.1.1 et l'exemple 7.6.1 ; (e) est le théorème 7.4.1.

(b) Soit H_1 le symétrique de H par rapport à (BC) ; il est sur Γ par (a). La symétrie d'axe (BC) envoie Γ, qui passe par B, C, H_1, sur un cercle Γ' de même rayon passant par B, C et H : c'est $\odot\,(BHC)$, de centre le symétrique O' de O. Si le triangle est acutangle, H_1 est sur l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant pas A, donc $\widehat{BHC} = \widehat{BH_1C} = 180° - A$. ■



Le cercle BHC (bleu) est le symétrique du cercle circonscrit par rapport à (BC).

13.5 Le cercle mixtilinéaire

Définition 13.5.1 (Cercle mixtilinéaire)

Le cercle A-mixtilinéaire inscrit ω_A est le cercle tangent aux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ et tangent intérieurement au cercle circonscrit Γ, en un point noté T. Son existence et son unicité découlent de la proposition 10.2.4 (d) : c'est l'image du cercle A-exinscrit par l'inversion $\sqrt{bc}$.

Proposition 13.5.2 (Propriétés du cercle mixtilinéaire)

Soient E et F les points de contact de ω_A avec (AB) et (AC), et T son point de tangence avec Γ. Alors :

(a) I est le milieu de $[EF]$;

(b) la droite (TI) passe par le milieu N de l'arc $\overset{\frown}{BAC}$ (l'arc contenant A) ;

(c) (AT) et (AX_A) sont isogonales, où X_A est le point de contact du cercle A-exinscrit avec $[BC]$.

Démonstration. Le point T est sur l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant pas A. Notons M_B et M_C les milieux des arcs $\overset{\frown}{CA}$ et $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas respectivement B et C ; les bissectrices (BI) et (CI) passent par M_B et M_C.

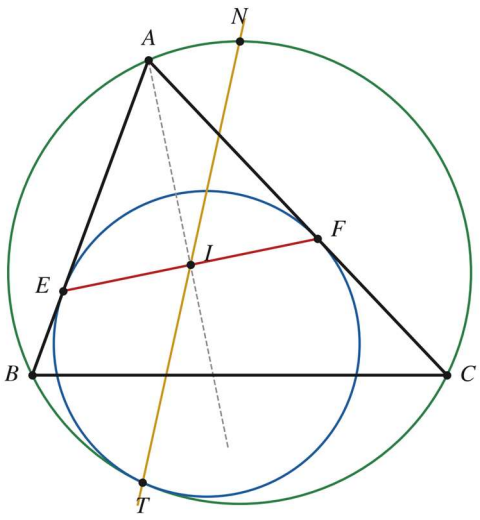
Étape 1 : T, E, M_C sont alignés, ainsi que T, F, M_B. L'homothétie de centre T et de rapport positif qui envoie ω_A sur Γ (tangence intérieure, théorème 8.1.2) envoie la tangente (AB) à ω_A en E sur une tangente à Γ parallèle à (AB), et conserve le côté de la tangente où se trouve le cercle. Le cercle ω_A est du côté de (AB) où se trouve C ; l'image de E est donc le point de Γ où la tangente est parallèle à (AB) et laisse Γ du côté de C, c'est-à-dire le point de Γ le plus éloigné de C dans la direction

perpendiculaire à (AB) : le milieu M_C de l'arc $\widehat{AB}$ ne contenant pas C (exemple 2.2.4 : la tangente en ce point est parallèle à (AB)). Donc T, E, M_C sont alignés. De même pour F et M_B.

(a). Appliquons le théorème de Pascal (théorème 12.3.2) à l'hexagone $B\,M_B\,T\,M_C\,C\,A$ inscrit dans Γ. Les trois points $(BM_B) \cap (M_C C) = I$, $(M_B T) \cap (CA) = F$ et $(TM_C) \cap (AB) = E$ sont alignés. Ainsi $I \in (EF)$. Comme $AE = AF$ (tangentes issues de A) et que I est sur la bissectrice de $\widehat{EAF}$, qui est la médiatrice de $[EF]$, le point I est l'intersection de (EF) avec cette médiatrice : c'est le milieu de $[EF]$.

(b). Montrons d'abord que B, E, I, T sont cocycliques. Les points T et C sont du même côté de la corde $[BM_C]$, donc $\widehat{BTE} = \widehat{BTM_C} = \widehat{BCM_C} = \frac{C}{2}$. D'autre part, $(EF) \perp (AI)$ et $E \in [AB]$, donc $\widehat{BIE} = \widehat{BIA} - \widehat{EIA} = \left(90° + \frac{C}{2}\right) - 90° = \frac{C}{2}$. Les points T et I sont du même côté de (AB) : par le théorème 2.2.5, B, E, I, T sont cocycliques. Comme E et T sont de part et d'autre de (BI), $\widehat{BTI} = 180° - \widehat{BEI} = \widehat{AEF} = 90° - \frac{A}{2}$ (triangle AEF isocèle). De même $\widehat{CTI} = 90° - \frac{A}{2}$. La droite (TI) est donc la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BTC}$; elle passe par le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ opposé à T, c'est-à-dire N.

(c). Soit ψ l'inversion $\sqrt{bc}$ (proposition 10.2.4). Elle échange le cercle exinscrit et ω_A, ainsi que (BC) et Γ ; le point de contact X_A du cercle exinscrit avec (BC) est donc envoyé sur le point de contact T de ω_A avec Γ. Or ψ est la composée d'une inversion de pôle A, qui conserve la droite (AX_A), et de la symétrie d'axe la bissectrice : $(AT) = \psi\big((AX_A)\big)$ est l'isogonale de (AX_A). ■



Cercle mixtilinéaire (bleu) : I est le milieu de [EF], et la droite (TI) passe par le milieu N de l'arc BAC.

13.6 Points de Humpty et de Dumpty

Proposition 13.6.1 (Point de Humpty)

Soit ABC un triangle acutangle, M le milieu de $[BC]$ et H l'orthocentre. Le second point d'intersection P de la médiane (AM) avec le cercle $\odot(BHC)$ (celui qui est situé sur le segment $[AM]$) vérifie

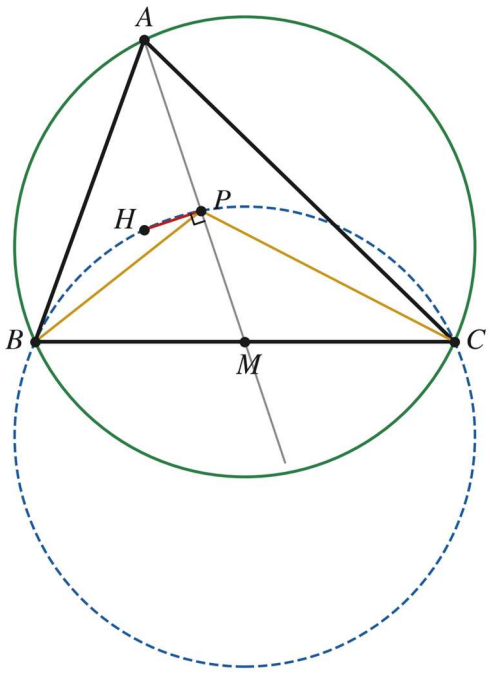
$$\widehat{BPC} = 180° - A, \qquad \widehat{PBC} = \widehat{PAB}, \qquad \widehat{PCB} = \widehat{PAC};$$

autrement dit, $\odot(ABP)$ et $\odot(ACP)$ sont tangents à (BC) en B et en C, d'où $MP \cdot MA = MB^2$ et $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$. De plus, P est le projeté orthogonal de H sur (AM).

Démonstration. Soit P le point du segment $[AM]$ tel que $MP \cdot MA = MB^2$ (il existe car $MA > MB$: l'angle A étant aigu, A est extérieur au cercle de diamètre $[BC]$). Par le théorème 5.1.4, (MB) est tangente en B au cercle $\odot(ABP)$, et, comme $MC = MB$, (MC) est tangente en C au cercle $\odot(ACP)$. Le théorème de l'angle tangentiel donne $\widehat{PBC} = \widehat{PAB}$ et $\widehat{PCB} = \widehat{PAC}$. Dans le triangle PBC : $\widehat{BPC} = 180° - \left(\widehat{PAB} + \widehat{PAC}\right) = 180° - A$. Comme $\widehat{BHC} = 180° - A$ et que H et P sont du même côté de (BC), $P \in \odot(BHC)$ (théorème 2.2.5).

Les triangles MBP et MAB sont semblables (angle en M commun, $\widehat{MBP} = \widehat{MAB}$), d'où $\frac{PB}{AB} = \frac{MB}{MA}$; de même $\frac{PC}{AC} = \frac{MC}{MA}$. Comme $MB = MC$, $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$.

Enfin, prenons l'origine en O. Le centre de $\odot(BHC)$ est le symétrique O' de O par rapport à (BC), soit $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (proposition 13.4.1 (d)). Le point diamétralement opposé à H sur ce cercle est A^* défini par $\overrightarrow{OA^*} = 2\overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, c'est-à-dire le symétrique de A par rapport à M : il est sur la droite (AM), au-delà de M. Le point P, distinct de A^*, est sur le cercle de diamètre $[HA^*]$ et sur la droite (AA^*) : $\widehat{HPA^*} = 90°$, et P est le projeté orthogonal de H sur (AM). ■



Point de Humpty P : il est sur la médiane (AM), sur le cercle BHC (pointillés), et HP est perpendiculaire à (AM).

Proposition 13.6.2 (Point de Dumpty)

Soit ABC un triangle acutangle. Le centre Q de la similitude directe envoyant $[BA]$ sur $[AC]$ vérifie

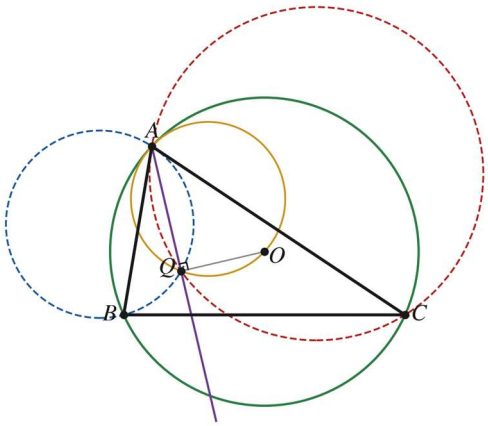
$$QA^2 = QB \cdot QC, \qquad \frac{QB}{QC} = \frac{AB^2}{AC^2}, \qquad \widehat{QBA} = \widehat{QAC};$$

il appartient à la A-symédiane et au cercle de diamètre $[AO]$. Lorsque $AB = AC$, $Q = O$.

Démonstration. Par définition de la similitude directe de centre Q envoyant $B \mapsto A$ et $A \mapsto C$, les triangles QBA et QAC sont directement semblables, d'où $\frac{QB}{QA} = \frac{QA}{QC} = \frac{BA}{AC}$, ce qui donne $QA^2 = QB \cdot QC$

et $\frac{QB}{QC} = \frac{QB}{QA} \cdot \frac{QA}{QC} = \frac{AB^2}{AC^2}$, ainsi que $\widehat{QBA} = \widehat{QAC}$ et $\widehat{QAB} = \widehat{QCA}$. Ces deux égalités d'angles signifient que (AC) est tangente en A au cercle $\odot(ABQ)$ et que (AB) est tangente en A au cercle $\odot(ACQ)$ (réciproque de l'angle tangentiel, proposition 3.3.1) : Q est le point de la proposition 13.2.2 (a), donc il est sur la A-symédiane.

Pour le cercle de diamètre $[AO]$: l'angle $\widehat{BQC}$ du côté opposé à A vaut $360° - \widehat{BQA} - \widehat{AQC}$, et $\widehat{BQA} + \widehat{AQC} = (180° - \widehat{QBA} - \widehat{QAB}) + (180° - \widehat{QAC} - \widehat{QCA}) = 360° - 2(\widehat{QAC} + \widehat{QAB}) = 360° - 2A$. Donc l'angle $\widehat{BQC}$ vaut $2A = \widehat{BOC}$, et B, Q, O, C sont cocycliques. Il vient $\widehat{OQC} = \widehat{OBC} = 90° - A$ (triangle OBC isocèle d'angle au sommet $2A$), puis $\widehat{AQO} = \widehat{AQC} - \widehat{OQC} = (180° - A) - (90° - A) = 90°$, en utilisant $\widehat{AQC} = 180° - \widehat{QAC} - \widehat{QCA} = 180° - A$. Donc Q est sur le cercle de diamètre $[AO]$. Si $AB = AC$, alors les angles B et C sont égaux et la rotation de centre O qui envoie B sur A envoie aussi A sur C (car $OA = OB = OC$ et les angles au centre $\widehat{BOA} = 2C$ et $\widehat{AOC} = 2B$ sont égaux, dans le même sens) ; par unicité de la similitude (théorème 8.3.2), $Q = O$. ■



Point de Dumpty Q : second point commun des cercles tangents en A à (AC) et à (AB) (pointillés), sur la symédiane et sur le cercle de diamètre [AO] (or).

13.7 Exercices

Exercice 13.1 ★★. Soit ABC un triangle d'incentre I et soit M le second point d'intersection de (AI) avec Γ. Montrer que $AI \cdot AM = AI^2 + 2Rr$, puis calculer AM en fonction de a, b, c, R.

Exercice 13.2 ★. Soient deux cercles sécants en P et Q, et une droite variable passant par P coupant les cercles en A et B. Montrer que $\frac{QA}{QB}$ est constant et que le triangle QAB garde une forme constante.

Exercice 13.3 ★★. Soit ABC un triangle, X le point de contact du cercle inscrit sur $[BC]$ et X_A celui du cercle A-exinscrit. Montrer que $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{BX_A}{X_AC} = 1$ et interpréter.

Exercice 13.4 ★★. Montrer que le point de Nagel Na, l'incentre I et le centre de gravité G sont alignés avec $\overrightarrow{G\mathrm{Na}} = -2\overrightarrow{GI}$.

Exercice 13.5 ★★. Soit ABC un triangle non rectangle en A et T le pôle de (BC). Montrer que $OT = \frac{R}{|\cos A|}$ et $TB = TC = \frac{a}{2|\cos A|}$.

13.8 Corrigés

Solution de l'exercice 13.1. On a $AM \cdot BC = AB \cdot MC + AC \cdot MB$ par le théorème de Ptolémée appliqué à $ABMC$, et $MB = MC$, d'où $AM = MB \cdot \frac{b+c}{a}$; comme $MB = 2R\sin\frac{A}{2}$,

$$AM = \frac{2R(b+c)}{a}\sin\frac{A}{2} = \frac{2R(b+c)}{a}\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

Comme $AI = \frac{s-a}{\cos(A/2)}$, le produit $AI \cdot AM$ vaut $\frac{2R(b+c)(s-a)}{a}\tan\frac{A}{2}$; attention à ne pas le confondre avec $AI \cdot AI_A = bc$ (le point M n'est pas I_A mais le milieu de $[II_A]$). Pour la relation demandée, on écrit $AI \cdot AM = AI(AI + IM) = AI^2 + 2Rr$ par la proposition 13.1.2 (relations métriques).

Solution de l'exercice 13.2. Q est le centre de la similitude directe envoyant le premier cercle sur le second et A sur B (lemme de la similitude spirale, méthode 13.3.2) : le rapport $\frac{QB}{QA}$ et l'angle $\widehat{AQB}$ sont ceux de cette similitude, donc constants.

Solution de l'exercice 13.3. Par le lemme des longueurs de contact, $\frac{BX}{XC} = \frac{s-b}{s-c}$ et $\frac{BX_A}{X_AC} = \frac{s-c}{s-b}$: le produit vaut 1, ce qui signifie que X et X_A sont conjugués isotomiques sur $[BC]$, c'est-à-dire symétriques par rapport au milieu de $[BC]$.

Solution de l'exercice 13.4. Le point de Nagel est $\mathrm{Na} = A + B + C - 2I$ en coordonnées vectorielles (chapitre 9 ; la combinaison est affine, donc indépendante de l'origine), donc $\mathrm{Na} = 3G - 2I$, c'est-à-dire $\mathrm{Na} - G = -2(I - G)$.

Solution de l'exercice 13.5. Supposons d'abord A aigu. Le triangle OBT est rectangle en B avec $\widehat{BOT} = \widehat{BOM_A} = A$ (moitié de l'angle au centre $\widehat{BOC} = 2A$). Donc $OT = \frac{OB}{\cos} = \frac{R}{\cos A}$ et $TB = R\tan A = \frac{a}{2\cos A}$ puisque $a = 2R\sin A$. Si A est obtus, $\widehat{BOT} = 180° - A$ et le même calcul donne les formules avec $|\cos A|$; enfin $TB = TC$ (tangentes issues de T).

À retenir (Les dix réflexes)

1. Incentre + cercle circonscrit ⇒ milieu d'arc, lemme du trident.
2. Deux cercles sécants ⇒ similitude spirale, axe radical.
3. Deux cercles tangents ⇒ homothétie, lemme d'Archimède.
4. Orthocentre ⇒ réflexions sur Γ, cercle des neuf points.
5. Tangente ⇒ angle tangentiel, puissance, polaire, symédiane.
6. Milieu ⇒ homothétie de rapport $1/2$ ou 2, droite des milieux.
7. Rapport de carrés ⇒ symédiane ou cercle d'Apollonius.
8. Quatre points alignés ⇒ birapport, division harmonique.
9. Trois cercles ⇒ centre radical.
10. Beaucoup de cercles concourants ⇒ inversion au point commun.

CHAPITRE 14

14 Stratégie, méthode et rédaction

Savoir des théorèmes ne suffit pas : il faut savoir quoi essayer, dans quel ordre, et quand abandonner une piste. Ce chapitre décrit la démarche d'un compétiteur expérimenté face à une figure inconnue, puis les règles de rédaction qui font gagner (ou perdre) des points.

14.1 Les sept étapes face à un problème

Méthode 14.1.1 — Protocole de résolution

1. Lire deux fois l'énoncé et souligner chaque hypothèse. Une hypothèse non utilisée est presque toujours le signe d'une erreur.
2. Faire une grande figure, précise, sur une page entière, à la règle et au compas : au moins 10 cm de côté. Un triangle générique (scalène, acutangle, sans symétrie accidentelle) ; jamais isocèle ni rectangle par mégarde.
3. Marquer les données : angles égaux avec les mêmes arcs, longueurs égales avec les mêmes traits, angles droits en carré.
4. Conjecturer : la figure suggère-t-elle des points alignés, cocycliques, des tangences, un milieu ? Notez toutes les conjectures, même celles dont vous n'avez pas besoin.
5. Reconnaître les configurations du chapitre 13.
6. Choisir une méthode (voir l'arbre ci-dessous) et lui accorder un budget de temps.
7. Rédiger en énonçant clairement chaque lemme intermédiaire.

14.2 Choisir sa méthode

Méthode 14.2.1 — Arbre de décision

- Beaucoup d'angles, de cercles, peu de longueurs ⇒ chasse aux angles (orientés !), cocyclicité.
- Rapports de longueurs le long de droites ⇒ Ceva, Ménélaüs, Thalès, puissance d'un point.
- Un point mobile, une propriété constante ⇒ transformation (rotation, homothétie, similitude spirale, inversion).
- Beaucoup de cercles passant par un même point P ⇒ inversion de pôle P.
- Tangences multiples ⇒ homothétie, puis inversion.
- Alignements et concourances « sans longueurs » ⇒ projectif (birapport, polaire, Desargues, Pascal).
- Triangle avec cercle circonscrit et incentre ⇒ nombres complexes sur le cercle unité.
- Céviennes, rapports d'aires, points définis par des rapports ⇒ coordonnées barycentriques.
- Perpendicularité, distances, une droite naturelle ⇒ coordonnées cartésiennes bien choisies.
- Rien ne marche ⇒ trigonométrie (loi des sinus dans chaque triangle).

Attention (Le coût des méthodes calculatoires).

Une solution par les complexes ou les barycentriques est sûre mais longue : comptez 40 à 90 minutes de calculs sans erreur. Ne la lancez qu'après avoir vérifié que la configuration s'y prête (un cercle privilégié pour les complexes, un triangle de référence naturel pour les barycentriques) et gardez une trace propre de chaque étape : une erreur de signe en fin de calcul coûte tout.

14.3 Trois techniques de déblocage

Méthode 14.3.1 — Le « point fantôme »

Pour montrer que le point X défini par la propriété $\mathcal{P}$ vérifie aussi $\mathcal{Q}$: définissez un point X' par $\mathcal{Q}$, prouvez que X' vérifie $\mathcal{P}$, puis concluez $X = X'$ par unicité. C'est la technique reine pour les problèmes du type « trois objets concourent ».

Méthode 14.3.2 — Remonter depuis la conclusion

Traduisez la conclusion en une suite d'équivalences jusqu'à obtenir un énoncé plus simple :

- « $XY \perp ZT$ » $\Leftrightarrow XZ^2 - XT^2 = YZ^2 - YT^2$;
- « P est sur l'axe radical » $\Leftrightarrow \mathrm{pow}(P, \mathcal{C}_1) = \mathrm{pow}(P, \mathcal{C}_2)$;
- « M milieu de $[XY]$ » : penser à une homothétie de rapport $1/2$ ou 2.

Méthode 14.3.3 — Chercher le cas particulier

Testez la configuration sur un triangle isocèle ou équilatéral : cela révèle souvent le point mystérieux (« c'est le milieu d'arc ! ») et permet d'éliminer les fausses conjectures. Attention : un cas particulier ne démontre rien.

14.4 Rédiger une solution qui vaut 7/7

À retenir (Les règles d'or de la rédaction)

1. Annoncer le plan en deux lignes : « Nous montrons d'abord que…, puis nous en déduisons… »
2. Nommer tous les points introduits, et dire par quelle propriété ils sont définis.
3. Utiliser les angles orientés modulo $180°$ dès qu'une configuration peut varier. Une preuve en angles non orientés doit traiter les cas de figure.
4. Ne jamais écrire « on voit sur la figure que ». La figure illustre, elle ne démontre pas.
5. Isoler les lemmes : un lemme énoncé et démontré séparément rapporte des points même si la fin échoue.
6. Signaler les cas dégénérés (points confondus, droites parallèles) et expliquer pourquoi ils ne posent pas problème.

7. Conclure explicitement : reprendre l'énoncé demandé et écrire « ce qui achève la démonstration ».

Exemple 14.4.1 (Deux rédactions du même argument). ***Mauvaise*** : *« Comme $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$, les points A, B, C, D sont cocycliques. »*

Bonne : *« Les points C et D étant du même côté de la droite (AB) et vérifiant $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$, ils voient $[AB]$ sous le même angle : A, B, C, D sont cocycliques. (En angles orientés : $\measuredangle(DA, DB) = \measuredangle(CA, CB)$, ce qui dispense de discuter la position relative.) »*

14.5 Gestion du temps en épreuve

Temps	Action
0–20 min	Lire les trois problèmes, faire les trois figures, classer par difficulté ressentie.
20–100 min	Attaquer le plus abordable. Le finir et le rédiger.
100–220 min	Le deuxième. Si rien après 40 minutes, changer de méthode (passer au calculatoire).
220–260 min	Le troisième, ou consolidation des acquis (lemmes partiels rédigés).
260–270 min	Relecture. Vérifier que chaque hypothèse a servi.

14.6 Programme d'entraînement

À retenir (Douze semaines vers l'OIM)

- **Semaines 1–3** : chapitres 2 à 5, 8 problèmes par semaine, chronométrés à 45 minutes.
- **Semaines 4–6** : chapitres 6 à 9. Un problème par jour résolu deux fois : une fois synthétiquement, une fois par le calcul.
- **Semaines 7–9** : chapitres 10 à 12 ; mémoriser le bestiaire du chapitre 13.
- **Semaines 10–12** : simulations complètes (4 h 30, trois problèmes de listes courtes), puis relecture critique de vos propres copies.

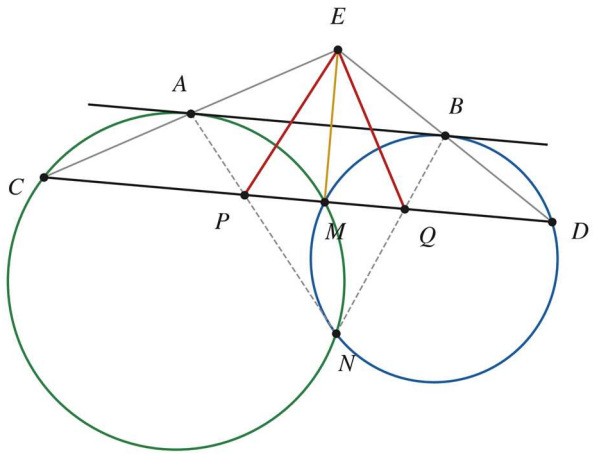
CHAPITRE 15

15 Problèmes de l'OIM entièrement corrigés

Voici sept problèmes de géométrie posés à l'Olympiade internationale de mathématiques, résolus intégralement. Pour chacun : l'énoncé, puis une rédaction complète telle qu'elle rapporterait 7/7. Travaillez-les d'abord seul, une heure chacun, avant de lire la solution.

15.1 OIM 2000, problème 1

Problème 15.1 (OIM 2000, problème 1). Deux cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en M et N. Soit ℓ leur tangente commune, plus proche de M que de N, touchant Γ_1 en A et Γ_2 en B. La parallèle à ℓ passant par M recoupe Γ_1 en C et Γ_2 en D. Les droites (CA) et (DB) se coupent en E ; les droites (AN) et (CD) se coupent en P ; les droites (BN) et (CD) se coupent en Q. Montrer que $EP = EQ$.



OIM 2000, problème 1 : EP = EQ.

Solution du problème 15.1. *Étape 1 : $AC = AM$ et $BD = BM$.* La tangente ℓ en A à Γ_1 et la corde $[AC]$ forment un angle égal à l'angle inscrit $\widehat{AMC}$ dans le segment alterne. Comme $(CD) \parallel \ell$, les angles alternes-internes donnent $\widehat{ACM} = \angle(\ell, (AC)) = \widehat{AMC}$. Le triangle ACM est donc isocèle en A : $AC = AM$. Le même raisonnement en B donne $BD = BM$.

Étape 2 : $CD = 2AB$. Comme $AC = AM$, le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur (CD) est le milieu de $[CM]$; de même, celui de la perpendiculaire abaissée de B est le milieu de $[MD]$. Ces deux pieds sont distants de AB (car $\ell \parallel (CD)$), donc

$$AB = \frac{CM}{2} + \frac{MD}{2} = \frac{CD}{2}.$$

Étape 3 : A est le milieu de $[EC]$, et $\widehat{EMC} = 90°$. Les droites (AB) et (CD) étant parallèles, l'homothétie de centre E envoyant A sur C envoie B sur D ; son rapport est $\frac{CD}{AB} = 2$. Donc A est le milieu de $[EC]$ et B celui de $[ED]$. Dans le triangle EMC, la médiane $[MA]$ issue de M vérifie alors $MA = AC = AE = \frac{EC}{2}$: le triangle EMC est rectangle en M. Ainsi $(EM) \perp (CD)$.

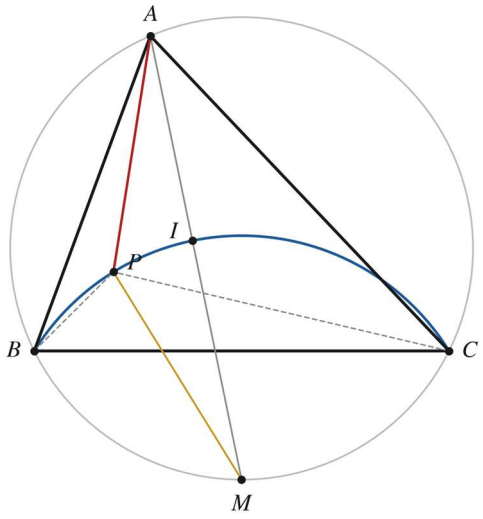
Étape 4 : M est le milieu de $[PQ]$. Soit $X = (MN) \cap \ell$. La puissance de X par rapport aux deux cercles donne $XA^2 = XM \cdot XN = XB^2$, donc $XA = XB$: X est le milieu de $[AB]$. L'homothétie de centre N

envoyant la droite ℓ sur la droite parallèle (CD) envoie A sur $(NA) \cap (CD) = P$, B sur Q, et X sur $(NX) \cap (CD) = M$. Comme une homothétie conserve les milieux, M est le milieu de $[PQ]$.

Conclusion. La droite (EM) est perpendiculaire à (PQ) et passe par son milieu : c'est la médiatrice de $[PQ]$. Donc $EP = EQ$.

15.2 OIM 2006, problème 1

Problème 15.2 (OIM 2006, problème 1). Soit ABC un triangle d'incentre I. Un point P intérieur au triangle vérifie $\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}$. Montrer que $AP \geq AI$, avec égalité si, et seulement si, $P = I$.



OIM 2006, problème 1 : P est sur l'arc BIC centré en M, d'où AP ≥ AI.

Solution du problème 15.2. *Étape 1 : traduction de l'hypothèse.* La somme des quatre angles vaut $\hat{B} + \hat{C}$. L'hypothèse impose donc $\widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \frac{B+C}{2}$, d'où

$$\widehat{BPC} = 180° - \frac{B+C}{2} = 90° + \frac{A}{2}.$$

Étape 2 : P est sur un cercle connu. Or $\widehat{BIC} = 90° + \frac{A}{2}$ (lemme du trident). Les points P et I étant tous deux du même côté de (BC) et voyant $[BC]$ sous le même angle, P appartient à l'arc $\widehat{BIC}$ du cercle $\odot(BIC)$. Par le lemme du trident, ce cercle a pour centre le milieu M de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A, et pour rayon $MI = MB = MC$.

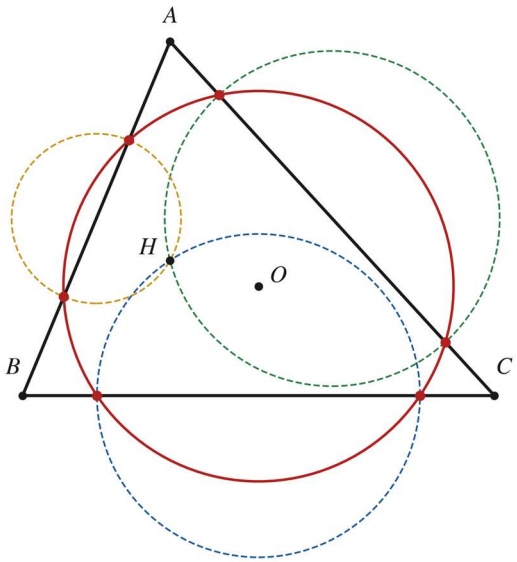
Étape 3 : inégalité triangulaire. Les points A, I, M sont alignés dans cet ordre sur la bissectrice issue de A, donc $AM = AI + IM$. Pour tout point P du cercle de centre M et de rayon MI,

$$AP \geq AM - MP = AM - MI = AI.$$

L'égalité dans l'inégalité triangulaire $AP + PM \geq AM$ a lieu si, et seulement si, $P \in [AM]$; le seul point de $[AM]$ situé sur ce cercle et à l'intérieur du triangle est I. Donc $AP = AI$ équivaut à $P = I$.

15.3 OIM 2008, problème 1

Problème 15.3 (OIM 2008, problème 1). Soit H l'orthocentre d'un triangle acutangle ABC. Le cercle Γ_A de centre le milieu de $[BC]$ et passant par H coupe la droite (BC) en A_1 et A_2. On définit de même B_1, B_2 et C_1, C_2. Montrer que les six points $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sont cocycliques.



OIM 2008, problème 1 : les six points sont sur un cercle centré en O.

Solution du problème 15.3. Plaçons l'origine au centre O du cercle circonscrit et notons $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ les vecteurs position de A, B, C, de sorte que $\| \vec{a} \| = \| \vec{b} \| = \| \vec{c} \| = R$ et $\vec{h} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (relation d'Euler, chapitre 7).

Soit M_A le milieu de $[BC]$, de vecteur position $\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} = \frac{\vec{h}-\vec{a}}{2}$. Le vecteur $\overrightarrow{M_AH}$ vaut $\vec{h} - \frac{\vec{h}-\vec{a}}{2} = \frac{\vec{h}+\vec{a}}{2}$.

Comme $(OM_A) \perp (BC)$ et que A_1, A_2 sont sur (BC) avec $M_AA_1 = M_AA_2 = M_AH$, le théorème de Pythagore donne, pour $i = 1,2$,

$$OA_i^2 = OM_A^2 + M_AA_i^2 = \left\| \frac{\vec{h} - \vec{a}}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{\vec{h} + \vec{a}}{2} \right\|^2 = \frac{\| \vec{h} - \vec{a} \|^2 + \| \vec{h} + \vec{a} \|^2}{4}.$$

L'identité du parallélogramme $\| \vec{u} - \vec{v} \|^2 + \| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = 2 \| \vec{u} \|^2 + 2 \| \vec{v} \|^2$ donne alors

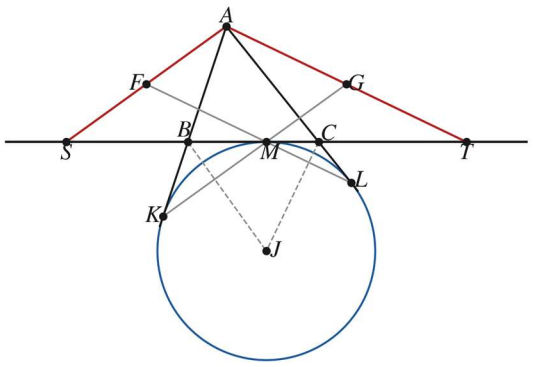
$$OA_i^2 = \frac{2 \| \vec{h} \|^2 + 2R^2}{4} = \frac{OH^2 + R^2}{2}.$$

Cette quantité est symétrique en A, B, C : le même calcul donne la même valeur pour OB_i^2 et OC_i^2. Les six points sont donc situés sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{\frac{OH^2+R^2}{2}}$.

> **Remarque.**
> Ce cercle porte le nom de cercle de Conway généralisé de la configuration ; la solution montre au passage que son centre est toujours le centre du cercle circonscrit.

15.4 OIM 2012, problème 1

Problème 15.4 (OIM 2012, problème 1). Soit ABC un triangle et J le centre du cercle exinscrit dans l'angle $\hat{A}$. Ce cercle est tangent au côté $[BC]$ en M, et aux droites (AB) et (AC) en K et L. Les droites (LM) et (BJ) se coupent en F ; les droites (KM) et (CJ) se coupent en G. Soit $S = (AF) \cap (BC)$ et $T = (AG) \cap (BC)$. Montrer que M est le milieu de $[ST]$.



OIM 2012, problème 1 : M est le milieu de [ST].

Solution du problème 15.4. Notons s le demi-périmètre. Les longueurs de tangence au cercle A-exinscrit sont $AK = AL = s$, $BK = BM = s - c$, $CL = CM = s - b$.

Étape 1 : identification de S. La droite (BJ) est la bissectrice extérieure de l'angle $\hat{B}$. La réflexion d'axe (BJ) envoie donc la demi-droite $[BA)$ sur la demi-droite opposée à $[BC)$; l'image A' de A est le point de la droite (BC), situé au-delà de B (du côté opposé à C), tel que $BA' = BA = c$. En particulier, le milieu de $[AA']$ appartient à (BJ).

Étape 2 : la droite (LM) coupe $[AA']$ en son milieu. Appliquons le théorème de Ménélaüs au triangle $AA'C$ et à la transversale (LM), qui coupe $(A'C) = (BC)$ en M, la droite (CA) en L et (AA') en un point F_0 :

$$\frac{\overline{A'M}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{CL}}{\overline{LA}} \cdot \frac{\overline{AF_0}}{\overline{F_0A'}} = -1.$$

Or $A'M = A'B + BM = c + (s - c) = s$ et $MC = s - b$, avec M strictement entre A' et C : le rapport $\frac{\overline{A'M}}{\overline{MC}}$ vaut donc $+\frac{s}{s-b}$.

Pour L, la relation $AL = AC + CL$ (avec $AL = s$, $AC = b$, $CL = s - b$) montre que C est strictement entre A et L : le point L, point de contact du cercle exinscrit, est extérieur au segment $[CA]$, au-delà de C. Le rapport $\frac{\overline{CL}}{\overline{LA}}$ est donc négatif : $\frac{\overline{CL}}{\overline{LA}} = -\frac{s-b}{s}$.

Le produit des deux premiers rapports vaut ainsi $\frac{s}{s-b} \cdot \left(-\frac{s-b}{s}\right) = -1$, d'où $\frac{\overline{AF_0}}{\overline{F_0A'}} = +1$, c'est-à-dire que F_0 est le milieu de $[AA']$ (le seul point de la droite (AA') équidistant de A et de A').

Étape 3 : conclusion pour S. Par l'étape 1, ce milieu appartient à (BJ) ; il appartient aussi à (LM) par construction, donc $F_0 = F$. La droite (AF) est ainsi la droite (AA'), qui coupe (BC) en A' : $S = A'$. Par conséquent $MS = MB + BS = (s - c) + c = s$.

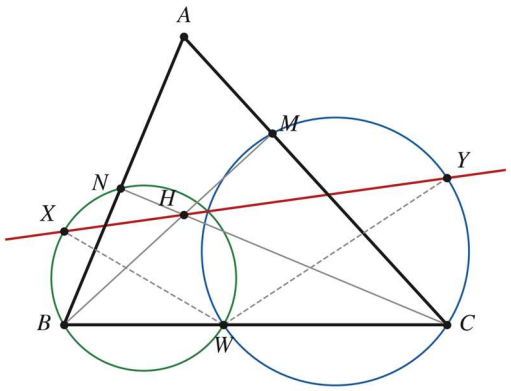
Étape 4 : symétrie. Le même raisonnement avec (KM), (CJ) et le triangle $AA''B$, où A'' est le point de (BC) au-delà de C tel que $CA'' = CA = b$, donne $T = A''$ et $MT = MC + CT = (s - b) + b = s$.

Les points S et T étant de part et d'autre de M sur la droite (BC) et vérifiant $MS = MT = s$, le point M est le milieu de $[ST]$.

15.5 OIM 2013, problème 4

Problème 15.5 (OIM 2013, problème 4). Soit ABC un triangle acutangle d'orthocentre H, et soit W un point du côté $[BC]$, strictement entre B et C. Soient M et N les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement. On note ω_1 le cercle circonscrit au triangle BWN et X le point de ω_1 tel que $[WX]$

soit un diamètre ; on note ω_2 le cercle circonscrit au triangle CWM et Y le point de ω_2 tel que $[WY]$ soit un diamètre. Montrer que X, Y, H sont alignés.



OIM 2013, problème 4 : X, H, Y sont alignés.

Solution du problème 15.5. La configuration comporte deux perpendicularités naturelles à une même droite (BC) : les coordonnées cartésiennes sont ici la méthode la plus courte.

Choix du repère. Prenons $B = (0,0)$, $C = (a,0)$ et $A = (p,q)$ avec $q > 0$, et posons $W = (w,0)$ avec $0 < w < a$. Notons $D = p^2 + q^2 = AB^2$ et $E = (a-p)^2 + q^2 = AC^2$.

Les points de base. La hauteur issue de A est la droite $x = p$; celle issue de B est perpendiculaire à $\overrightarrow{AC} = (a-p,-q)$ et passe par l'origine, donc a pour équation $(a-p)x - qy = 0$. Leur intersection donne $H = \left(p, \frac{p(a-p)}{q}\right)$.

Le point N est le projeté orthogonal de C sur (AB), droite vectorielle dirigée par (p,q) :

$$N = \frac{(a,0)\cdot(p,q)}{D}(p,q) = \left(\frac{ap^2}{D}, \frac{apq}{D}\right), \qquad \| N \|^2 = \frac{a^2p^2}{D}.$$

De même M, projeté orthogonal de B sur (AC), vaut

$$M = \left(\frac{aq^2}{E}, \frac{a(a-p)q}{E}\right), \qquad \| M \|^2 = \frac{a^2q^2}{E}.$$

Calcul de X. Comme $[WX]$ est un diamètre de ω_1 et que $B \in \omega_1$, l'angle $\widehat{WBX}$ est droit : $(BX) \perp (BC)$, donc $X = (0,t)$ pour un certain t. Le centre de ω_1 est le milieu $\left(\frac{w}{2}, \frac{t}{2}\right)$ de $[WX]$; il est équidistant de B et de N, ce qui s'écrit, avec $N = (n_1, n_2)$,

$$n_1^2 + n_2^2 - w\,n_1 - t\,n_2 = 0 \Longrightarrow t = \frac{n_1^2 + n_2^2 - w\,n_1}{n_2} = \frac{\frac{a^2p^2}{D} - w\frac{ap^2}{D}}{\frac{apq}{D}} = \frac{p(a-w)}{q}.$$

Donc $X = \left(0, \frac{p(a-w)}{q}\right)$.

Calcul de Y. De même $(CY) \perp (BC)$, donc $Y = (a,u)$, et le centre $\left(\frac{a+w}{2}, \frac{u}{2}\right)$ équidistant de C et de $M = (m_1, m_2)$ donne

$$m_1^2 + m_2^2 - (a+w)m_1 + aw - u\,m_2 = 0,$$

soit, après simplification du numérateur $\frac{a^2q^2}{E} - (a+w)\frac{aq^2}{E} + aw = \frac{aw(a-p)^2}{E}$:

$$u = \frac{aw(a-p)^2/E}{a(a-p)q/E} = \frac{w(a-p)}{q}, \qquad Y = \left(a, \frac{w(a-p)}{q}\right).$$

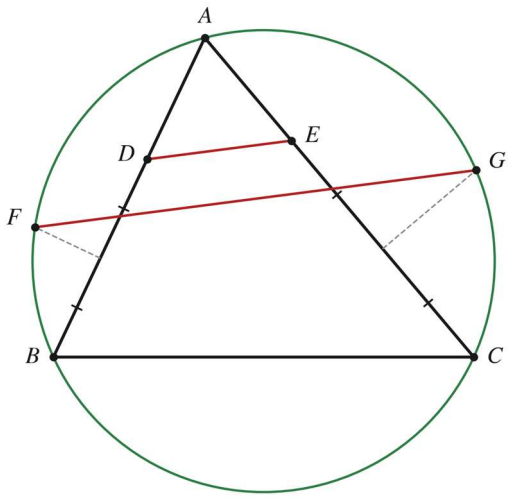
Alignement. On calcule enfin

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XH} &= \left(p, \frac{p(a-p)-p(a-w)}{q}\right) = p\left(1, \frac{w-p}{q}\right),\\ \overrightarrow{XY} &= \left(a, \frac{w(a-p)-p(a-w)}{q}\right) = a\left(1, \frac{w-p}{q}\right).\end{aligned}$$

Ces deux vecteurs sont colinéaires : X, H, Y sont alignés, et l'on obtient même $\overrightarrow{XH} = \frac{p}{a}\overrightarrow{XY}$, c'est-à-dire $\frac{XH}{XY} = \frac{BD_A}{BC}$ où $D_A = (p, 0)$ est le pied de la hauteur issue de A.

15.6 OIM 2018, problème 1

Problème 15.6 (OIM 2018, problème 1). Soit Γ le cercle circonscrit d'un triangle acutangle ABC. Les points D et E sont respectivement sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ et vérifient $AD = AE$. Les médiatrices de $[BD]$ et de $[CE]$ coupent les arcs mineurs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AC}$ de Γ en F et G respectivement. Montrer que les droites (DE) et (FG) sont parallèles ou confondues.



OIM 2018, problème 1 : (DE) et (FG) sont parallèles.

Solution du problème 15.6. Posons $\varphi = \widehat{FAB}$ et $\psi = \widehat{GAC}$, et notons A, B, C les angles du triangle et R le rayon de Γ.

Étape 1 : calcul de AD. Comme F est sur la médiatrice de $[BD]$, on a $FB = FD$. L'angle inscrit $\widehat{FAB} = \varphi$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{FB}$, donc $\operatorname{arc}\left(\overset{\frown}{FB}\right) = 2\varphi$; comme $\operatorname{arc}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = 2C$, il vient $\operatorname{arc}\left(\overset{\frown}{AF}\right) = 2C - 2\varphi$ et par suite

$$\widehat{FBA} = C - \varphi, \qquad AF = 2R\sin(C - \varphi).$$

Le triangle FBD étant isocèle en F, $\widehat{FDB} = \widehat{FBD} = C - \varphi$, donc $\widehat{ADF} = 180° - (C - \varphi)$ et, dans le triangle ADF,

$$\widehat{AFD} = 180° - \varphi - \big(180° - (C - \varphi)\big) = C - 2\varphi.$$

La loi des sinus dans le triangle ADF donne alors

$$AD = AF \cdot \frac{\sin\widehat{AFD}}{\sin\widehat{ADF}} = 2R\sin(C-\varphi) \cdot \frac{\sin(C-2\varphi)}{\sin(C-\varphi)} = 2R\sin(C-2\varphi).$$

Étape 2 : la relation clé. Symétriquement, $AE = 2R\sin(B-2\psi)$. L'hypothèse $AD = AE$ donne $\sin(C-2\varphi) = \sin(B-2\psi)$; les deux angles appartenant à $]-90°, 90°[$, on en déduit $C-2\varphi = B-2\psi$.

Étape 3 : $(DE) \perp (AM)$. Soit M le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A : la droite (AM) est la bissectrice intérieure issue de A. Comme $AD = AE$, le triangle ADE est isocèle en A et (DE) est perpendiculaire à cette bissectrice.

Étape 4 : $(FG) \perp (AM)$. L'angle entre deux cordes sécantes est la demi-somme des deux arcs qu'elles interceptent. Pour les cordes $[AM]$ et $[FG]$, ces arcs sont $\widehat{AF}$ et $\widehat{MG}$, avec

$$\operatorname{arc}\left(\widehat{AF}\right) = 2(C-\varphi), \qquad \operatorname{arc}\left(\widehat{MG}\right) = \operatorname{arc}\left(\widehat{MC}\right) + \operatorname{arc}\left(\widehat{CG}\right) = A + 2\psi.$$

La perpendicularité équivaut donc à $\operatorname{arc}\left(\widehat{AF}\right) + \operatorname{arc}\left(\widehat{MG}\right) = 180°$, c'est-à-dire

$$2(C-\varphi) + A + 2\psi = A + B + C \Leftrightarrow C - 2\varphi = B - 2\psi,$$

ce qui est exactement la relation de l'étape 2.

Conclusion. Les droites (DE) et (FG) sont toutes deux perpendiculaires à (AM) : elles sont parallèles ou confondues.

15.7 OIM 2020, problème 1

Problème 15.7 (OIM 2020, problème 1). Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et P un point intérieur tels que

$$\widehat{PAD} : \widehat{PBA} : \widehat{DPA} = 1:2:3 = \widehat{CBP} : \widehat{BAP} : \widehat{BPC}.$$

Montrer que les bissectrices intérieures des angles $\widehat{ADP}$ et $\widehat{PCB}$ et la médiatrice de $[AB]$ sont concourantes.

Solution du problème 15.7. Posons $\widehat{PAD} = \alpha$, $\widehat{PBA} = 2\alpha$, $\widehat{DPA} = 3\alpha$, et $\widehat{CBP} = \beta$, $\widehat{BAP} = 2\beta$, $\widehat{BPC} = 3\beta$.

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle APB. Nous allons montrer que les trois droites passent toutes par O.

Étape 1 : O *est sur la médiatrice de* $[AB]$. C'est immédiat : $OA = OB$.

Étape 2 : A, D, P, O *sont cocycliques.* Dans le triangle ADP, $\widehat{ADP} = 180° - \widehat{PAD} - \widehat{DPA} = 180° - 4\alpha$. Par ailleurs, l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{ABP} = 2\alpha$ vaut $\widehat{AOP} = 2\widehat{ABP} = 4\alpha$. Ainsi $\widehat{ADP} + \widehat{AOP} = 180°$; comme D et O sont de part et d'autre de la droite (AP) (le quadrilatère étant convexe et P intérieur), les quatre points A, D, P, O sont cocycliques.

Étape 3 : (DO) *bissecte l'angle* $\widehat{ADP}$. Dans ce cercle $\odot(ADPO)$, les cordes $[OA]$ et $[OP]$ sont égales, puisque $OA = OP$ (rayons du cercle circonscrit à APB). Le point O est donc le milieu de l'arc $\widehat{AP}$ ne contenant pas D, et les angles inscrits $\widehat{ADO}$ et $\widehat{ODP}$, qui interceptent les arcs égaux $\widehat{AO}$ et $\widehat{OP}$, sont égaux : la droite (DO) est la bissectrice intérieure de $\widehat{ADP}$.

Étape 4 : symétrie. Le même raisonnement, en échangeant les rôles de A et B, montre que B, C, P, O sont cocycliques et que (CO) est la bissectrice intérieure de $\widehat{PCB}$: $\widehat{PCB} = 180° - 4\beta$, $\widehat{BOP} = 2\widehat{BAP} = 4\beta$.

Conclusion. Les trois droites passent par O : elles sont concourantes.

15.8 Problèmes proposés

Pour s'entraîner : de la liste courte à l'OIM. Les problèmes suivants sont classés par difficulté croissante. Un indice est donné entre parenthèses ; ne le lisez qu'après une heure de recherche.

Problème 15.A (OIM 1999, problème 5). Deux cercles Γ_1 et Γ_2 sont intérieurs à un cercle Γ et lui sont tangents en M et N ; Γ_1 passe par le centre de Γ_2. La corde commune à Γ_1 et Γ_2 recoupe Γ en A et B. Montrer que (MA) et (MB) coupent Γ_1 en deux points dont la droite est tangente à Γ_2. *(Homothéties de tangence.)*

Problème 15.B (OIM 2004, problème 1). Dans un triangle acutangle ABC avec $AB \neq AC$, le cercle de diamètre $[BC]$ coupe $[AB]$ et $[AC]$ en M et N. Soit O le milieu de $[BC]$. Les bissectrices de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MON}$ se coupent en R. Montrer que les cercles circonscrits à BMR et CNR ont un point commun sur $[BC]$. *(Angles orientés et puissance.)*

Problème 15.C (OIM 2007, problème 2). On considère cinq points A, B, C, D, E tels que $ABCD$ soit un parallélogramme et $BCED$ un quadrilatère cyclique. Soit ℓ une droite passant par A coupant $[DC]$ en F et (BC) en G. On suppose $EF = EG = EC$. Montrer que ℓ est la bissectrice de $\widehat{DAB}$. *(Chercher un cercle centré en E.)*

Problème 15.D (OIM 2010, problème 2). Soit ABC un triangle d'incentre I inscrit dans Γ ; (AI) recoupe Γ en D. Soit E un point de l'arc $\widehat{BDC}$ et F un point de $[BC]$ tels que $\widehat{BAF} = \widehat{CAE} < \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Soit G le milieu de $[IF]$. Montrer que (DG) et (EI) se coupent sur Γ. *(Isogonales et lemme du trident.)*

Problème 15.E (OIM 2014, problème 4). Soit ABC un triangle acutangle, et soient P et Q sur $[BC]$ tels que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Soient M et N tels que P soit le milieu de $[AM]$ et Q celui de $[AN]$. Montrer que (BM) et (CN) se coupent sur le cercle circonscrit. *(Montrer d'abord $AP = AQ = \frac{bc}{a}$.)*

Problème 15.F (OIM 2015, problème 3). Soit ABC un triangle acutangle avec $AB > AC$, de cercle circonscrit Γ, d'orthocentre H ; soit F le pied de la hauteur issue de A et M le milieu de $[BC]$. Soit Q le point de Γ tel que $\widehat{HQA} = 90°$ et K le point de Γ tel que $\widehat{HKQ} = 90°$. Montrer que les cercles circonscrits à KQH et à FKM sont tangents. *(Tout part du cercle de diamètre $[AH]$ et de l'axe radical.)*

Problème 15.G (OIM 2016, problème 1). Un triangle BCF est rectangle en B. Sur la droite (CF), soit A tel que $FA = FB$ et F entre A et C. On choisit D tel que $DA = DC$ et (AC) bissectrice de $\widehat{DAB}$, puis E tel que $EA = ED$ et (AD) bissectrice de $\widehat{EAC}$. Soit M le milieu de $[CF]$ et X tel que $AMXE$ soit un parallélogramme. Montrer que (BD), (FX), (ME) sont concourantes. *(Beaucoup de triangles isocèles : chasse aux angles patiente.)*

Problème 15.H (OIM 2019, problème 2). Dans un triangle ABC, un point A_1 est sur $[BC]$ et B_1 sur $[AC]$. Soient P et Q sur $[AA_1]$ et $[BB_1]$ tels que $(PQ) \parallel (AB)$. Soit P_1 sur (PB_1) tel que B_1 soit strictement entre P et P_1 et $\widehat{PP_1C} = \widehat{BAC}$; soit Q_1 sur (QA_1) tel que A_1 soit strictement entre Q et Q_1 et $\widehat{CQ_1Q} = \widehat{CBA}$. Montrer que P, Q, P_1, Q_1 sont cocycliques. *(Introduire les seconds points d'intersection avec le cercle circonscrit.)*

Problème 15.I (liste courte). Soit ABC un triangle d'incentre I. Le cercle inscrit touche $[BC]$ en X. Montrer que le cercle $\odot(AIX)$ est tangent au cercle A-mixtilinéaire inscrit. *(Inversion $\sqrt{bc}$.)*

Problème 15.J (liste courte). Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique dont les diagonales se coupent en P. Montrer que les projections de P sur les quatre côtés sont les sommets d'un quadrilatère circonscriptible. *(Chasse aux angles et bissectrices.)*

PARTIE V — Annexes

ANNEXE A

A Formulaire complet

A.1 Notations

Notation	Signification	Notation	Signification
a, b, c	côtés BC, CA, AB	s	demi-périmètre $\frac{a+b+c}{2}$
A, B, C	angles du triangle	S	aire
R	rayon du cercle circonscrit	r	rayon du cercle inscrit
r_A, r_B, r_C	rayons des cercles exinscrits	O, I, G, H	centre du cercle circonscrit, centre du cercle inscrit, centre de gravité, orthocentre
N	centre du cercle d'Euler	K	point de Lemoine (point symédian)
I_A	A-exincentre	M_A	milieu de $[BC]$
$\mathrm{pow}(P, \mathcal{C})$	puissance de P par rapport à $\mathcal{C}$	$\measuredangle(d, d')$	angle orienté de droites

A.2 Relations métriques dans le triangle

À retenir

- Loi des sinus : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.
- Loi des cosinus : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.
- Aire : $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{abc}{4R} = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.
- Rayons : $r = (s-a)\tan\frac{A}{2} = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, $r_A = \frac{S}{s-a} = s\tan\frac{A}{2}$.
- Médiane : $m_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$.
- Bissectrice : $t_a^2 = bc\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right] = bc - BD \cdot DC$.
- Hauteur : $h_a = \frac{2S}{a} = b\sin C = c\sin B$.
- Euler : $OI^2 = R^2 - 2Rr$, $OI_A^2 = R^2 + 2Rr_A$; $OH^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C) = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.
- Distances à I : $AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{s-a}{\cos\frac{A}{2}}$, $AI \cdot AI_A = bc$.
- Distances à H et à O : $AH = 2R\cos A$, $OM_A = R\cos A$.
- Points de contact : $AY = AZ = s - a$, $BX = s - b$, $CX = s - c$, $BX_A = s - c$.

A.3 Identités trigonométriques utiles

Dans tout triangle ($A + B + C = 180°$) :

À retenir

- $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{s}{R}$.
- $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$.
- $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ (triangle non rectangle).
- $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C$.
- $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}$, $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$.
- Ceva trigonométrique : $\frac{\sin\widehat{BAP}}{\sin\widehat{PAC}} \cdot \frac{\sin\widehat{ACP}}{\sin\widehat{PCB}} \cdot \frac{\sin\widehat{CBP}}{\sin\widehat{PBA}} = 1$.

A.4 Nombres complexes : le cercle unité

On suppose $|a| = |b| = |c| = 1$ (cercle circonscrit = cercle unité).

Objet	Formule
Corde (ab) : z appartient à (ab)	$z + ab\bar{z} = a + b$
Tangente en a	$z + a^2\bar{z} = 2a$
Intersection des tangentes en a, b	$\frac{2ab}{a+b}$
Intersection des cordes (ab), (cd)	$\frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}$
Projeté orthogonal de z sur (ab)	$\frac{1}{2}(z + a + b - ab\bar{z})$
Symétrique de z par rapport à (ab)	$a + b - ab\bar{z}$
Orthocentre de abc	$h = a + b + c$
Centre du cercle d'Euler	$\frac{a+b+c}{2}$
Milieu d'arc / centre du cercle inscrit	$a = u^2$, $b = v^2$, $c = w^2 \Rightarrow i = -(uv + vw + wu)$
Alignement de z_1, z_2, z_3	$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \in \mathbb{R}$
$(z_1z_2) \perp (z_3z_4)$	$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R}$
Cocyclicité de z_1, z_2, z_3, z_4	birapport réel

A.5 Coordonnées barycentriques

Triangle de référence ABC, notations de Conway : $S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$, S_B, S_C.

Point	Coordonnées	Point	Coordonnées
A	$(1:0:0)$	G	$(1:1:1)$
I	$(a:b:c)$	I_A	$(-a:b:c)$
O	$(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$	H	$(S_BS_C : S_CS_A : S_AS_B)$
K (Lemoine)	$(a^2 : b^2 : c^2)$	N	$(a^2S_A + 2S_BS_C : b^2S_B + 2S_CS_A : c^2S_C + 2S_AS_B)$

Point	Coordonnées	Point	Coordonnées
Gergonne	$\left(\frac{1}{s-a}:\frac{1}{s-b}:\frac{1}{s-c}\right)$	Nagel	$(s-a:s-b:s-c)$

À retenir

- Droite passant par P et Q : $\det\begin{pmatrix} x & y & z \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = 0$.
- Cercle circonscrit : $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$.
- Conjugué isogonal de $(x:y:z)$: $\left(\frac{a^2}{x}:\frac{b^2}{y}:\frac{c^2}{z}\right)$; conjugué isotomique : $\left(\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}\right)$.
- Distance (coordonnées normalisées, $\Delta x + \Delta y + \Delta z = 0$) : $PQ^2 = -a^2\Delta y\Delta z - b^2\Delta z\Delta x - c^2\Delta x\Delta y$.

A.6 Les théorèmes à connaître par cœur

Théorème	Contenu
Thalès / angle inscrit	base de toute chasse aux angles
Puissance d'un point	$\mathrm{pow}(P,\mathcal{C}) = \overline{PA}\cdot\overline{PB} = PO^2 - R^2$
Axe radical, centre radical	lieu des points de puissances égales
Ptolémée	$AC\cdot BD \leq AB\cdot CD + BC\cdot AD$, égalité si, et seulement si, $ABCD$ est cyclique (convexe)
Ceva / Ménélaüs	concourance / alignement, versions trigonométriques
Droite d'Euler, cercle des neuf points	O, G, N, H alignés, $ON = NH$
Simson	alignement des projetés orthogonaux d'un point de Γ sur les côtés
Similitude spirale	deux cercles sécants, échange de segments
Miquel	point commun aux quatre cercles d'un quadrilatère complet
Inversion	images des droites et cercles, inversion $\sqrt{bc}$
Pôle et polaire, La Hire	dualité par rapport à un cercle
Desargues, Pascal, Brianchon	perspectives et coniques
Feuerbach	le cercle d'Euler est tangent aux quatre cercles tritangents

A.7 Bibliographie

- M. Aassila, *Objectif Olympiades de Mathématiques* — Tome 6 : Géométrie 1 et Tome 7 : Géométrie 2, 2022. Deux volumes de référence en langue française, très complets sur les transformations, les coordonnées barycentriques et l'inversion.
- E. Chen, *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, MAA, 2016. La référence anglophone pour l'entraînement à l'OIM ; excellent sur les configurations et les techniques calculatoires.
- *Polos Olímpicos de Treinamento* (POT), cours de géométrie, niveaux 2 et 3. Séries de cours progressifs avec exercices corrigés.

- Les listes courtes (*Shortlists*) de l'OIM, publiées chaque année : la source d'entraînement la plus fidèle au niveau réel de l'épreuve.
- H. S. M. Coxeter et S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, 1967. Un classique bref et lumineux.

NB : Ce livre est à but éducatif uniquement. Il a été réalisé avec recours à l'IA.

À propos de l'auteur

Ali AKIR

Ali AKIR est formateur bénévole depuis 2017 au sein de l'Association Tunisienne de Compétitions et de Culture Mathématique (ATCCM), où il prépare des élèves tunisiens aux olympiades internationales de mathématiques (IMO, PAMO, AMO, OFM…). Il a occupé le rôle de coordinateur régional du Pan-African Mathematical Olympiad (PAMO) pour l'Afrique, ainsi que celui de coordinateur de l'Olympiade Francophone de Mathématiques (OFM). Il forme également des formateurs dans le cadre de programmes régionaux de préparation olympique.

La collection ATOMATH rassemble l'ensemble de son enseignement olympique, organisé en quatre tomes : Algèbre, Géométrie, Arithmétique et Combinatoire.

ATOMATH

Tome II : Géométrie

La collection ATOMATH propose un parcours complet de préparation aux Olympiades internationales de mathématiques. Ce deuxième tome est entièrement consacré à la géométrie olympique, de la chasse aux angles jusqu'à la géométrie projective.

La géométrie occupe une place de choix dans les compétitions internationales : deux des six problèmes de l'IMO sont, presque chaque année, des problèmes de géométrie. Contrairement à la combinatoire, où l'idée décisive peut venir de nulle part, la géométrie olympique repose sur un corpus fini de configurations : une centaine de lemmes et une dizaine de techniques suffisent, à condition de les reconnaître instantanément sur une figure.

Conçu pour accompagner l'élève depuis le niveau junior jusqu'au niveau senior exigé par l'IMO, cet ouvrage ne suppose aucun prérequis au-delà du programme du lycée. Chaque notion est rigoureusement introduite, démontrée, puis mise à l'épreuve sur des exemples résolus commentés et une large banque d'exercices corrigés en détail.

Au programme :

- **Fondamentaux :** notations, longueurs algébriques, angles orientés de droites et chasse aux angles.
- **Les classiques :** quadrilatères cycliques, puissance d'un point, axe radical, théorèmes de Ceva et Ménélaüs, droite d'Euler, cercle des neuf points.
- **Techniques pointues :** transformations, méthodes calculatoires (trigonométrie, complexes, barycentriques), inversion, cercle d'Apollonius.
- **Géométrie projective :** birapport, pôle et polaire, théorèmes de Desargues, Pascal et Brianchon.
- **Objectif IMO :** bestiaire des lemmes de configuration (trident, point de Miquel) et problèmes d'IMO entièrement corrigés.

Ali AKIR

Formateur olympique