COLLECTION ATOMATH

Préparation progressive aux Olympiades internationales de mathématiques

TOME I

ALGÈBRE

Du calcul algébrique aux équations fonctionnelles

ÉDITION DÉTAILLÉE · TOUS LES THÉORÈMES DÉMONTRÉS

Ali AKIR

FORMATEUR OLYMPIQUE

Première édition

COLLECTION ATOMATH

ATOMATH

Préparation progressive aux Olympiades internationales de mathématiques

TOME I

Algèbre

Cours complet, exemples résolus et problèmes corrigés

Du niveau junior au niveau IMO

Ali AKIR

Formateur olympique

Première édition

ATOMATH — Tome I : Algèbre

Collection ATOMATH, préparation aux Olympiades internationales de mathématiques.

Tous droits réservés. Toute reproduction, même partielle, par quelque procédé que ce soit, est interdite sans autorisation préalable, à l'exception des courtes citations dans le cadre d'un usage pédagogique, conformément aux dispositions légales en vigueur.

Table des matières

Introduction **1**

Mode d'emploi de ce tome **2**

À qui s'adresse ce tome 2
Le programme couvert 2
Structure d'un chapitre 2
Code de difficulté 3
Comment travailler 3
Notations utilisées 3
Abréviations des sources 4

PARTIE I — Socle algébrique **5**

1 Identités, factorisation et manipulations **6**

1.1 Les identités fondamentales 6
1.2 Fonctions symétriques élémentaires 9
1.3 Compléter le carré et le discriminant 11
1.4 Les astuces de calcul incontournables 12
1.5 Exercices 13
1.6 Solutions 14

2 Sommes, produits et télescopage **18**

2.1 Notations et règles de calcul 18
2.2 Sommes de référence 18
2.3 Télescopage additif 19
2.4 Télescopage multiplicatif 20
2.5 La transformation d'Abel 21
2.6 Coefficients binomiaux 22
2.7 Exercices 24
2.8 Solutions 24

3 Équations, systèmes et second degré **26**

3.1 Le trinôme du second degré 26
3.2 Équations avec radicaux 27
3.3 Partie entière 28
3.4 Systèmes cycliques : l'argument du maximum 29
3.5 Exercices 30
3.6 Solutions 30

4 Récurrence et suites **32**

4.1 Les formes de récurrence 32
4.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 33
4.3 Suites non linéaires : les quatre questions 34
4.4 Exercices 36
4.5 Solutions 36

PARTIE II — Polynômes et nombres complexes 39

5 Polynômes : les fondations 40
5.1 Vocabulaire et division euclidienne 40
5.2 Le théorème fondamental de l'algèbre 42
5.3 Équations fonctionnelles polynomiales 43
5.4 Exercices 44
5.5 Solutions 44

6 Relations de Viète et identités de Newton 47
6.1 Les formules de Viète 47
6.2 Les identités de Newton 48
6.3 Exercices 49
6.4 Solutions 50

7 Interpolation et différences finies 52
7.1 Interpolation de Lagrange 52
7.2 Différences finies 53
7.3 Polynômes de Tchebychev 54
7.4 Exercices 55
7.5 Solutions 56

8 Polynômes à coefficients entiers 58
8.1 Les deux lemmes fondamentaux 58
8.2 Contenu, lemme de Gauss, irréductibilité 59
8.3 Exercices 61
8.4 Solutions 61

9 Nombres complexes et racines de l'unité 63
9.1 Rappels et forme exponentielle 63
9.2 Racines de l'unité 64
9.3 Inégalité triangulaire complexe 66
9.4 Exercices 67
9.5 Solutions 67

PARTIE III — Inégalités 69

10 Principes de base 70
10.1 Manipuler une inégalité 70
10.2 L'inégalité triviale et ses conséquences 71
10.3 Le second degré comme outil 72
10.4 Où chercher le cas d'égalité 72
10.5 Homogénéité et normalisation 73
10.6 Exercices 74
10.7 Solutions 74

11 Les inégalités de moyennes 76
11.1 Les quatre moyennes 76
11.2 L'inégalité arithmético-géométrique pondérée 78
11.3 Les moyennes de puissances 80

11.4 Mettre en œuvre l'IA-G 81
11.5 Exercices 82
11.6 Solutions 83

12 Cauchy–Schwarz, Hölder, Minkowski 85
12.1 L'inégalité de Cauchy–Schwarz 85
12.2 L'inégalité de Hölder 87
12.3 L'inégalité de Minkowski 89
12.4 Exercices 90
12.5 Solutions 91

13 Inégalités liées à l'ordre 93
13.1 L'inégalité de réarrangement 93
13.2 L'inégalité de Tchebychev 95
13.3 Exercices 96
13.4 Solutions 97

14 Convexité et inégalité de Jensen 98
14.1 Fonctions convexes 98
14.2 La méthode de la tangente 101
14.3 Majoration et inégalité de Karamata 101
14.4 Exercices 103
14.5 Solutions 103

15 Techniques avancées 105
15.1 L'inégalité de Schur 105
15.2 L'inégalité de Muirhead 106
15.3 La méthode SOS 107
15.4 Substitutions classiques 108
15.5 La méthode pqr (ou uvw) 110
15.6 Exercices 111
15.7 Solutions 112

PARTIE IV — Équations fonctionnelles 115

16 Premiers pas : la méthode des substitutions 116
16.1 De quoi parle-t-on ? 116
16.2 Substituer, encore substituer 116
16.3 Deviner avant de chercher 119
16.4 Exercices 120
16.5 Solutions 120

17 Injectivité, surjectivité, monotonie 122
17.1 Les trois propriétés reines 122
17.2 Monotonie et densité 123
17.3 Exercices 124
17.4 Solutions 125

18 L'équation de Cauchy et ses variantes 127
18.1 Sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ 127

18.2 Sur $\mathbb{R}$: le rôle des hypothèses de régularité 127
18.3 Les équations sœurs 128
18.4 Exercices 130
18.5 Solutions 130

19 Équations fonctionnelles de niveau IMO 132
19.1 Le grand classique : IMO 1992 132
19.2 Utiliser une hypothèse asymptotique : IMO 1983 133
19.3 Exploiter une contrainte cachée : IMO 2008 133
19.4 Fonctions sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$: descente et extrémalité 134
19.5 Exercices 136
19.6 Solutions 136

PARTIE V — Vers l'IMO 138

20 Méthodologie et stratégie de compétition 139
20.1 Ce que l'on attend d'une copie 139
20.2 Comment attaquer un problème d'algèbre 139
20.3 Rédiger 140
20.4 Gérer les 4 h 30 140

21 Dix problèmes d'IMO entièrement corrigés 142
21.1 Problème 1 — IMO 1995, problème 2 142
21.2 Problème 2 — IMO 2001, problème 2 142
21.3 Problème 3 — IMO 2000, problème 2 143
21.4 Problème 4 — IMO 1984, problème 1 144
21.5 Problème 5 — IMO 2006, problème 3 144
21.6 Problème 6 — IMO 2004, problème 4 145
21.7 Problème 7 — IMO 2014, problème 1 146
21.8 Problème 8 — IMO 1993, problème 1 147
21.9 Problème 9 — IMO 1975, problème 1 148
21.10 Problème 10 — IMO 2012, problème 2 148

22 Quatre sujets d'entraînement 150
22.1 Sujet A — niveau junior 150
22.2 Sujet B — niveau intermédiaire 150
22.3 Sujet C — niveau senior 150
22.4 Sujet D — niveau IMO 150
22.5 Solutions du sujet A 151
22.6 Solutions du sujet B 151
22.7 Solutions du sujet C 151
22.8 Solutions du sujet D 152

PARTIE VI — Annexes 154

A Formulaire complet 155
A.1 Identités algébriques 155
A.2 Sommes de référence 155
A.3 Polynômes 155

A.4 Nombres complexes 156
A.5 Inégalités 156
A.6 Équations fonctionnelles 157
A.7 Suites 157
B Plan d'entraînement en 24 semaines 158
B.1 Principes 158
B.2 Le calendrier 158
B.3 Après ces 24 semaines 159
C Bibliographie et ressources 160
C.1 Ouvrages de référence 160
C.2 Ressources en ligne 160
C.3 Comment utiliser ces ressources 160
À propos de l'auteur 161

Introduction

La collection ATOMATH propose un parcours complet de préparation aux Olympiades internationales de mathématiques, organisé en quatre tomes indépendants mais complémentaires : Algèbre, Géométrie, Arithmétique et Combinatoire. Chaque tome couvre, de façon autonome, l'un des quatre grands domaines abordés lors des compétitions internationales, depuis les premiers automatismes jusqu'aux techniques mobilisées dans les problèmes les plus exigeants de l'épreuve.

Ce premier tome est consacré à l'**algèbre olympique** : identités et manipulations symboliques, suites récurrentes, polynômes et nombres complexes, inégalités, puis équations fonctionnelles. Il n'exige aucun prérequis au-delà du calcul algébrique enseigné au collège ; chaque notion nouvelle, y compris celles qui dépassent le programme scolaire habituel, est introduite et démontrée avant d'être utilisée.

L'ouvrage suit un principe simple : rien n'est admis sans démonstration, et chaque outil théorique est immédiatement mis à l'épreuve sur des exemples résolus, puis sur des exercices gradués en trois niveaux de difficulté, dont les solutions complètes sont rédigées comme elles devraient l'être en compétition. Un lecteur qui parcourt le tome dans l'ordre, en cherchant réellement chaque exercice avant de consulter sa solution, dispose à la fin d'une boîte à outils suffisante pour aborder la majorité des problèmes d'algèbre proposés à l'Olympiade internationale de mathématiques et aux compétitions qui y préparent.

Bon travail, et bonne route vers l'IMO.

Mode d'emploi de ce tome

À qui s'adresse ce tome

Ce tome est un cours complet d'algèbre olympique. Il est conçu pour accompagner un élève depuis le niveau junior (fin de collège, début de lycée, premières compétitions nationales) jusqu'au niveau senior : celui exigé par l'Olympiade internationale de mathématiques (IMO) et par les olympiades régionales de haut niveau (balkanique, Asie-Pacifique, panafricaine, méditerranéenne). Aucun prérequis n'est supposé au-delà du calcul algébrique élémentaire. Chaque notion nouvelle est définie avant d'être utilisée, y compris celles qui dépassent le programme scolaire (nombres complexes, convexité, sommation d'Abel, différences finies).

Le programme couvert

L'algèbre olympique se décompose en quatre grands blocs, qui structurent ce tome et qui correspondent au découpage utilisé par les grands programmes d'entraînement internationaux :

Bloc	Contenu	Partie
Socle algébrique	identités, factorisation, sommes et produits, équations, récurrence, suites	I
Polynômes et complexes	division, racines, Viète, interpolation, irréductibilité, racines de l'unité	II
Inégalités	moyennes, Cauchy–Schwarz, réarrangement, convexité, Muirhead, Schur, SOS, uvw	III
Équations fonctionnelles	substitutions, injectivité, équation de Cauchy, équations sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$	IV

Statistiquement, sur les six problèmes d'une IMO, un ou deux relèvent de l'algèbre. La répartition observée sur les vingt dernières années est approximativement la suivante : équations fonctionnelles 40 %, inégalités 25 %, suites et polynômes 25 %, problèmes algébriques inclassables 10 %. Les quatre blocs sont donc tous indispensables : il n'existe pas de raccourci consistant à ne travailler que les inégalités.

Structure d'un chapitre

Chaque chapitre suit le même schéma, pensé pour un travail autonome :

1. Le **cours**, avec définitions, théorèmes démontrés et méthodes encadrées. Les démonstrations ne sont pas décoratives : les techniques qu'elles contiennent sont réutilisées dans les problèmes.
2. Des **exemples résolus**, choisis pour illustrer immédiatement chaque outil, souvent tirés de compétitions réelles.
3. Une série d'**exercices** gradués en trois niveaux.
4. Les **solutions** complètes de tous les exercices, rédigées comme elles devraient l'être en compétition.

Code de difficulté

- ★ **Junior** : application directe du cours. Doit être traité en moins de 10 minutes.
- ★★ **Intermédiaire** : niveau olympiade nationale. Une idée à trouver, puis une technique standard.
- ★★★ **Senior** : niveau IMO / liste courte (*shortlist*). Plusieurs idées à combiner ; 30 à 60 minutes de recherche sont normales.

Comment travailler

À retenir

1. Lire le cours avec un crayon et refaire chaque démonstration sur une feuille blanche, cours fermé.
2. Chercher chaque exercice au moins 20 minutes avant de regarder la solution. La difficulté ressentie est le signal que l'apprentissage a lieu.
3. Après avoir lu une solution, la réécrire seul le lendemain. C'est cette réécriture, et non la lecture, qui installe la technique.
4. Tenir un carnet de techniques : une page par astuce (« homogénéiser », « poser $x = \tan\theta$ », « substituer $y \to f(y)$ »), avec un exemple minimal.
5. Une fois une partie terminée, passer le sujet d'entraînement correspondant, en temps limité, sans aucune aide.

Piège.
Un piège classique de l'entraînement autonome consiste à lire beaucoup de solutions et à en tirer l'impression de progresser. Cette impression est fausse : on ne progresse qu'en produisant soi-même une rédaction complète. Un exercice « compris » mais non rédigé n'est pas acquis.

Notations utilisées

Notation	Signification	Notation	Signification
$\mathbb{N}$	entiers naturels $0,1,2,\ldots$	$\lfloor x \rfloor$	partie entière de x
$\mathbb{N}^*$	entiers ≥ 1	$\{x\}$	partie fractionnaire de x
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	ensembles usuels	$\lceil x \rceil$	partie entière supérieure de x
$\mathbb{R}_{>0}$	réels strictement positifs	$a \mid b$	a divise b
$\sum_{\text{cyc}}$	somme cyclique	pgcd, ppcm	plus grand commun diviseur, plus petit commun multiple
$\sum_{\text{sym}}$	somme symétrique	$\deg P$	degré du polynôme P
$[\![1, n]\!]$	$\{1,2,\ldots,n\}$	$f^{\circ n}$	f composée n fois avec elle-même

Pour trois variables, les sommes cycliques et symétriques signifient

$$\sum_{\text{cyc}} f\,(a,b,c) = f(a,b,c) + f(b,c,a) + f(c,a,b), \qquad \sum_{\text{sym}} f\,(a,b,c) = \sum_{\sigma \in S_3} f\left(\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)\right).$$

Ainsi $\sum_{\text{cyc}} a^2\, b = a^2b + b^2c + c^2a$, tandis que $\sum_{\text{sym}} a^2\, b = a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$.

Abréviations des sources

IMO : Olympiade internationale de mathématiques. ISL : *IMO Shortlist* (liste courte de l'IMO). APMO : *Asian Pacific Mathematics Olympiad*. BMO : Olympiade balkanique de mathématiques. JBMO : Olympiade balkanique junior de mathématiques. USAMO : *USA Mathematical Olympiad*. Putnam : concours William Lowell Putnam. L'indication *(classique)* signale un résultat du folklore olympique, sans source unique identifiable.

Bon travail, et bonne route vers l'IMO.

PARTIE I — Socle algébrique

CHAPITRE 1

1 Identités, factorisation et manipulations

Presque tout problème d'algèbre commence par une phase de **transformation** : on réécrit l'énoncé sous une forme où un outil connu devient applicable. Cette phase repose sur un petit nombre d'identités qu'il faut connaître par cœur, savoir **démontrer** et surtout savoir **reconnaître**, même déguisées. Ce chapitre constitue la boîte à outils de base ; tous les chapitres suivants s'appuient sur lui.

Dans tout le chapitre, les lettres $a, b, c, x, y, \ldots$ désignent des nombres réels ou complexes (toutes les identités sont vraies dans tout anneau commutatif, en particulier pour des polynômes).

1.1 Les identités fondamentales

Théorème 1.1.1 (Identités remarquables)

Pour tous nombres a, b, c :

$$\begin{aligned} (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2, & a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b), \\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3, & a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2), \\ (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca), & a^4 - b^4 &= (a-b)(a+b)(a^2+b^2). \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de développer en utilisant la distributivité et la commutativité. Par exemple, $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$, puis $(a+b)^3 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Les formules avec le signe $-$ s'obtiennent en remplaçant b par $-b$. Pour $a^3 - b^3$, on développe $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$. Enfin, $(a+b+c)^2 = ((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$ et $a^4 - b^4 = (a^2-b^2)(a^2+b^2)$. ■

Théorème 1.1.2 (Factorisation de $a^n - b^n$)

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}\,b^k.$$

Si n est **impair**, en remplaçant b par $-b$:

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Démonstration. Développons le produit :

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}\,b^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}\,b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}\,b^{k+1}.$$

En posant $j = k+1$ dans la seconde somme, elle devient $\sum_{j=1}^{n} a^{n-j}\,b^j$. Les termes d'indices $1, \ldots, n-1$ apparaissent dans les deux sommes et se détruisent ; il reste a^n (terme $k=0$ de la première) et $-b^n$ (terme $j=n$ de la seconde). C'est un **télescopage**, technique centrale du chapitre 2. Pour n impair, $(-b)^n = -b^n$, donc $a^n + b^n = a^n - (-b)^n$, et l'on applique la première formule à a et $-b$. ■

À retenir

Conséquence arithmétique constamment utilisée : $(a-b) \mid (a^n - b^n)$ pour tous entiers a, b et tout $n \geq 1$, et $(a+b) \mid (a^n + b^n)$ si n est impair. En particulier, $2^n - 1$ est divisible par $2^d - 1$ dès que $d \mid n$ (appliquer la formule à $a = 2^d$, $b = 1$ et à l'exposant n/d).

Pourquoi pas $a^n + b^n$ pour n pair ?.

Pour n pair, $a^n + b^n$ ne s'annule pas pour $a = -b \neq 0$; il n'est donc pas divisible par $a+b$. Il peut néanmoins se factoriser autrement : si $n = 2^s m$ avec m impair et $m \geq 3$, alors $a^n + b^n = \left(a^{2^s}\right)^m + \left(b^{2^s}\right)^m$ est divisible par $a^{2^s} + b^{2^s}$. Seuls les exposants $n = 2^s$ échappent à toute factorisation de ce type ; c'est pourquoi les nombres premiers de la forme $2^n + 1$ ont nécessairement n égal à une puissance de 2 (nombres de Fermat).

Théorème 1.1.3 (Identité de Gauss)

Pour tous a, b, c :

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]. \end{aligned}$$

En particulier : si $a+b+c=0$, alors $a^3+b^3+c^3 = 3abc$.

Démonstration. *Première égalité.* Développons le membre de droite : $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$. Le produit de a par la parenthèse vaut $a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - abc - a^2c$; de même pour b et c par symétrie circulaire. En additionnant, chaque terme a^2b apparaît une fois avec le signe $-$ (dans le produit par a) et une fois avec le signe $+$ (dans le produit par b, qui contient ba^2) : tous les termes « mixtes » a^2b, ... se détruisent, et il reste $a^3+b^3+c^3-3abc$.

Seconde égalité. On développe $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+bc+ca)$.

Conséquence. Si $a+b+c=0$, le membre de droite est nul. ■

Cette identité est l'outil numéro un pour les problèmes contenant une hypothèse $a+b+c=0$, et sa deuxième écriture (somme de carrés) est le prototype de la méthode SOS du chapitre 15. Elle montre aussi que, **pour** $a, b, c \geq 0$, on a $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$: c'est l'inégalité arithmético-géométrique pour trois nombres, sous une forme déguisée (chapitre 11).

Identités 1.1.4 (Expressions symétriques et antisymétriques de trois variables)

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \qquad (1.1)$$

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc = (a+b)(b+c)(c+a) \qquad (1.2)$$

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a) \qquad (1.3)$$

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a) \qquad (1.4)$$

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \qquad (1.5)$$

Démonstration. (1.1) a été établie dans la preuve du théorème 1.1.3.

(1.2) Posons $p = a+b+c$. Alors $a+b = p-c$, $b+c = p-a$, $c+a = p-b$, et

$$(p-a)(p-b)(p-c) = p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+bc+ca)p - abc = (ab+bc+ca)p - abc,$$

car $(a+b+c)p^2 = p^3$.

(1.3) C'est l'exercice 1.7, résolu par la méthode 1.1.5 ; on peut aussi développer $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3\sum_{\text{sym}} a^2\,b + 6abc$, où $\sum_{\text{sym}} a^2\,b$ désigne la somme des six termes $a^2b, a^2c, b^2a, \ldots$, et comparer avec le développement de $3(a+b)(b+c)(c+a) = 3\big(\sum_{\text{sym}} a^2\,b + 2abc\big)$.

(1.4) Le membre de gauche E s'annule pour $a = b$: en effet, il devient $a^2(a-c) + a^2(c-a) + c^2 \cdot 0 = 0$. Donc E, vu comme polynôme en a, est divisible par $a-b$ (théorème de factorisation, chapitre 5). Par permutation circulaire, E est aussi divisible par $b-c$ et par $c-a$. Ces trois facteurs étant premiers entre eux deux à deux et E étant de degré 3, on a $E = \lambda(a-b)(b-c)(c-a)$ pour une constante λ. Avec $(a,b,c) = (0,1,2)$: $E = 0 + 1\cdot(2-0) + 4\cdot(0-1) = -2$ et $(a-b)(b-c)(c-a) = (-1)(-1)(2) = 2$, donc $\lambda = -1$.

(1.5) Même raisonnement : le membre de gauche F s'annule pour $a = b$, $b = c$ ou $c = a$, donc $F = (a-b)(b-c)(c-a)\,L$ avec L de degré 1. Comme F et $(a-b)(b-c)(c-a)$ sont tous deux changés en leur opposé par l'échange de a et b, le quotient L est **symétrique**, donc $L = \lambda(a+b+c)$. Avec $(a,b,c) = (0,1,2)$: $F = 0 + 1\cdot 2 + 8\cdot(-1) = -6$, et $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) = 2\cdot 3 = 6$, d'où $\lambda = -1$. ■

Méthode 1.1.5 — Factoriser par recherche de racines

Une expression polynomiale $E(a,b,c)$ qui s'annule lorsque $a = b$ est divisible par $(a-b)$ (on la voit comme un polynôme en la variable a, qui admet la racine b). D'où la stratégie :

1. chercher les **racines évidentes** : $a = b$, $a = -b$, $a = 0$, $a+b+c = 0\ldots$;
2. comparer les **degrés** pour connaître le degré du facteur restant ;
3. utiliser les **symétries** pour connaître sa forme ;
4. déterminer la ou les constantes par **une valeur test**.

Cette méthode « racines évidentes + degré + symétrie + valeur test » évite tout développement et doit devenir un réflexe.

Exemple 1.1.6 (La méthode à l'œuvre). Factoriser $E = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$.

Solution. Les trois nombres $u = a-b$, $v = b-c$, $w = c-a$ vérifient $u+v+w = 0$. Par le théorème 1.1.3, $E = u^3 + v^3 + w^3 = 3uvw = 3(a-b)(b-c)(c-a)$. Aucun développement n'a été nécessaire.

Proposition 1.1.7 (Factorisations de degré 4, identité de Sophie Germain)

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab), \\ a^4 + a^2b^2 + b^4 &= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2), \\ a^4 + b^4 &= \big(a^2 + \sqrt{2}\,ab + b^2\big)\big(a^2 - \sqrt{2}\,ab + b^2\big). \end{aligned}$$

Démonstration. Le principe est toujours le même : **compléter un carré**, puis reconnaître une différence de deux carrés $X^2 - Y^2 = (X-Y)(X+Y)$.

- $a^4 + 4b^4 = (a^2+2b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2+2b^2)^2 - (2ab)^2$;
- $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2+b^2)^2 - a^2b^2$;
- $a^4 + b^4 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 = (a^2+b^2)^2 - \big(\sqrt{2}\,ab\big)^2$. ■

Théorème 1.1.8 (Identité de Lagrange)

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2.$$

Plus généralement, pour $2n$ nombres $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i\right)^2 = \sum_{1 \le i < j \le n} \left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2.$$

Démonstration. Développons les deux membres. À gauche,

$$\left(\sum_i a_i^2\right)\left(\sum_j b_j^2\right) = \sum_i a_i^2\, b_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i^2\, b_j^2, \qquad \left(\sum_i a_i\, b_i\right)^2 = \sum_i a_i^2\, b_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i\, b_i a_j b_j,$$

donc le membre de gauche vaut $\sum_{i \neq j} a_i^2\, b_j^2 - 2\sum_{i<j} a_i\, a_j b_i b_j$. À droite, chaque terme vaut $\left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 = a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2a_i a_j b_i b_j$; en sommant sur les paires $i < j$, on retrouve $\sum_{i \neq j} a_i^2\, b_j^2 - 2\sum_{i<j} a_i\, a_j b_i b_j$. Le cas $n = 2$ est la première formule. ∎

Cette identité contient l'inégalité de Cauchy–Schwarz (chapitre 12) : pour des réels, le membre de droite est une somme de carrés, donc il est positif. Elle a aussi un sens arithmétique : **le produit de deux sommes de deux carrés est une somme de deux carrés**, par exemple $5 \times 13 = (1^2+2^2)(2^2+3^2) = (2+6)^2 + (3-4)^2 = 8^2 + 1^2 = 65$.

1.2 Fonctions symétriques élémentaires

Définition 1.2.1 (Polynôme symétrique, fonctions symétriques élémentaires)

Un polynôme $P(x_1, \dots, x_n)$ est **symétrique** s'il est inchangé par toute permutation des variables. Les **fonctions symétriques élémentaires** de $x_1, \dots, x_n$ sont

$$e_1 = \sum_i x_i\,, \qquad e_2 = \sum_{i<j} x_i\, x_j, \qquad \dots, \qquad e_n = x_1 x_2 \cdots x_n,$$

e_k étant la somme de tous les produits de k variables distinctes. Pour trois variables a, b, c, on note traditionnellement

$$p = a + b + c, \qquad q = ab + bc + ca, \qquad r = abc.$$

Théorème 1.2.2 (Théorème fondamental des polynômes symétriques)

Tout polynôme symétrique $P(x_1, \dots, x_n)$ s'écrit, de manière **unique**, comme un polynôme en $e_1, \dots, e_n$. Si P est à coefficients entiers, ce polynôme est à coefficients entiers.

Démonstration. *Ordre sur les monômes.* On compare deux monômes $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ et $x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$ par l'**ordre lexicographique** de leurs exposants : on compare α_1 et β_1, puis en cas d'égalité α_2 et β_2, etc. Le **terme dominant** d'un polynôme non nul est son terme dont le monôme est le plus grand. Le terme dominant d'un produit est le produit des termes dominants.

Existence. Soit P symétrique non nul, de terme dominant $c\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Comme P est symétrique, il contient aussi tous les monômes obtenus en permutant les exposants ; le plus grand d'entre eux a

ses exposants rangés par ordre décroissant. Donc $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n$. Le terme dominant de e_k est $x_1 x_2 \cdots x_k$, donc celui de

$$M = e_1^{\alpha_1-\alpha_2} e_2^{\alpha_2-\alpha_3} \cdots e_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n} e_n^{\alpha_n}$$

est $x_1^{(\alpha_1-\alpha_2)+\cdots+\alpha_n} x_2^{(\alpha_2-\alpha_3)+\cdots+\alpha_n} \cdots x_n^{\alpha_n} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Le polynôme $P - cM$ est symétrique, et son terme dominant est strictement plus petit que celui de P (ou bien il est nul). Tous ces monômes ont un degré au plus égal à celui de P ; comme il n'y a qu'un nombre fini de monômes de degré borné, le procédé s'arrête et exprime P comme polynôme en les e_k. Si P est à coefficients entiers, tous les coefficients c successifs le sont.

Unicité. Il suffit de montrer que si $Q(y_1, \ldots, y_n)$ est un polynôme non nul, alors $Q(e_1, \ldots, e_n)$ n'est pas le polynôme nul. Le terme dominant de $e_1^{a_1} \cdots e_n^{a_n}$ est $x_1^{a_1+\cdots+a_n} x_2^{a_2+\cdots+a_n} \cdots x_n^{a_n}$; deux n-uplets $(a_1, \ldots, a_n)$ différents donnent des monômes dominants différents (on retrouve a_n, puis a_{n-1}, etc., à partir des exposants). Parmi les monômes de Q, celui dont le monôme dominant associé est le plus grand ne peut donc être compensé par aucun autre : $Q(e_1, \ldots, e_n) \neq 0$. ■

Identités 1.2.3 (Expressions usuelles en p, q, r)

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= p^2 - 2q, & a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 &= q^2 - 2pr, \\ a^3+b^3+c^3 &= p^3 - 3pq + 3r, & \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} &= \frac{q}{r} \quad (r \neq 0), \\ (a+b)(b+c)(c+a) &= pq - r, & a^4+b^4+c^4 &= p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr. \end{aligned}$$

Démonstration.

- $p^2 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2q$ (théorème 1.1.1).
- $q^2 = (ab+bc+ca)^2 = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 + 2(ab\cdot bc + bc\cdot ca + ca\cdot ab)$, et la dernière parenthèse vaut $abc(a+b+c) = pr$.
- Par le théorème 1.1.3 : $a^3+b^3+c^3 = 3r + p\big((a^2+b^2+c^2) - q\big) = 3r + p(p^2-3q)$.
- $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{bc+ca+ab}{abc}$.
- $(a+b)(b+c)(c+a) = pq - r$ est l'identité (1.2).
- $a^4+b^4+c^4 = (a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) = (p^2-2q)^2 - 2(q^2-2pr)$, qu'on développe. ■

Exemple 1.2.4. Soient a, b, c réels avec $a+b+c = 6$, $ab+bc+ca = 11$, $abc = 6$. Calculer $a^4+b^4+c^4$.

Avec $p = 6$, $q = 11$, $r = 6$: $p^4 = 1296$, $4p^2q = 4\cdot 36 \cdot 11 = 1584$, $2q^2 = 242$, $4pr = 144$. Donc $a^4+b^4+c^4 = 1296 - 1584 + 242 + 144 = 98$. (On reconnaît d'ailleurs $\{a,b,c\} = \{1,2,3\}$, racines de $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$, et $1+16+81 = 98$.)

Méthode 1.2.5 — Le réflexe « p, q, r »

Devant un système ou une inégalité symétrique en trois variables :

1. traduire toutes les données en p, q, r (c'est toujours possible, par le théorème 1.2.2) ;
2. résoudre ou majorer dans les variables p, q, r ;
3. si nécessaire, remonter aux a, b, c : ce sont les racines de $X^3 - pX^2 + qX - r = 0$ (formules de Viète, chapitre 6).

Exemple 1.2.6 (Un système résolu par p, q, r). Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=3$, $a^3+b^3+c^3=3$.

Solution. On a $p=3$; $p^2-2q=3$ donne $q=3$; $p^3-3pq+3r=3$ donne $27-27+3r=3$, soit $r=1$. Donc a,b,c sont les racines de $X^3-3X^2+3X-1=(X-1)^3$: l'unique solution est $a=b=c=1$.

1.3 Compléter le carré et le discriminant

Théorème 1.3.1 (Forme canonique du trinôme)

Pour $a\neq 0$:

$$aX^2+bX+c=a\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Si a,b,c sont réels, le trinôme garde un signe strict constant (celui de a) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son discriminant $\Delta=b^2-4ac$ est strictement négatif ; il est de signe constant au sens large si et seulement si $\Delta\leq 0$.

Démonstration. On factorise a puis on complète le carré : $X^2+\frac{b}{a}X=\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$. En multipliant par a et en ajoutant c, on obtient la formule. Si $\Delta<0$, alors $-\frac{\Delta}{4a}$ a le signe de a, et le trinôme est la somme de $a\times$(carré) et d'un nombre du signe strict de a : il a le signe strict de a. Si $\Delta>0$, le trinôme prend en $X=-\frac{b}{2a}$ la valeur $-\frac{\Delta}{4a}$, du signe opposé à a, alors qu'il a le signe de a pour $|X|$ grand : il change de signe. Le cas $\Delta=0$ se traite de même. ■

Méthode 1.3.2 — Le discriminant comme outil de preuve

Beaucoup d'énoncés se traitent en choisissant une variable et en lisant l'expression comme un trinôme en cette variable.

Schéma direct : pour montrer $E(x,y)\geq 0$ pour tout x, on écrit $E=Ax^2+Bx+C$ avec $A>0$ et on prouve $B^2-4AC\leq 0$.

Schéma réciproque : si l'énoncé affirme l'existence d'un réel x vérifiant une équation du second degré, alors le discriminant associé est ≥ 0 : cela fournit gratuitement une inégalité sur les autres paramètres.

Exemple 1.3.3. Montrer que pour tous réels x,y : $x^2+xy+y^2\geq 0$, avec égalité si et seulement si $x=y=0$.

Vu comme trinôme en x : $A=1>0$, $B=y$, $C=y^2$, donc $\Delta=y^2-4y^2=-3y^2\leq 0$. Le trinôme est donc toujours ≥ 0. Plus précisément, $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}$, qui s'annule si et seulement si $y=0$ et $x=-\frac{y}{2}=0$.

Exemple 1.3.4 (Le schéma réciproque). Les réels x,y,z vérifient $x+y+z=5$ et $xy+yz+zx=3$. Déterminer la plus grande valeur possible de z.

Solution. On a $x+y=5-z$ et $xy=3-z(x+y)=3-z(5-z)=z^2-5z+3$. Les réels x et y sont racines de $T^2-(5-z)T+(z^2-5z+3)$; ce trinôme a des racines réelles, donc son discriminant est positif : $(5-z)^2-4(z^2-5z+3)\geq 0$, soit $-3z^2+10z+13\geq 0$, c'est-à-dire $(z+1)(13-3z)\geq$

0, ou encore $-1 \le z \le \frac{13}{3}$. La valeur $z = \frac{13}{3}$ est atteinte pour $x = y = \frac{1}{3}$ (discriminant nul). Le maximum est $\frac{13}{3}$.

1.4 Les astuces de calcul incontournables

Méthode 1.4.1 — Quatre gestes automatiques

1. **Ajouter et retrancher.** $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2$.
2. **Multiplier par le conjugué.** $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
3. **Poser** $t = x + \frac{1}{x}$. Alors $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$, et plus généralement $u_{k+1} = t\,u_k - u_{k-1}$, où $u_k = x^k + x^{-k}$.
4. **Homogénéiser.** Utiliser une contrainte comme $a + b + c = 1$ pour rendre tous les termes de même degré, ou au contraire l'éliminer par changement d'échelle (chapitre 10).

Proposition 1.4.2 (La récurrence des sommes $x^k + x^{-k}$)

Soit $x \neq 0$, $t = x + \frac{1}{x}$ et $u_k = x^k + x^{-k}$ pour $k \ge 0$. Alors $u_0 = 2$, $u_1 = t$ et $u_{k+1} = t\,u_k - u_{k-1}$ pour $k \ge 1$. En particulier, u_k est un polynôme à coefficients entiers en t.

Démonstration. $(x^k + x^{-k})(x + x^{-1}) = x^{k+1} + x^{-(k+1)} + x^{k-1} + x^{-(k-1)}$, c'est-à-dire $t\,u_k = u_{k+1} + u_{k-1}$. La dernière affirmation s'en déduit par récurrence. ∎

Exemple 1.4.3. Si $x + \frac{1}{x} = 3$, calculer $x^5 + \frac{1}{x^5}$.

On a $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $u_{k+1} = 3u_k - u_{k-1}$. Alors $u_2 = 9 - 2 = 7$, $u_3 = 21 - 3 = 18$, $u_4 = 54 - 7 = 47$, $u_5 = 141 - 18 = 123$. Donc $x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$.

Exemple 1.4.4. Montrer que $n^4 + 4$ est composé pour tout entier $n > 1$.

Par l'identité de Sophie Germain (proposition 1.1.7) avec $b = 1$: $n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$. Comme $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 \ge 2$ pour $n \ge 2$ et que $n^2 + 2n + 2 > n^2 - 2n + 2$, les deux facteurs sont ≥ 2 : le nombre est composé.

Exemple 1.4.5. Soient a, b, c non nuls avec $a + b + c = 0$. Montrer que $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = 3$.

En mettant au dénominateur commun abc, l'expression vaut $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$. Or $a + b + c = 0$ donne $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ par le théorème 1.1.3. D'où le résultat.

Exemple 1.4.6. Soient x, y, z réels avec $x + y + z = 0$. Montrer que $\frac{x^5+y^5+z^5}{5} = xyz \cdot \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$.

Notons $q = xy + yz + zx$, $r = xyz$ et $p_k = x^k + y^k + z^k$. Puisque x, y, z sont racines de $X^3 + qX - r$ (car $p = 0$), on a $x^k = -qx^{k-2} + rx^{k-3}$ pour $k \ge 3$, et de même pour y et z ; en sommant, $p_k = -q\,p_{k-2} + r\,p_{k-3}$ (identités de Newton, chapitre 6), avec $p_0 = 3$, $p_1 = 0$, $p_2 = -2q$, $p_3 = 3r$. Donc $p_4 = -qp_2 + rp_1 = 2q^2$, puis $p_5 = -qp_3 + rp_2 = -3qr - 2qr = -5qr$. Comme $q = -\frac{1}{2}p_2$, on obtient $p_5 = \frac{5}{2}rp_2$, soit exactement l'égalité annoncée.

Remarque.
Le même calcul donne $p_7 = 7q^2r$, c'est-à-dire $x^7 + y^7 + z^7 = 7xyz(xy + yz + zx)^2$ lorsque $x + y + z = 0$ (exercice 1.11) : un exercice d'olympiade classique qui devient immédiat avec le bon formalisme.

À retenir — les réflexes du chapitre 1

- Une hypothèse $a + b + c = 0$ appelle l'identité de Gauss : $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.
- Une expression symétrique en trois variables se traduit en p, q, r.
- Une expression qui s'annule pour $a = b$ est divisible par $a - b$: racines évidentes, degré, symétrie, valeur test.
- Un polynôme de degré 4 sans racine réelle se factorise souvent en complétant un carré (Sophie Germain).
- Une expression en x et $\frac{1}{x}$ se ramène à $t = x + \frac{1}{x}$.

1.5 Exercices

Exercice 1.1 ★. Factoriser complètement sur $\mathbb{R}$: (a) $x^4 + x^2 + 1$; (b) $x^4 - 5x^2 + 4$; (c) $x^3 - 3x + 2$; (d) $a^4 + 4b^4$.

Exercice 1.2 ★. Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ pour tous réels x, y, z, et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 1.3 ★. Si $x + \frac{1}{x} = 4$, calculer $x^3 + \frac{1}{x^3}$ et $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

Exercice 1.4 ★. Soient a, b, c tels que $a + b + c = 5$, $ab + bc + ca = 8$, $abc = 4$. Calculer $a^2 + b^2 + c^2$, puis $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, puis $a^3 + b^3 + c^3$.

Exercice 1.5 ★★ (classique). Montrer que $n^4 + n^2 + 1$ est composé pour tout entier $n \geq 2$.

Exercice 1.6 ★★. Soient a, b, c réels non nuls avec $a + b + c = 0$. Montrer que

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9.$$

Exercice 1.7 ★★. Démontrer l'identité $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$ sans développer, en utilisant la méthode des racines évidentes.

Exercice 1.8 ★★. Soient x, y réels vérifiant $x^2 + y^2 = 1$. Montrer que

$$|x^3 + y^3 - x - y| \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

avec égalité si et seulement si $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. (Indication : factoriser.)

Exercice 1.9 ★★. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15 = 0$.

Exercice 1.10 ★★. Montrer que pour tous réels a, b : $a^4 + b^4 + (a + b)^4 = 2(a^2 + ab + b^2)^2$.

Exercice 1.11 ★★★ (classique). Soient a, b, c des réels tels que $a+b+c=0$. Montrer que $a^7+b^7+c^7 = 7abc(ab+bc+ca)^2$.

Exercice 1.12 ★★★ (Euler). Démontrer l'identité des quatre carrés : pour tous réels a, b, c, d, e, f, g, h,

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(e^2+f^2+g^2+h^2) \quad &= (ae+bf+cg+dh)^2+(af-be+ch-dg)^2 \\ &+(ag-bh-ce+df)^2+(ah+bg-cf-de)^2.\end{aligned}$$

En déduire que le produit de deux sommes de quatre carrés est une somme de quatre carrés.

Exercice 1.13 ★★★. Soit $n \geq 1$. Montrer que $x^{2n}+x^n+1$ est divisible par x^2+x+1 si et seulement si n n'est pas multiple de 3.

1.6 Solutions

Solution de l'exercice 1.1.

(a) $x^4+x^2+1 = (x^2+1)^2-x^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$; les deux facteurs ont pour discriminant $-3<0$, la factorisation est donc complète sur $\mathbb{R}$.

(b) $x^4-5x^2+4 = (x^2-1)(x^2-4) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$.

(c) 1 est racine : $x^3-3x+2 = (x-1)(x^2+x-2) = (x-1)^2(x+2)$.

(d) $a^4+4b^4 = (a^2+2b^2)^2-(2ab)^2 = (a^2-2ab+2b^2)(a^2+2ab+2b^2)$; en tant que trinômes en a, chacun a pour discriminant $-4b^2<0$, donc la factorisation est complète (pour $b \neq 0$).

Solution de l'exercice 1.2. Par l'identité (1.1), $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = \frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2] \geq 0$. L'égalité impose $x=y$, $y=z$, $z=x$, c'est-à-dire $x=y=z$.

Solution de l'exercice 1.3. Avec $t=4$: $x^3+\frac{1}{x^3} = t^3-3t = 64-12 = 52$. Puis $x^2+\frac{1}{x^2} = t^2-2 = 14$ et

$$x^4+\frac{1}{x^4} = \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2 = 196-2 = 194.$$

Solution de l'exercice 1.4. $a^2+b^2+c^2 = p^2-2q = 25-16 = 9$. Ensuite $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{q}{r} = \frac{8}{4} = 2$. Enfin $a^3+b^3+c^3 = p^3-3pq+3r = 125-120+12 = 17$.

Solution de l'exercice 1.5. $n^4+n^2+1 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)$. Pour $n \geq 2$, on a $n^2-n+1 = n(n-1)+1 \geq 3$ et $n^2+n+1 \geq 7$: c'est un produit de deux entiers ≥ 2, donc un nombre composé.

Solution de l'exercice 1.6. Posons $S = \frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}$ et $T = \frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}$. Réduisons S au dénominateur abc :

$$S = \frac{ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)}{abc}.$$

Le numérateur $N = ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$ s'annule si $a=b$ (alors $N = bc(b-c)+cb(c-b) = 0$), donc $(a-b) \mid N$; par invariance de l'expression sous la permutation circulaire $a \to b \to c \to a$, on vérifie de même que $(b-c)$ et $(c-a)$ divisent N. Comme $\deg N = 3$, on a $N = \lambda(a-b)(b-c)(c-a)$; le test $(a,b,c) = (2,1,0)$ donne $N = 2\cdot 1+0+0 = 2$ et $(a-b)(b-c)(c-a) = 1\cdot 1\cdot(-2) = -2$, donc $\lambda = -1$ et

$$S = \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}.$$

Le numérateur de T ne se prête pas au même argument (il ne s'annule pas pour $a = b$) ; on calcule plutôt le produit terme à terme. On a

$$S \cdot \frac{c}{a-b} = 1 + \frac{c}{a-b}\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) = 1 + \frac{c}{a-b} \cdot \frac{b^2 - a^2 + c(a-b)}{ab}.$$

Or $b^2 - a^2 + c(a-b) = (a-b)(c-a-b) = 2c(a-b)$, puisque $a + b = -c$. Donc

$$S \cdot \frac{c}{a-b} = 1 + \frac{2c^2}{ab} = 1 + \frac{2c^3}{abc},$$

et de même $S \cdot \frac{a}{b-c} = 1 + \frac{2a^3}{abc}$, $S \cdot \frac{b}{c-a} = 1 + \frac{2b^3}{abc}$. En sommant et en utilisant le théorème 1.1.3 ($a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$) :

$$ST = 3 + \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} = 3 + 6 = 9.$$

Vérification sur un exemple respectant $a + b + c = 0$, comme $(a, b, c) = (1{,}2, -3)$:

$$S = \frac{-1}{-3} + \frac{5}{1} + \frac{-4}{2} = \frac{1}{3} + 5 - 2 = \frac{10}{3}, \qquad T = \frac{-3}{-1} + \frac{1}{5} + \frac{2}{-4} = 3 + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{27}{10},$$

et $ST = \frac{10}{3} \cdot \frac{27}{10} = 9$.

Remarque.

Avec $u = a - b$, $v = b - c$, $w = c - a$ (donc $u + v + w = 0$), on a plus précisément $S = \frac{-uvw}{abc}$ et $T = \frac{-9\,abc}{uvw}$, de sorte que le produit ST vaut exactement 9 pour tout triplet (a, b, c) admissible.

Solution de l'exercice 1.7. Notons $E = (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$, polynôme homogène de degré 3. Si $a = -b$, alors $E = c^3 - a^3 + a^3 - c^3 = 0$: donc $(a+b) \mid E$. Par symétrie, $(b+c)$ et $(c+a)$ divisent E. Le produit $(a+b)(b+c)(c+a)$ étant déjà de degré 3, $E = \lambda(a+b)(b+c)(c+a)$. Avec $(a, b, c) = (1,1,1)$: $E = 27 - 3 = 24$ et $(a+b)(b+c)(c+a) = 8$, donc $\lambda = 3$.

Solution de l'exercice 1.8. $x^3 + y^3 - x - y = (x+y)(x^2 - xy + y^2) - (x+y) = (x+y)(x^2 - xy + y^2 - 1)$. Comme $x^2 + y^2 = 1$, la parenthèse vaut $-xy$, donc l'expression est égale à $-xy(x+y)$. Posons $s = x + y$; alors $s^2 = 1 + 2xy$, donc $xy = \frac{s^2 - 1}{2}$ et

$$|x^3 + y^3 - x - y| = \frac{|s| \cdot |s^2 - 1|}{2} = g(|s|), \qquad \text{où } g(t) = \frac{t\,|t^2 - 1|}{2}.$$

Or $2xy \le x^2 + y^2 = 1$ donne $s^2 \le 2$, donc $|s| \in [0, \sqrt{2}]$. Étudions g sur $[0, \sqrt{2}]$:

- sur $[0,1]$, $g(t) = \frac{t - t^3}{2}$, maximale en $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$, où $g = \frac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}192$;
- sur $[1, \sqrt{2}]$, $g(t) = \frac{t^3 - t}{2}$ est croissante, donc maximale en $t = \sqrt{2}$, où $g = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$.

Le maximum global est donc $\frac{\sqrt{2}}{2}$, atteint pour $|s| = \sqrt{2}$, c'est-à-dire $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Remarque.
Le premier réflexe, avant toute recherche de preuve, est de tester le cas d'égalité naturel $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$: il donne immédiatement la valeur $\frac{\sqrt{2}}{2}$, et donc la constante optimale. Une inégalité d'olympiade dont la constante ne correspond à aucun cas d'égalité simple est presque toujours mal recopiée.

Solution de l'exercice 1.9. Remarquons que $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x+1)^4$. L'équation s'écrit donc $(x+1)^4 = 16$, d'où $(x+1)^2 = 4$ (la valeur -4 est exclue sur $\mathbb{R}$), puis $x + 1 = \pm 2$: $x = 1$ ou $x = -3$.

Solution de l'exercice 1.10. Posons $s = a + b$, $m = ab$. Alors $a^2 + b^2 = s^2 - 2m$ et $a^4 + b^4 = (s^2 - 2m)^2 - 2m^2 = s^4 - 4s^2m + 2m^2$. Donc

$$a^4 + b^4 + (a+b)^4 = s^4 - 4s^2m + 2m^2 + s^4 = 2(s^4 - 2s^2m + m^2) = 2(s^2 - m)^2.$$

Or $s^2 - m = a^2 + ab + b^2$, d'où l'identité.

Solution de l'exercice 1.11. Avec $p_1 = 0$, les relations de Newton donnent $p_k = -qp_{k-2} + rp_{k-3}$ ($k \geq 3$), $p_0 = 3$, $p_2 = -2q$, $p_3 = 3r$. On calcule successivement

$$p_4 = -qp_2 + rp_1 = 2q^2, \qquad p_5 = -qp_3 + rp_2 = -3qr - 2qr = -5qr,$$
$$p_6 = -qp_4 + rp_3 = -2q^3 + 3r^2, \qquad p_7 = -qp_5 + rp_4 = 5q^2r + 2q^2r = 7q^2r.$$

Donc $a^7 + b^7 + c^7 = 7abc(ab + bc + ca)^2$.

Solution de l'exercice 1.12. Il s'agit de l'identité des quatre carrés d'Euler. Nous la déduisons d'une identité de Lagrange **complexe**.

Étape 1 : une identité pour les nombres complexes. Pour tous complexes z_1, z_2, w_1, w_2 :

$$|z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2}|^2 + |z_1w_2 - z_2w_1|^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2).$$

En effet, en utilisant $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\mathrm{Re}(u\overline{v})$:

$$|z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2}|^2 = |z_1|^2|w_1|^2 + |z_2|^2|w_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{w_1}\,\overline{z_2}w_2),$$
$$|z_1w_2 - z_2w_1|^2 = |z_1|^2|w_2|^2 + |z_2|^2|w_1|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1w_2\,\overline{z_2}\,\overline{w_1}).$$

Les deux parties réelles portent sur le **même** nombre $z_1\overline{z_2}\,\overline{w_1}w_2$: elles se compensent, et la somme vaut bien le produit annoncé.

Étape 2 : passage aux réels. Posons $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $w_1 = e + fi$, $w_2 = g + hi$. Alors $|z_1|^2 + |z_2|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ et $|w_1|^2 + |w_2|^2 = e^2 + f^2 + g^2 + h^2$. On calcule

$$z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} = (a+bi)(e-fi) + (c+di)(g-hi) = (ae + bf + cg + dh) + i\,(be - af + dg - ch),$$
$$z_1w_2 - z_2w_1 = (a+bi)(g+hi) - (c+di)(e+fi) = (ag - bh - ce + df) + i\,(ah + bg - cf - de).$$

Le carré du module de chacun de ces nombres est la somme des carrés de ses parties réelle et imaginaire, ce qui donne exactement les quatre carrés de l'énoncé (le carré de $be - af + dg - ch$ est celui de $af - be + ch - dg$).

Cette identité prouve que l'ensemble des sommes de quatre carrés est stable par produit, étape clé du théorème de Lagrange sur les quatre carrés.

Solution de l'exercice 1.13. Soit ω une racine primitive cubique de l'unité (chapitre 9) : $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ et $\omega^3 = 1$. Les racines de $x^2 + x + 1$ sont ω et $\overline{\omega}$. Ainsi $x^2 + x + 1$ divise $P(x) = x^{2n} + x^n + 1$ si et seulement si $P(\omega) = 0$ (et alors $P(\overline{\omega}) = \overline{P(\omega)} = 0$).

Si $n \equiv 0 \pmod 3$: $\omega^n = 1$, donc $P(\omega) = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$. Si $n \equiv 1 \pmod 3$: $\omega^n = \omega$, $\omega^{2n} = \omega^2$, donc $P(\omega) = \omega^2 + \omega + 1 = 0$. Si $n \equiv 2 \pmod 3$: $\omega^n = \omega^2$, $\omega^{2n} = \omega^4 = \omega$, donc $P(\omega) = \omega + \omega^2 + 1 = 0$. D'où la conclusion.

CHAPITRE 2

2 Sommes, produits et télescopage

Les sommes et produits interviennent partout : dans les suites, dans les inégalités (où il faut souvent majorer une somme par une expression fermée), dans les problèmes de polynômes. Ce chapitre installe les notations, les formules de base et surtout la technique reine : le **télescopage**.

2.1 Notations et règles de calcul

Définition 2.1.1 (Symboles Σ et Π)

Pour des nombres $u_m, u_{m+1}, \dots, u_n$ $(m \le n)$, on note

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n, \qquad \prod_{k=m}^{n} u_k = u_m\, u_{m+1} \cdots u_n.$$

La lettre k est **muette**. Par convention, une somme vide vaut 0 et un produit vide vaut 1.

Proposition 2.1.2 (Règles de calcul)

1. **Linéarité** : $\sum_k (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_k u_k + \mu \sum_k v_k$.
2. **Relation de Chasles** : $\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$ pour $m \le p < n$.
3. **Changement d'indice** : $\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{j=m+r}^{n+r} u_{j-r}$ (translation) et $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}$ (renversement).
4. **Sommes doubles** : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ et $\sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}$.

Démonstration. Les points 1 à 3 résultent de la commutativité et de l'associativité de l'addition (on ne fait que réordonner et regrouper un nombre fini de termes). Pour le point 4, les deux membres sont la somme des a_{ij} sur le même ensemble fini de couples (i, j), parcouru ligne par ligne ou colonne par colonne. ■

Exemple 2.1.3 (L'astuce de Gauss). Pour calculer $S = \sum_{k=1}^{n} k$, on écrit la somme à l'endroit et à l'envers (point 3) : $S = \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)$, d'où $2S = \sum_{k=1}^{n}(n+1) = n(n+1)$.

2.2 Sommes de référence

Théorème 2.2.1 (Sommes de référence)

Pour tout $n \ge 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

De plus, pour $x \neq 1$ (somme géométrique),

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Démonstration. *Somme des entiers* : exemple 2.1.3.

Somme des carrés. Pour tout k, $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. En sommant de $k = 1$ à n, le membre de gauche **télescope** (voir 2.3) en $(n+1)^3 - 1$:

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Donc $3\sum k^2 = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2} = (n+1)\left(n^2 + 2n - \frac{3n}{2}\right) = \frac{(n+1)n(2n+1)}{2}$.

Somme des cubes. Le même procédé avec $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ donne $(n+1)^4 - 1 = 4\sum k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$, d'où, après simplification, $4\sum k^3 = n^2(n+1)^2$. (On peut aussi vérifier la formule par récurrence : si elle est vraie au rang n, alors $\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.)

Somme géométrique : c'est le théorème 1.1.2 avec $a = x$, $b = 1$: $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + \cdots + x^{n-1})$. ■

Un algorithme, pas des formules.

Le procédé « télescoper $(k+1)^{m+1} - k^{m+1}$ » permet de calculer $\sum k^m$ pour tout m à partir des sommes d'exposants inférieurs : c'est un **algorithme**. Il montre au passage que $\sum_{k=1}^{n} k^m$ est un polynôme en n de degré $m+1$, de coefficient dominant $\frac{1}{m+1}$.

2.3 Télescopage additif

Théorème 2.3.1 (Télescopage)

Si $u_k = v_{k+1} - v_k$ pour $m \le k \le n$, alors

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = v_{n+1} - v_m.$$

Démonstration. $\sum_{k=m}^{n}(v_{k+1} - v_k) = \sum_{j=m+1}^{n+1} v_j - \sum_{k=m}^{n} v_k$ (translation d'indice dans la première somme). Les termes $v_{m+1}, \ldots, v_n$ figurent dans les deux sommes et s'éliminent ; il reste $v_{n+1} - v_m$. ■

Méthode 2.3.2 — Trouver la suite v

Trois situations dominent :

- **fractions** : décomposer en éléments simples, par exemple $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$;
- **racines** : multiplier par la quantité conjuguée ;

- **factorielles et coefficients binomiaux** : utiliser $k \cdot k! = (k+1)! - k!$ ou $\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$.

Exemple 2.3.3. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Comme $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, le théorème 2.3.1 avec $v_k = -\frac{1}{k}$ donne $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

Exemple 2.3.4. Calculer $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

On vérifie en réduisant au même dénominateur que $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$ (la différence des crochets vaut $\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}$). D'où

$$T_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Exemple 2.3.5. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$.

Chaque terme vaut $\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$, donc la somme vaut $\sqrt{n+1} - 1$.

Exemple 2.3.6. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

Puisque $k \cdot k! = (k+1) \cdot k! - k! = (k+1)! - k!$, la somme télescope en $(n+1)! - 1!$.

Exemple 2.3.7 (Majorer par télescopage). Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$ pour $n \geq 2$.

Pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. En sommant de 2 à n : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{n}$, puis on ajoute le terme $k = 1$.

Exemple 2.3.8 (Une somme de racines). Montrer que $2\sqrt{n+1} - 2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$ pour tout $n \geq 1$.

Pour $k \geq 1$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$, qui est strictement compris entre $\frac{1}{2\sqrt{k+1}}$ et $\frac{1}{2\sqrt{k}}$. Donc $2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$. On somme la première inégalité de 1 à n et la seconde de 1 à n (avec $\sqrt{0} = 0$), et on télescope.

À retenir

Quand une somme ne se calcule pas explicitement, on la **compare** terme à terme à une somme télescopique. C'est la technique de base pour les inégalités portant sur des sommes.

2.4 Télescopage multiplicatif

Théorème 2.4.1 (Télescopage multiplicatif)

Si $u_k = \frac{v_{k+1}}{v_k}$ avec $v_k \neq 0$ pour $m \leq k \leq n+1$, alors $\prod_{k=m}^{n} u_k = \frac{v_{n+1}}{v_m}$.

Démonstration. Le numérateur v_{k+1} de chaque facteur se simplifie avec le dénominateur du facteur suivant ; il reste v_{n+1} au numérateur et v_m au dénominateur. (Formellement, c'est le théorème 2.3.1 appliqué aux logarithmes des valeurs absolues, ou une récurrence immédiate.) ■

Exemple 2.4.2. Calculer $P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

On a $1-\frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$, donc

$$P_n = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Exemple 2.4.3. Calculer $Q_n = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$ et sa limite.

Avec $f(k) = k^2-k+1$, on a $f(k+1) = k^2+k+1$, donc $k^3-1 = (k-1)(k^2+k+1) = (k-1)f(k+1)$ et $k^3+1 = (k+1)(k^2-k+1) = (k+1)f(k)$. Ainsi

$$Q_n = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{f(k+1)}{f(k)} = \frac{1\cdot 2}{n(n+1)}\cdot\frac{f(n+1)}{f(2)} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}.$$

La limite est $\frac{2}{3}$.

Exemple 2.4.4 (Un produit trigonométrique). Pour x non multiple de π, montrer que $\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$.

Par la formule $\sin 2y = 2\sin y\cos y$, on a $\cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin(x/2^{k-1})}{2\sin(x/2^k)}$. Le produit télescope : $\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(x/2^{k-1})}{2\sin(x/2^k)} = \frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}$.

2.5 La transformation d'Abel

Théorème 2.5.1 (Transformation d'Abel)

Soient (a_k) et (b_k) deux suites, et $A_k = a_1+\cdots+a_k$ (avec $A_0 = 0$). Alors

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\,b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k\,(b_{k+1}-b_k).$$

Démonstration. Écrivons $a_k = A_k - A_{k-1}$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\,b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k\,b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1}\,b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k\,b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k\,b_{k+1}.$$

Comme $A_0 = 0$, la seconde somme vaut $\sum_{k=1}^{n-1} A_k\,b_{k+1}$. En isolant le terme $k=n$ de la première somme :

$\sum_{k=1}^{n} a_k\,b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k\,b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k\,b_{k+1} = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k\,(b_{k+1}-b_k)$. ■

C'est l'« intégration par parties discrète » : les a_k sont « intégrés » en A_k, les b_k sont « dérivés » en $b_{k+1}-b_k$. Elle sert notamment lorsqu'une suite est monotone et que l'autre a des sommes partielles contrôlées.

Corollaire 2.5.2 (Inégalité d'Abel)

Soient $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$ et $a_1, \ldots, a_n$ réels tels que $m \leq A_k \leq M$ pour tout k. Alors

$$m\, b_1 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k \leq M\, b_1.$$

Démonstration. Par le théorème 2.5.1, $\sum a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k\,(b_k - b_{k+1})$, où tous les coefficients b_n et $b_k - b_{k+1}$ sont positifs. En majorant chaque A_k par M :

$$\sum a_k b_k \leq M\left[b_n + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})\right] = M\, b_1,$$

car la somme télescope. La minoration est identique. ■

Exemple 2.5.3. Soient $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$. Montrer que $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\, b_k\right| \leq b_1$.

Avec $a_k = (-1)^{k+1}$, les sommes partielles A_k valent 1 ou 0 : on applique le corollaire 2.5.2 avec $m = 0$, $M = 1$. On obtient même $0 \leq \sum (-1)^{k+1} b_k \leq b_1$.

2.6 Coefficients binomiaux

Définition 2.6.1 (Coefficient binomial)

Pour $0 \leq k \leq n$, on pose $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, et $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$. C'est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Théorème 2.6.2 (Relations fondamentales)

Pour $n \geq 1$ et k entier :

1. **Symétrie** : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
2. **Pascal** : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$;
3. **Absorption** : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration.

1. La formule est symétrique en k et $n-k$.
2. Pour $1 \leq k \leq n-1$: $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}\big((n-k)+k\big) = \binom{n}{k}$. Les cas $k \leq 0$ ou $k \geq n$ se vérifient directement. Combinatoirement : parmi les parties à k éléments de $\{1, \ldots, n\}$, celles qui ne contiennent pas n sont au nombre de $\binom{n-1}{k}$, celles qui le contiennent au nombre de $\binom{n-1}{k-1}$.
3. $k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$. Combinatoirement : on compte de deux façons les couples (partie à k éléments, élément distingué de cette partie). ■

Théorème 2.6.3 (Formule du binôme de Newton)

Pour tous nombres x, y et tout $n \geq 0$: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

Démonstration. Par récurrence sur n ; le cas $n = 0$ est clair. Si la formule est vraie au rang $n-1$, alors

$$(x+y)^n = (x+y)\sum_k \binom{n-1}{k} x^{n-1-k}y^k = \sum_k \binom{n-1}{k} x^{n-k}y^k + \sum_k \binom{n-1}{k-1} x^{n-k}y^k,$$

(translation d'indice dans la seconde somme), et la relation de Pascal donne $\sum_k \binom{n}{k} x^{n-k}y^k$. ■

Corollaire 2.6.4 (Identités classiques)

Pour $n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \quad \text{(Vandermonde)},$$

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1} \quad \text{(crosse de hockey)}.$$

Démonstration.

- Formule du binôme avec $x = y = 1$, puis avec $x = 1$, $y = -1$.
- Par absorption : $\sum_k k\binom{n}{k} = n\sum_{k\geq 1}\binom{n-1}{k-1} = n\,2^{n-1}$.
- **Vandermonde.** Le coefficient de X^n dans $(1+X)^n(1+X)^n = (1+X)^{2n}$ vaut, à gauche, $\sum_k \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_k \binom{n}{k}^2$ (symétrie), et à droite $\binom{2n}{n}$.
- **Crosse de hockey.** Par Pascal, $\binom{k}{r} = \binom{k+1}{r+1} - \binom{k}{r+1}$: la somme télescope en $\binom{n+1}{r+1} - \binom{r}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$. ■

Méthode 2.6.5 — Trois façons de prouver une identité binomiale

1. **Combinatoire** : compter le même ensemble de deux manières.
2. **Algébrique** : identifier des coefficients dans un produit de polynômes (par exemple $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ pour Vandermonde).
3. **Analytique** : dériver ou intégrer l'identité du binôme (par exemple dériver $(1+x)^n = \sum\binom{n}{k}x^k$, puis prendre $x = 1$, redonne $\sum k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$).

Exemple 2.6.6 (Une somme avec 1/(k+1)). Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Par absorption appliquée à $n+1$ et $k+1$: $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$. Donc la somme vaut $\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

À retenir — les réflexes du chapitre 2

- Chercher à écrire le terme général comme une **différence** $v_{k+1} - v_k$ (ou un quotient $\frac{v_{k+1}}{v_k}$).
- Une somme qui ne se calcule pas se **compare** à une somme télescopique.

- Une somme $\sum a_k b_k$ avec (b_k) monotone appelle la **transformation d'Abel**.
- Une identité binomiale se prouve par double comptage, par identification de coefficients, ou par dérivation.

2.7 Exercices

Exercice 2.1 ★. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.

Exercice 2.2 ★. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.

Exercice 2.3 ★. Calculer $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right)$.

Exercice 2.4 ★★. Calculer $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$.

Exercice 2.5 ★★. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$.

Exercice 2.6 ★★. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

Exercice 2.7 ★★ (classique). Montrer que $\prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ pour $x \neq 1$.

Exercice 2.8 ★★. Soit (F_n) la suite de Fibonacci ($F_1 = F_2 = 1$). Montrer que $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ et $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.

Exercice 2.9 ★★★. Montrer que pour tout $n \geq 1$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} < \frac{5}{4}$.

Exercice 2.10 ★★★. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 2.11 ★★★. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ par deux méthodes différentes.

2.8 Solutions

Solution de l'exercice 2.1. $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$. La somme vaut donc

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Solution de l'exercice 2.2. $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$. La somme vaut $1 - \frac{1}{(n+1)^2}$.

Solution de l'exercice 2.3. $1 - \frac{2}{k(k+1)} = \frac{k^2+k-2}{k(k+1)} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$. D'où

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{k+2}{k+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+2}{3} = \frac{n+2}{3n}.$$

Solution de l'exercice 2.4. Méthode par télescopage : cherchons $v_k = \frac{ak+b}{2^k}$ tel que $v_k - v_{k+1} = \frac{k}{2^k}$. On a

$$v_k - v_{k+1} = \frac{2(ak+b) - (ak+a+b)}{2^{k+1}} = \frac{ak+b-a}{2^{k+1}},$$

à comparer avec $\frac{2k}{2^{k+1}}$: il faut $a = 2$ et $b = a = 2$. Donc $v_k = \frac{2k+2}{2^k}$ et

$$S = \sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k+1}) = v_1 - v_{n+1} = 2 - \frac{2n+4}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Solution de l'exercice 2.5. Pour $k \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$, puisque $\sqrt{k-1} < \sqrt{k}$. En sommant, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$.

Solution de l'exercice 2.6. $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$, donc la somme vaut $1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

Solution de l'exercice 2.7. Par récurrence, ou par télescopage direct : multiplions le produit par $(1-x)$; $(1-x)(1+x) = 1-x^2$, puis $(1-x^2)(1+x^2) = 1-x^4$, etc. Après $n+1$ étapes, on obtient $1 - x^{2^{n+1}}$. D'où le résultat en divisant par $1-x$.

Solution de l'exercice 2.8. De $F_k = F_{k+2} - F_{k+1}$, on tire $\sum_{k=1}^{n} F_k = \sum_{k=1}^{n} (F_{k+2} - F_{k+1}) = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$. Pour la seconde, $F_k^2 = F_k(F_{k+1} - F_{k-1}) = F_k F_{k+1} - F_{k-1} F_k$ (avec $F_0 = 0$) : la somme télescope en $F_n F_{n+1}$.

Solution de l'exercice 2.9. On majore : pour $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)}\right].$$

En sommant de 2 à n : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Avec le terme $k = 1$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} < 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

Solution de l'exercice 2.10. $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} = \frac{-1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} = \frac{-1}{n+1}(0-1) = \frac{1}{n+1},$$

en utilisant $\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} = 0$.

Solution de l'exercice 2.11. *Méthode algébrique.* Le coefficient de x^n dans $(1+x)^{2n}$ est $\binom{2n}{n}$. Mais $(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n$, et le coefficient de x^n dans ce produit vaut $\sum_k \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_k \binom{n}{k}^2$.

Méthode combinatoire. On choisit n personnes parmi n filles et n garçons. Si l'on prend k filles, il faut $n-k$ garçons, d'où $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ possibilités ; on somme sur k.

CHAPITRE 3

3 Équations, systèmes et second degré

Résoudre une équation, c'est déterminer **exactement** l'ensemble de ses solutions : il faut donc montrer que chaque nombre trouvé est solution (vérification) et qu'il n'y en a pas d'autre (analyse). Ce chapitre rassemble les outils de base : le trinôme du second degré, les systèmes symétriques, les équations avec radicaux, la partie entière et les systèmes cycliques.

3.1 Le trinôme du second degré

Théorème 3.1.1 (Trinôme du second degré)

Soit $f(X) = aX^2 + bX + c$ à coefficients réels, avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$: f a deux racines réelles $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, $f(X) = a(X - x_1)(X - x_2)$, et f est du signe de a à l'extérieur de $[x_1, x_2]$, du signe opposé à l'intérieur.
- Si $\Delta = 0$: racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $f(X) = a(X - x_0)^2$, du signe de a partout sauf en x_0.
- Si $\Delta < 0$: pas de racine réelle, et f est du signe strict de a partout.

Dans tous les cas (racines éventuellement complexes, égales à $\frac{-b \pm \delta}{2a}$ où $\delta^2 = \Delta$), $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ (**relations de Viète**). Si $a > 0$, le minimum de f sur $\mathbb{R}$ vaut $-\frac{\Delta}{4a}$, atteint en $-\frac{b}{2a}$.

Démonstration. Par la forme canonique (théorème 1.3.1), $f(X) = a\left[\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

- Si $\Delta > 0$, la différence de carrés se factorise : $f(X) = a\left(X + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(X + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a(X - x_1)(X - x_2)$. Le produit $(X - x_1)(X - x_2)$ est positif à l'extérieur de l'intervalle des racines, négatif à l'intérieur.
- Si $\Delta = 0$, $f(X) = a(X - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$, la crochet est la somme d'un carré et du nombre strictement positif $-\frac{\Delta}{4a^2}$.

La même factorisation vaut dans $\mathbb{C}$ avec δ à la place de $\sqrt{\Delta}$; en développant $a(X - x_1)(X - x_2) = aX^2 - a(x_1 + x_2)X + ax_1x_2$ et en identifiant avec $aX^2 + bX + c$, on obtient les relations de Viète. Enfin, si $a > 0$, $f(X) \geq -\frac{\Delta}{4a}$ avec égalité si et seulement si $X = -\frac{b}{2a}$. ■

Proposition 3.1.2 (Deux nombres de somme et produit donnés)

Deux nombres complexes x, y ont pour somme s et pour produit m si et seulement si ce sont les deux racines (éventuellement égales) du trinôme $T^2 - sT + m$. Pour que x et y soient **réels** (avec s, m réels), il faut et il suffit que $s^2 \geq 4m$.

Démonstration. $(T - x)(T - y) = T^2 - (x + y)T + xy$. Donc $x + y = s$ et $xy = m$ si et seulement si $(T - x)(T - y) = T^2 - sT + m$, c'est-à-dire si et seulement si x et y sont les racines de ce trinôme. Elles sont réelles si et seulement si son discriminant $s^2 - 4m$ est positif (théorème 3.1.1). ■

Méthode 3.1.3 — Systèmes symétriques à deux inconnues

Un système symétrique en x, y se résout en posant $s = x + y$, $m = xy$: on obtient un système en (s, m), souvent plus simple, grâce aux formules $x^2 + y^2 = s^2 - 2m$, $x^3 + y^3 = s^3 - 3sm$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{s}{m}$. Une fois s et m connus, x et y sont les racines de $T^2 - sT + m = 0$ (proposition 3.1.2). Condition de réalité : $s^2 \geq 4m$.

Exemple 3.1.4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système $x + y = 5$, $x^3 + y^3 = 35$.

$x^3 + y^3 = s^3 - 3sm = 125 - 15m = 35$ donne $m = 6$. Alors x, y sont racines de $T^2 - 5T + 6 = 0$, soit $\{x, y\} = \{2,3\}$. Les solutions sont $(2,3)$ et $(3,2)$.

Exemple 3.1.5 (Une équation réciproque). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$.

Solution. 0 n'est pas solution ; on divise par x^2 : $x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$. Avec $t = x + \frac{1}{x}$ (proposition 1.4.2), $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, d'où $t^2 - 5t + 6 = 0$, soit $t = 2$ ou $t = 3$. L'équation $x + \frac{1}{x} = 2$ donne $x = 1$; l'équation $x + \frac{1}{x} = 3$ donne $x^2 - 3x + 1 = 0$, soit $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Les solutions sont 1 et $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Une équation dont les coefficients sont **symétriques** (on lit la même suite de coefficients de gauche à droite et de droite à gauche) s'appelle une équation **réciproque** ; la substitution $t = x + \frac{1}{x}$ divise son degré par deux.

3.2 Équations avec radicaux

Proposition 3.2.1 (Élever au carré)

Pour des réels A et B : si $A \geq 0$ et $B \geq 0$, alors $A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$. Sans hypothèse de signe, on a seulement $A = B \Rightarrow A^2 = B^2$; plus précisément, $A^2 = B^2 \Leftrightarrow (A = B$ ou $A = -B)$.

Démonstration. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$; ce produit est nul si et seulement si $A = B$ ou $A = -B$. Si $A, B \geq 0$, l'égalité $A = -B$ impose $A = B = 0$, qui est un cas particulier de $A = B$. ■

Méthode 3.2.2 — Radicaux

1. **Domaine d'abord** : écrire les conditions ≥ 0 sous chaque radical.
2. **Élever au carré en contrôlant les signes** (proposition 3.2.1) : sinon l'implication est à sens unique et il faut **vérifier** les solutions obtenues.
3. **Astuces** : isoler un radical ; poser $u = \sqrt{\cdot}$; multiplier par la quantité conjuguée ; utiliser la monotonie (un membre croissant, l'autre décroissant : au plus une solution).

Exemple 3.2.3. Résoudre $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 2} = 1$.

Domaine : $x \geq 2$. Le membre de gauche vaut $\frac{(x+3)-(x-2)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}} = \frac{5}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}}$, fonction strictement décroissante : il y a au plus une solution. L'équation équivaut à $\sqrt{x + 3} + \sqrt{x - 2} = 5$; en ajoutant membre à membre à l'équation initiale, $2\sqrt{x + 3} = 6$, donc $x = 6$. Vérification : $3 - 2 = 1$. L'unique solution est $x = 6$.

Exemple 3.2.4 (Le piège de l'élévation au carré). Résoudre $\sqrt{2x+3} = x$.

On doit avoir $x \geq 0$ (un radical est positif). Alors, par la proposition 3.2.1, l'équation équivaut à $2x + 3 = x^2$, soit $(x-3)(x+1) = 0$. La solution $x = -1$ est à rejeter ($x \geq 0$) : l'unique solution est $x = 3$. Oublier la condition $x \geq 0$ ferait apparaître la « solution parasite » -1 : en effet $\sqrt{1} = 1 \neq -1$.

Exemple 3.2.5. Résoudre $x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$ (radical infini).

Si la valeur existe et vaut $x > 0$, alors $x = \sqrt{2+x}$, donc $x^2 - x - 2 = 0$ et $x = 2$ (la racine -1 est exclue). L'existence se justifie en montrant que la suite $u_0 = \sqrt{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ est croissante et majorée par 2, donc convergente (chapitre 4).

3.3 Partie entière

Définition 3.3.1 (Partie entière)

Pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier n tel que $n \leq x < n+1$. On note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1)$ la **partie fractionnaire** de x, et $\lceil x \rceil$ le plus petit entier $\geq x$.

L'existence de $\lfloor x \rfloor$ découle de ce que tout réel est majoré par un entier (propriété d'Archimède) : $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier $\leq x$. L'unicité vient de ce que deux entiers distincts diffèrent d'au moins 1.

Proposition 3.3.2 (Propriétés de la partie entière)

Pour tous réels x, y, tout entier n et tout entier $m \geq 1$:

1. $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$;
2. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$;
3. $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0$ si $x \in \mathbb{Z}$, et -1 sinon ;
4. (**identité d'Hermite**) $\sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor x + \frac{k}{m} \right\rfloor = \lfloor mx \rfloor$;
5. $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor$.

Démonstration.

1. De $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ on tire $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$, et $\lfloor x \rfloor + n$ est un entier.
2. $x + y = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \{x\} + \{y\}$ avec $0 \leq \{x\} + \{y\} < 2$. Par le point 1, $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor$, et le dernier terme vaut 0 ou 1.
3. Si $x \in \mathbb{Z}$, c'est clair. Sinon, $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$, donc $-\lfloor x \rfloor - 1 < -x < -\lfloor x \rfloor$, et $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$.
4. Soit $g(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \lfloor x + \frac{k}{m} \rfloor - \lfloor mx \rfloor$. Alors

$$g(x + 1/m) = \sum_{k=1}^{m} \lfloor x + k/m \rfloor - \lfloor mx + 1 \rfloor = g(x) + \lfloor x+1 \rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 = g(x).$$

   La fonction g est donc périodique de période $\frac{1}{m}$. Pour $0 \leq x < \frac{1}{m}$, tous les nombres $x + \frac{k}{m}$ ($0 \leq k \leq m-1$) sont dans $[0,1)$ et $mx \in [0,1)$: $g(x) = 0$. Par périodicité, $g = 0$ partout.
5. Soit $q = \lfloor x/m \rfloor$: $qm \leq x < (q+1)m$. Comme qm est un entier $\leq x$, on a $qm \leq \lfloor x \rfloor$; et $\lfloor x \rfloor \leq x < (q+1)m$. Donc $q \leq \frac{\lfloor x \rfloor}{m} < q+1$, c'est-à-dire $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{m} \right\rfloor = q$. ∎

Méthode 3.3.3 — Équations avec partie entière

Poser $n = \lfloor x \rfloor$ et $t = \{x\} \in [0,1)$, donc $x = n + t$. L'équation devient un système : une partie entière (en n) et une contrainte sur t. On borne ensuite n grâce à $0 \leq t < 1$. Autre réflexe : si $\lfloor A \rfloor = k$, alors $k \leq A < k + 1$, ce qui transforme l'équation en **inégalités**.

Exemple 3.3.4. Résoudre $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 12$.

Posons $x = n + t$. Alors $\lfloor 2x \rfloor = 2n + \lfloor 2t \rfloor$ avec $\lfloor 2t \rfloor \in \{0,1\}$. L'équation devient $3n + \lfloor 2t \rfloor = 12$. Si $\lfloor 2t \rfloor = 0$: $3n = 12$, $n = 4$, $t \in [0, 1/2)$, donc $x \in [4\,;\, 4{,}5)$. Si $\lfloor 2t \rfloor = 1$: $3n = 11$, impossible. Les solutions sont les réels de $[4\,;\, 4{,}5)$.

Exemple 3.3.5 (Transformer en inégalités). Résoudre $\left\lfloor \frac{2x+1}{3} \right\rfloor = \frac{x}{2}$.

Solution. Le membre de droite est un entier k, donc $x = 2k$. L'équation devient $\left\lfloor \frac{4k+1}{3} \right\rfloor = k$, c'est-à-dire $k \leq \frac{4k+1}{3} < k + 1$, soit $3k \leq 4k + 1 < 3k + 3$, ou encore $-1 \leq k < 2$. Donc $k \in \{-1,0,1\}$ et $x \in \{-2,0,2\}$. Vérification : pour $x = -2$, $\lfloor -1 \rfloor = -1$ ✓ ; pour $x = 0$, $\lfloor \frac{1}{3} \rfloor = 0$ ✓ ; pour $x = 2$, $\lfloor \frac{5}{3} \rfloor = 1$ ✓.

3.4 Systèmes cycliques : l'argument du maximum

Théorème 3.4.1 (Systèmes cycliques à fonction croissante)

Soit f une fonction **croissante** sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$, et $x_1, \ldots, x_n \in I$ tels que

$$x_1 = f(x_2), \quad x_2 = f(x_3), \quad \ldots, \quad x_{n-1} = f(x_n), \quad x_n = f(x_1).$$

Alors $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, et cette valeur commune est un point fixe de f.

Démonstration. Les indices sont lus modulo n : $x_i = f(x_{i+1})$ pour tout i. Soit M la plus grande valeur, atteinte en x_j. Alors $x_{j+1} \leq x_j$, donc $f(x_{j+1}) \leq f(x_j)$, c'est-à-dire $x_j \leq x_{j-1}$. Comme $x_j = M$ est maximal, $x_{j-1} = M$. En répétant l'argument, $x_{j-2} = M$, puis $x_{j-3} = M$, etc. : tous les x_i valent M, et $M = f(M)$. ■

Le cas d'une fonction décroissante.

Si f est **décroissante**, la fonction $f \circ f$ est croissante et $x_i = (f \circ f)(x_{i+2})$. Si n est impair, les indices $i, i+2, i+4, \ldots$ parcourent tous les indices et le théorème 3.4.1 appliqué à $f \circ f$ montre que tous les x_i sont égaux. Si n est pair, on obtient seulement que les termes de rang pair sont égaux entre eux, et de même pour les rangs impairs.

Exemple 3.4.2. Résoudre dans $\mathbb{R}_{>0}$: $x^3 = 2y - 1$, $y^3 = 2z - 1$, $z^3 = 2x - 1$.

Le système s'écrit $x = f(y)$, $y = f(z)$, $z = f(x)$ avec $f(t) = \sqrt[3]{2t - 1}$, fonction croissante. Par le théorème 3.4.1, $x = y = z$. Il reste $x^3 - 2x + 1 = 0$, soit $(x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$: $x = 1$ ou $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (l'autre racine $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ est négative). Les deux triplets constants $(1,1,1)$ et $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ sont solutions.

À retenir — les réflexes du chapitre 3

- Un système symétrique en x, y : poser $s = x + y$, $m = xy$.
- Une équation réciproque : poser $t = x + \frac{1}{x}$.
- Un radical : domaine, puis élévation au carré **contrôlée**, puis vérification.
- Une partie entière : $x = n + t$, ou « $\lfloor A \rfloor = k \Leftrightarrow k \leq A < k + 1$ ».
- Un système cyclique : considérer la plus grande inconnue.

3.5 Exercices

Exercice 3.1 ★. Résoudre $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$.

Exercice 3.2 ★. Pour quelles valeurs de m l'équation $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ a-t-elle deux racines réelles positives ?

Exercice 3.3 ★. Résoudre $\sqrt{x + 5} = x - 1$.

Exercice 3.4 ★★. Résoudre dans $\mathbb{R}$: (a) $\lfloor x \rfloor + \{x\}^2 = \frac{9}{4}$; (b) $\lfloor x \rfloor \cdot \{x\} = \frac{1}{2}$.

Exercice 3.5 ★★. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 3 = 0$.

Exercice 3.6 ★★. Soient x, y réels avec $x + y = 2$ et $x^4 + y^4 = 34$. Trouver xy.

Exercice 3.7 ★★. Résoudre $\sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x} = x^2 - 4x + 6$.

Exercice 3.8 ★★. Résoudre le système $x + y + z = 6$, $xy + yz + zx = 11$, $xyz = 6$.

Exercice 3.9 ★★★. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$: $x + y + z = 3$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x^3 + y^3 + z^3 = 3$.

Exercice 3.10 ★★★. Soit a un réel. Résoudre $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$ pour $x \geq 0$.

Exercice 3.11 ★★★ (IMO 1963). Résoudre $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$ en fonction du paramètre réel p.

3.6 Solutions

Solution de l'exercice 3.1. $s = 7$, $s^2 - 2m = 25$ donne $m = 12$. Alors x, y sont racines de $T^2 - 7T + 12 = 0$: $\{x, y\} = \{3,4\}$.

Solution de l'exercice 3.2. Il faut $\Delta = 4m^2 - 4(m + 2) \geq 0$, la somme $2m > 0$ et le produit $m + 2 > 0$. Donc $m^2 - m - 2 \geq 0$, c'est-à-dire $m \leq -1$ ou $m \geq 2$; avec $m > 0$ et $m > -2$: $m \geq 2$.

Solution de l'exercice 3.3. Domaine : $x \geq -5$ et $x \geq 1$ (le membre de gauche est positif). En élevant au carré : $x + 5 = x^2 - 2x + 1$, soit $x^2 - 3x - 4 = 0$, $x \in \{4, -1\}$. Seul $x = 4$ vérifie $x \geq 1$; l'unique solution est $x = 4$.

Solution de l'exercice 3.4.

(a) Écrivons $x = n + t$ avec $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $t = \{x\} \in [0,1)$. Alors $t^2 = \frac{9}{4} - n \in [0,1)$ impose $\frac{5}{4} < n \leq \frac{9}{4}$, donc $n = 2$ et $t^2 = \frac{1}{4}$, soit $t = \frac{1}{2}$. Unique solution : $x = \frac{5}{2}$.

(b) On veut $nt = \frac{1}{2}$ avec $t \in [0,1)$, donc $n \neq 0$ et $t = \frac{1}{2n}$. La condition $0 \leq t < 1$ impose $n \geq 1$. Pour chaque entier $n \geq 1$ on obtient donc la solution

$$x = n + \frac{1}{2n} \qquad (n = 1,2,3,\dots),$$

c'est-à-dire $x \in \left\{\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{19}{6}, \dots\right\}$.

Solution de l'exercice 3.5. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x-1)^4$, donc l'équation s'écrit $(x-1)^4 = 4$, soit $(x-1)^2 = 2$ et $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Solution de l'exercice 3.6. Avec $s = 2$ et $m = xy$: $a = x^2 + y^2 = 4 - 2m$ et $x^4 + y^4 = a^2 - 2m^2 = (4-2m)^2 - 2m^2 = 2m^2 - 16m + 16 = 34$. Donc $m^2 - 8m - 9 = 0$, $m \in \{9, -1\}$. La condition de réalité $s^2 \geq 4m$, c'est-à-dire $4 \geq 4m$, impose $m \leq 1$: donc $xy = -1$.

Solution de l'exercice 3.7. Domaine : $x \in [1,3]$. À gauche, par concavité (ou par Cauchy–Schwarz), $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} \leq \sqrt{2 \cdot 2} = 2$ avec égalité si et seulement si $x = 2$. À droite, $x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 \geq 2$ avec égalité si et seulement si $x = 2$. Les deux membres ne peuvent donc être égaux que si $x = 2$, et cette valeur convient. L'unique solution est $x = 2$.

Solution de l'exercice 3.8. x, y, z sont les racines de $T^3 - 6T^2 + 11T - 6 = (T-1)(T-2)(T-3) = 0$. Les solutions sont les six permutations de $(1,2,3)$.

Solution de l'exercice 3.9. Notons $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$, $r = xyz$. Alors $p = 3$ et $p^2 - 2q = 3$ donnent $q = 3$; puis $p^3 - 3pq + 3r = 3$ donne $27 - 27 + 3r = 3$, $r = 1$. Donc x, y, z sont racines de $T^3 - 3T^2 + 3T - 1 = (T-1)^3$: la seule solution est $x = y = z = 1$.

Solution de l'exercice 3.10. Notons que $x \geq 0$ et posons $y = \sqrt{a+x} \geq 0$. Alors $x^2 = a - y$ et $y^2 = a + x$. En soustrayant : $x^2 - y^2 = -(y+x)$, donc $(x+y)(x-y+1) = 0$. Comme $x, y \geq 0$, soit $x = y = 0$ (alors $a = 0$), soit $y = x + 1$. Dans ce dernier cas, $(x+1)^2 = a + x$ donne $x^2 + x + 1 = a$, d'où $x = \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$, valable pour $a \geq 1$ (afin que $x \geq 0$). Conclusion : pour $a \geq 1$, $x = \frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$; pour $a = 0$, $x = 0$; sinon pas de solution.

Solution de l'exercice 3.11. Domaine : $x^2 \geq \max(p, 1)$ et $x > 0$ (le membre de gauche est ≥ 0 et $x \neq 0$). Isolons : $\sqrt{x^2 - p} = x - 2\sqrt{x^2 - 1}$, ce qui exige $x \geq 2\sqrt{x^2-1}$, c'est-à-dire $x^2 \leq \frac{4}{3}$. En élevant au carré : $x^2 - p = x^2 - 4x\sqrt{x^2-1} + 4x^2 - 4$, donc $4x\sqrt{x^2-1} = 4x^2 - 4 + p$; en élevant encore au carré,

$$16x^2(x^2-1) = (4x^2 - 4 + p)^2.$$

En posant $u = x^2$: $16u^2 - 16u = 16u^2 + (p-4)^2 + 8u(p-4)$, soit $-16u = 8u(p-4) + (p-4)^2$, d'où $u(16 - 8p) = (p-4)^2$ et

$$x^2 = \frac{(4-p)^2}{16-8p} = \frac{(4-p)^2}{8(2-p)} \qquad (p < 2).$$

Il reste à imposer $x^2 \geq 1$, $x^2 \geq p$ et $x^2 \leq \frac{4}{3}$: on trouve que l'équation admet une (unique) solution positive

$$x = \frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}$$

exactement pour $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$. Pour $p < 0$ ou $p > \frac{4}{3}$, il n'y a pas de solution.

CHAPITRE 4

4 Récurrence et suites

Le raisonnement par récurrence est l'outil qui permet de démontrer une infinité d'énoncés en un nombre fini d'étapes. Il est indissociable de l'étude des **suites définies par récurrence**, omniprésentes en olympiade : suites linéaires (dont la suite de Fibonacci), suites non linéaires dont on cherche la limite, une forme close ou une propriété arithmétique.

4.1 Les formes de récurrence

Toutes les formes de récurrence reposent sur une seule propriété de $\mathbb{N}$.

Axiome 4.1.1 (Bon ordre)

Toute partie **non vide** de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

Théorème 4.1.2 (Formes de la récurrence)

Soit $P(n)$ une propriété portant sur $n \in \mathbb{N}$.

1. **Simple** : si $P(0)$ est vraie et si $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout n, alors $P(n)$ est vraie pour tout n.
2. **Forte** : si, pour tout n, la vérité de $P(0), \dots, P(n-1)$ entraîne celle de $P(n)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout n.
3. **Double** : si $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies et si $P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2)$ pour tout n, alors $P(n)$ est vraie pour tout n.
4. **Descente infinie** : s'il n'existe aucun entier n tel que $P(n)$ soit fausse et $P(k)$ vraie pour tout $k < n$, alors $P(n)$ est vraie pour tout n.
5. **Récurrence de Cauchy** (« avant-arrière ») : si $P(1)$ est vraie, si $P(n) \Rightarrow P(2n)$ et si $P(n) \Rightarrow P(n-1)$ pour tout $n \geq 2$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Démonstration. Dans chaque cas, on raisonne par l'absurde : supposons que l'ensemble E des n pour lesquels $P(n)$ est fausse soit non vide, et soit n_0 son plus petit élément (axiome 4.1.1). Par minimalité, $P(k)$ est vraie pour tout $k < n_0$.

1. $n_0 \neq 0$ car $P(0)$ est vraie ; donc $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ et $P(n_0 - 1)$ est vraie, d'où $P(n_0)$: contradiction.
2. Les $P(k)$, $k < n_0$, sont vraies, donc $P(n_0)$ l'est : contradiction.
3. $n_0 \geq 2$; $P(n_0 - 2)$ et $P(n_0 - 1)$ sont vraies, donc $P(n_0)$ aussi : contradiction.
4. C'est exactement l'énoncé de l'hypothèse : un tel n_0 ne peut exister.
5. Par récurrence simple, $P\left(2^k\right)$ est vraie pour tout k (car $P(n) \Rightarrow P(2n)$). Soit $n \geq 1$; choisissons k avec $2^k \geq n$. En appliquant $2^k - n$ fois l'implication $P(m) \Rightarrow P(m-1)$ à partir de $P\left(2^k\right)$, on obtient $P(n)$. ■

La récurrence de Cauchy est la preuve classique de l'inégalité arithmético-géométrique (chapitre 11), et la descente infinie celle de nombreuses impossibilités en arithmétique (irrationalité de $\sqrt{2}$, équations diophantiennes).

Deux erreurs fréquentes en compétition.

- Oublier d'initialiser, ou initialiser au mauvais rang.
- Pour une récurrence double, ne vérifier qu'un seul cas de base.

Une rédaction correcte énonce toujours explicitement l'**hypothèse de récurrence** et le **rang** auquel elle est supposée vraie.

Exemple 4.1.3. Montrer que la suite $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ vérifie $u_n < 2$ pour tout $n \geq 1$.

$u_1 = 1 < 2$. Si $u_n < 2$, alors $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} < \sqrt{3} < 2$. Conclusion par récurrence.

Exemple 4.1.4 (Renforcer l'hypothèse). Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$ pour tout $n \geq 1$.

Une récurrence directe échoue : de $S_n < 2$ on ne peut rien déduire sur $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2}$. On démontre plutôt l'énoncé **plus fort** $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$. Il est vrai pour $n = 1$. S'il est vrai au rang n, alors $S_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$, car $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{(n+1)^2}$. Il est souvent **plus facile de démontrer plus**.

4.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Théorème 4.2.1 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2)

Soient a, b des nombres complexes avec $b \neq 0$, et (u_n) une suite telle que $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout $n \geq 0$. Soient r_1, r_2 les racines (dans $\mathbb{C}$) du **polynôme caractéristique** $X^2 - aX - b$.

- Si $r_1 \neq r_2$: il existe des constantes α, β telles que $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ pour tout n.
- Si $r_1 = r_2 = r$: il existe des constantes α, β telles que $u_n = (\alpha + \beta n) r^n$ pour tout n.

Les constantes α, β sont déterminées par u_0 et u_1.

Démonstration. *Unicité.* Deux suites vérifiant la même relation de récurrence et ayant les mêmes deux premiers termes sont égales (récurrence double).

Cas $r_1 \neq r_2$. La suite (r_1^n) vérifie la relation : $r_1^{n+2} - ar_1^{n+1} - br_1^n = r_1^n(r_1^2 - ar_1 - b) = 0$. De même pour (r_2^n), et donc pour toute combinaison $v_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$. Choisissons α, β tels que $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$, c'est-à-dire $\alpha + \beta = u_0$ et $\alpha r_1 + \beta r_2 = u_1$: ce système a une unique solution, car son déterminant $r_2 - r_1$ est non nul. Par unicité, $u = v$.

Cas $r_1 = r_2 = r$. Alors $X^2 - aX - b = (X - r)^2$, donc $a = 2r$ et $b = -r^2$; comme $b \neq 0$, $r \neq 0$. La suite (r^n) vérifie la relation comme ci-dessus, et la suite (nr^n) aussi :

$$(n+2)r^{n+2} - a(n+1)r^{n+1} - bnr^n = r^n[n(r^2 - ar - b) + r(2r - a)] = 0.$$

On choisit α, β avec $\alpha = u_0$ et $(\alpha + \beta)r = u_1$ (possible car $r \neq 0$), et on conclut par unicité. ■

Exemple 4.2.2. Suite de Fibonacci : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Le polynôme caractéristique $X^2 - X - 1$ a pour racines $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Les conditions $\alpha + \beta = 0$, $\alpha\varphi + \beta\overline{\varphi} = 1$ donnent $\alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, d'où la **formule de Binet**

$$F_n = \frac{\varphi^n - \overline{\varphi}^n}{\sqrt{5}}.$$

Proposition 4.2.3 (Identités de Fibonacci)

Pour tous entiers $m \geq 1$ et $n \geq 0$:

$$F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n \qquad \text{(identité d'addition)},$$
$$F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \quad (n \geq 1) \qquad \text{(identité de Cassini)},$$
$$\operatorname{pgcd}(F_m, F_n) = F_{\operatorname{pgcd}(m,n)}.$$

Démonstration. *Addition.* Par récurrence double sur n, à m fixé. Pour $n = 0$: $F_m = F_m \cdot 1 + F_{m-1} \cdot 0$; pour $n = 1$: $F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$. Si l'identité est vraie aux rangs n et $n+1$, en additionnant on obtient $F_{m+n+2} = F_m(F_{n+1} + F_{n+2}) + F_{m-1}(F_n + F_{n+1}) = F_m F_{n+3} + F_{m-1} F_{n+2}$.

Cassini. Voir l'exemple 4.2.4.

pgcd. Deux termes consécutifs sont premiers entre eux : par Cassini, un diviseur commun de F_n et F_{n+1} divise ± 1. Par l'identité d'addition, $\operatorname{pgcd}(F_{m+n}, F_m) = \operatorname{pgcd}(F_{m-1} F_n, F_m) = \operatorname{pgcd}(F_n, F_m)$, la dernière égalité par le lemme de Gauss puisque F_{m-1} est premier avec F_m. La quantité $\operatorname{pgcd}(F_a, F_b)$ est donc invariante quand on remplace (a, b) par $(a - b, b)$: en suivant l'algorithme d'Euclide par soustractions, on aboutit à $\operatorname{pgcd}(F_d, F_0) = F_d$ avec $d = \operatorname{pgcd}(m, n)$. ■

Exemple 4.2.4 (Démonstration de l'identité de Cassini). Posons $D_n = F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2$. Alors

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1} + F_n) F_n - F_{n+1}^2 \\ &= -F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) + F_n^2 = -(F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2) = -D_n. \end{aligned}$$

Comme $D_1 = F_2 F_0 - F_1^2 = -1$, on obtient $D_n = (-1)^n$.

Proposition 4.2.5 (Suites arithmético-géométriques)

Si $u_{n+1} = a u_n + b$ avec $a \neq 1$, et si $\ell = \frac{b}{1-a}$ est le point fixe de $x \mapsto ax + b$, alors $u_n = \ell + a^n (u_0 - \ell)$.

Démonstration. $u_{n+1} - \ell = a u_n + b - (a\ell + b) = a(u_n - \ell)$: la suite $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a. ■

4.3 Suites non linéaires : les quatre questions

Proposition 4.3.1 (Outils pour les suites u(n+1) = f(u(n)))

Soit f définie sur un intervalle I **stable** ($f(I) \subset I$), $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Si (u_n) converge vers $\ell \in I$ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.
2. Si f est croissante, la suite (u_n) est monotone : croissante si $u_1 \geq u_0$, décroissante sinon.
3. Si f est décroissante, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires.

Démonstration.

1. $u_{n+1} \to \ell$, et par continuité $f(u_n) \to f(\ell)$; par unicité de la limite, $f(\ell) = \ell$.
2. Si $u_1 \geq u_0$ et si $u_{n+1} \geq u_n$, alors $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1}$: récurrence.
3. $f \circ f$ est croissante et $u_{n+2} = (f \circ f)(u_n)$: on applique 2 aux deux suites extraites. Si (u_{2n}) croît, alors $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ et, f étant décroissante, $u_{2n+1} \geq u_{2n+3}$. ■

Méthode — Analyser une suite définie par récurrence

1. **Points fixes** : résoudre $f(x) = x$. Ce sont les seules limites possibles (proposition 4.3.1).
2. **Monotonie** : étudier le signe de $f(x) - x$ et le sens de variation de f.
3. **Bornes** : chercher un intervalle stable contenant u_0 ; une suite monotone et bornée converge.
4. **Forme close** : chercher un changement de variable qui linéarise ($v_n = u_n - \ell$, $v_n = 1/u_n$, $u_n = t^{2^n} + t^{-2^n}$, $u_n = 2\cos\theta_n$…).

Exemple 4.3.2 (Une forme close par x + 1/x). Soit $u_0 = \frac{5}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2$. Donner une forme close.

Écrivons $u_0 = t + \frac{1}{t}$ avec $t = 2$. Si $u_n = t^{2^n} + t^{-2^n}$, alors $u_n^2 - 2 = t^{2^{n+1}} + 2 + t^{-2^{n+1}} - 2 = t^{2^{n+1}} + t^{-2^{n+1}}$. Par récurrence, $u_n = 2^{2^n} + 2^{-2^n}$.

Le changement de variable $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ est le réflexe devant les récurrences $u_{n+1} = u_n^2 - 2$. Si $|u_0| \leq 2$, on pose plutôt $u_0 = 2\cos\theta$, et alors $u_n = 2\cos(2^n\theta)$.

Exemple 4.3.3. Soit $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$. Montrer que $a_{100} > 14$.

On ne cherche pas a_n : on regarde a_n^2. En élevant au carré, $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} > a_n^2 + 2$. Donc, par récurrence, $a_n^2 > a_1^2 + 2(n-1) = 2n - 1$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi $a_{100}^2 > 199 > 196$, donc $a_{100} > 14$.

À retenir

Quand u_{n+1} contient $1/u_n$, considérer u_n^2 : les termes gênants deviennent négligeables et l'on obtient un encadrement.

Exemple 4.3.4. Soit $u_{n+1} = 3u_n - 2$, $u_0 = 2$. Forme close ?

Le point fixe est $\ell = 1$. Par la proposition 4.2.5, $u_n - 1 = 3^n(u_0 - 1) = 3^n$, donc $u_n = 3^n + 1$.

Exemple 4.3.5. Soit $u_{n+1} = \frac{1}{1-u_n}$ (avec $u_0 \notin \{0,1\}$). Montrer que la suite est périodique de période 3.

Par calcul direct : $u_{n+1} = \frac{1}{1-u_n}$, $u_{n+2} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-u_n}} = \frac{u_n - 1}{u_n}$, puis $u_{n+3} = \frac{1}{1-\frac{u_n-1}{u_n}} = u_n$. La transformation $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est d'ordre 3 : l'appliquer trois fois redonne l'identité.

Exemple 4.3.6 (Une suite croissante et majorée). Soit $u_0 = \sqrt{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Solution. L'intervalle $I = [0,2]$ est stable par $f(x) = \sqrt{2+x}$ (si $0 \leq x \leq 2$, alors $0 \leq f(x) \leq 2$), et f est croissante. Comme $u_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > u_0$, la suite est croissante (proposition 4.3.1) et majorée par 2 : elle converge vers $\ell \in [0,2]$, qui vérifie $\ell = \sqrt{2+\ell}$, soit $\ell = 2$. (Avec $u_n = 2\cos\theta_n$, on trouve même $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$.)

À retenir — les réflexes du chapitre 4

- Démontrer **plus** pour que la récurrence passe (exemple 4.1.4).

- Une récurrence linéaire se résout par le polynôme caractéristique.
- Une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$: points fixes, intervalle stable, monotonie de f.
- Des récurrences « magiques » cachent un changement de variable : $x + \frac{1}{x}$, $2\cos\theta$, $\tan\theta$, $\frac{1}{u_n}$.

4.4 Exercices

Exercice 4.1 ★. Montrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Exercice 4.2 ★. Soit $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$. Donner u_n.

Exercice 4.3 ★. Résoudre $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ avec $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

Exercice 4.4 ★★. Résoudre $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ avec $u_0 = 1$, $u_1 = 4$.

Exercice 4.5 ★★. Soit $u_0 = 2$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. Donner u_n et sa limite.

Exercice 4.6 ★★. Montrer que $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_n$ pour $m \geq 1$, $n \geq 0$.

Exercice 4.7 ★★. Soit $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 4.8 ★★. Soit $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ avec $a_0 = 3$. Montrer que a_n est entier pour tout n et que $\operatorname{pgcd}(a_m, a_n) = 1$ pour $m \neq n$. (Variante : montrer que $a_n = t^{2^n} + t^{-2^n}$ pour un t à préciser.)

Exercice 4.9 ★★. Soit (v_n) définie par $v_0 = v_1 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{v_n^2+1}{v_{n-1}}$. Calculer les premiers termes, deviner une récurrence linéaire, et en déduire que tous les v_n sont entiers.

Exercice 4.10 ★★★ (classique). Soit $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2+2}{u_{n-1}}$. Montrer que (u_n) vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients entiers.

Exercice 4.11 ★★★. Soit $x_1 > 0$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$. Montrer que (x_n) converge vers $\sqrt{2}$ et que $x_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{(x_n-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$ pour tout $n \geq 2$.

4.5 Solutions

Solution de l'exercice 4.1. Vrai pour $n = 1$ ($1 = 1$). Si $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$, alors $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Solution de l'exercice 4.2. Point fixe : $\ell = 2\ell + 3$ donne $\ell = -3$. Avec $v_n = u_n + 3$: $v_{n+1} = 2v_n$, $v_0 = 4$, donc $v_n = 4 \cdot 2^n$ et $u_n = 2^{n+2} - 3$.

Solution de l'exercice 4.3. $X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$, donc $u_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$. De $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$: $\alpha + \beta = 0$, $2\alpha + 3\beta = 1$, donc $\beta = 1$, $\alpha = -1$: $u_n = 3^n - 2^n$.

Solution de l'exercice 4.4. $X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$, racine double 2 : $u_n = (\alpha + \beta n)2^n$. De $u_0 = 1$: $\alpha = 1$; de $u_1 = 4$: $2(1+\beta) = 4$, $\beta = 1$. Donc $u_n = (n+1)2^n$.

Solution de l'exercice 4.5. Tous les u_n sont > 0. Posons $v_n = \frac{1}{u_n}$: alors $v_{n+1} = \frac{1+u_n}{u_n} = v_n + 1$, donc $v_n = v_0 + n = \frac{1}{2} + n$ et $u_n = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} = \frac{2}{2n+1} \to 0$.

Solution de l'exercice 4.6. Récurrence double sur n (à m fixé). Pour $n = 0$: $F_m F_1 + F_{m-1} F_0 = F_m$. Pour $n = 1$: $F_m F_2 + F_{m-1} F_1 = F_m + F_{m-1} = F_{m+1}$. Si la formule vaut pour n et $n+1$, alors en additionnant les deux relations,

$$F_{m+n} + F_{m+n+1} = F_m(F_{n+1} + F_{n+2}) + F_{m-1}(F_n + F_{n+1}),$$

c'est-à-dire $F_{m+n+2} = F_m F_{n+3} + F_{m-1} F_{n+2}$, ce qui est la formule au rang $n+2$.

Solution de l'exercice 4.7. L'intervalle $[1,2]$ est stable : si $u \in [1,2]$, alors $\sqrt{u+2} \in \left[\sqrt{3}, 2\right] \subset [1,2]$. La fonction $f(x) = \sqrt{x+2}$ est croissante et $f(x) > x$ sur $[1,2)$ (car $x + 2 > x^2 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) < 0$). Donc (u_n) est croissante et majorée par 2 : elle converge vers l'unique point fixe dans $[1,2]$, qui vérifie $\ell^2 = \ell + 2$, soit $\ell = 2$.

Solution de l'exercice 4.8. Avec $a_0 = 3 = t + \frac{1}{t}$ où $t = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, on a $a_n = t^{2^n} + t^{-2^n}$ (même récurrence que dans l'exemple 4.3.2). Le caractère entier vient directement de la récurrence $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ et de $a_0 = 3 \in \mathbb{Z}$. Pour la coprimalité, on note $a_{n+1} \equiv -2 \pmod{a_n}$, puis $a_{n+2} \equiv 2 \pmod{a_n}$ et $a_{n+k} \equiv 2 \pmod{a_n}$ pour $k \geq 2$; comme les a_n sont impairs, $\operatorname{pgcd}(a_n, a_{n+k})$ divise $\operatorname{pgcd}(a_n, 2) = 1$. (Le cas $k = 1$ se traite de même : $\operatorname{pgcd}(a_n, a_{n+1}) \mid 2$, donc il vaut 1.)

Solution de l'exercice 4.9. Les premiers termes sont $v_0 = 1$, $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 5$, $v_4 = 13$, $v_5 = 34$, $v_6 = 89$: on reconnaît les termes de Fibonacci d'indice impair, et l'on devine $v_{n+1} = 3v_n - v_{n-1}$ (en effet $3 \cdot 2 - 1 = 5$, $3 \cdot 5 - 2 = 13$, $3 \cdot 13 - 5 = 34$).

Démonstration. Des deux relations $v_{n+1} v_{n-1} = v_n^2 + 1$ et $v_n v_{n-2} = v_{n-1}^2 + 1$, on tire par soustraction

$$v_{n+1} v_{n-1} - v_n v_{n-2} = v_n^2 - v_{n-1}^2 \Longrightarrow v_{n-1}(v_{n+1} + v_{n-1}) = v_n(v_n + v_{n-2}),$$

donc $\frac{v_{n+1}+v_{n-1}}{v_n} = \frac{v_n+v_{n-2}}{v_{n-1}}$. Cette quantité ne dépend donc pas de n : elle vaut $\frac{v_2+v_0}{v_1} = 3$. D'où $v_{n+1} = 3v_n - v_{n-1}$, récurrence à coefficients entiers, et tous les v_n sont entiers par récurrence double.

Solution de l'exercice 4.10. Avec $u_0 = u_1 = 1$: $u_2 = \frac{1+2}{1} = 3$, $u_3 = \frac{9+2}{1} = 11$, $u_4 = \frac{121+2}{3} = 41$, $u_5 = \frac{1681+2}{11} = 153$. On observe $u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}$: en effet $4 \cdot 3 - 1 = 11$, $4 \cdot 11 - 3 = 41$, $4 \cdot 41 - 11 = 153$.

Démonstration. De $u_{n+1} u_{n-1} = u_n^2 + 2$ et $u_n u_{n-2} = u_{n-1}^2 + 2$, on soustrait :

$$u_{n+1} u_{n-1} - u_n u_{n-2} = u_n^2 - u_{n-1}^2 \Longrightarrow u_{n-1}(u_{n+1} + u_{n-1}) = u_n(u_n + u_{n-2}).$$

Donc $\frac{u_{n+1}+u_{n-1}}{u_n} = \frac{u_n+u_{n-2}}{u_{n-1}}$: cette quantité est indépendante de n, égale à sa valeur en $n = 1$, soit $\frac{u_2+u_0}{u_1} = 4$. D'où $u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}$, récurrence linéaire à coefficients entiers, ce qui prouve au passage que tous les u_n sont entiers.

> **Remarque.**
> Cette technique — transformer une récurrence non linéaire en récurrence linéaire en combinant deux instances consécutives — est l'une des plus rentables de tout le chapitre. Elle réapparaît dans de nombreux problèmes d'IMO (dont le fameux IMO 1988, problème 6, sur $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$, via la descente de Vieta).

Solution de l'exercice 4.11. Tous les x_n sont > 0. Par l'inégalité arithmético-géométrique (chapitre 11), $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 1$, donc $x_n \geq \sqrt{2}$ dès $n \geq 2$. Ensuite, pour $n \geq 2$,

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{x_n^2 - 2\sqrt{2}\,x_n + 2}{2x_n} = \frac{\left(x_n - \sqrt{2}\right)^2}{2x_n} \leq \frac{\left(x_n - \sqrt{2}\right)^2}{2\sqrt{2}},$$

car $x_n \geq \sqrt{2}$. En particulier $x_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x_n - \sqrt{2}\right)^2$: la convergence est quadratique, c'est la méthode de Newton appliquée à $x^2 - 2$. La suite est décroissante à partir du rang 2 (car $x_{n+1} - x_n = \frac{2 - x_n^2}{2x_n} \leq 0$) et minorée par $\sqrt{2}$, donc elle converge, et sa limite ℓ vérifie $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$, c'est-à-dire $\ell = \sqrt{2}$.

PARTIE II — Polynômes et nombres complexes

CHAPITRE 5

5 Polynômes : les fondations

Les polynômes sont à l'algèbre ce que les entiers sont à l'arithmétique : on les additionne, on les multiplie, on les divise avec reste, et leurs racines jouent le rôle des diviseurs. Ce chapitre établit les résultats fondamentaux — division euclidienne, lien entre racines et facteurs, nombre de racines, théorème de d'Alembert–Gauss — puis les met en œuvre sur les **équations fonctionnelles polynomiales**, un thème classique d'olympiade.

5.1 Vocabulaire et division euclidienne

Définition 5.1.1 (Polynôme, degré, coefficient dominant)

Un polynôme à coefficients dans K ($K = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une expression $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ avec $a_i \in K$; l'ensemble de ces polynômes est noté $K[X]$. Si $a_n \neq 0$, $n = \deg P$ est le **degré** et a_n le **coefficient dominant**. Par convention $\deg 0 = -\infty$. Le polynôme est **unitaire** si $a_n = 1$.

Proposition 5.1.2 (Degré d'une somme, d'un produit)

Pour $P, Q \in K[X]$: $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ et $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$. En particulier, un produit de polynômes non nuls est non nul.

Démonstration. Les termes de $P+Q$ sont de degré au plus $\max(\deg P, \deg Q)$. Si P et Q ont pour termes dominants $a_n X^n$ et $b_m X^m$, le terme de plus haut degré de PQ est $a_n b_m X^{n+m}$, et $a_n b_m \neq 0$ car K ne contient pas de diviseurs de zéro. ■

Théorème 5.1.3 (Division euclidienne)

Soient $A, B \in K[X]$ avec $B \neq 0$, K étant $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $K[X]$ tel que

$$A = BQ + R, \qquad \deg R < \deg B.$$

Si $A, B \in \mathbb{Z}[X]$ et si B est **unitaire**, alors Q et R sont à coefficients entiers.

Démonstration. *Existence*, par récurrence forte sur $\deg A$. Si $\deg A < \deg B$, on prend $Q = 0$ et $R = A$. Sinon, notons aX^n et bX^m les termes dominants de A et B ($n \geq m$). Le polynôme $A_1 = A - \frac{a}{b} X^{n-m} B$ a un degré strictement inférieur à n (les termes de degré n se compensent). Par hypothèse de récurrence, $A_1 = BQ_1 + R$ avec $\deg R < \deg B$, d'où $A = B\left(Q_1 + \frac{a}{b} X^{n-m}\right) + R$. Si $b = 1$ et si les coefficients sont entiers, toutes les étapes restent dans $\mathbb{Z}[X]$.

Unicité. Si $BQ + R = BQ' + R'$, alors $B(Q - Q') = R' - R$. Si $Q \neq Q'$, le membre de gauche est de degré $\geq \deg B$, tandis que celui de droite est de degré $< \deg B$: contradiction. Donc $Q = Q'$, puis $R = R'$. ■

Théorème 5.1.4 (Racine et factorisation)

Soit $P \in K[X]$ et $a \in K$. Alors $P(X) - P(a)$ est divisible par $X - a$. En particulier, $P(a) = 0 \Leftrightarrow (X - a) \mid P(X)$.

Démonstration. Première preuve : la division euclidienne de P par $X - a$ s'écrit $P = (X - a)Q + R$ avec $\deg R < 1$, donc R est une constante ; en évaluant en a, on trouve $R = P(a)$. Seconde preuve, directe : $P(X) - P(a) = \sum_k a_k \left(X^k - a^k\right)$, et chaque $X^k - a^k$ est divisible par $X - a$ (théorème 1.1.2). Cette seconde preuve montre que, si $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $a \in \mathbb{Z}$, le quotient est à coefficients entiers. ■

À retenir

Conséquence arithmétique majeure : si $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $a, b \in \mathbb{Z}$, alors $(a - b) \mid P(a) - P(b)$. C'est l'outil numéro un des problèmes mêlant polynômes et divisibilité (chapitre 8).

Théorème 5.1.5 (Nombre de racines)

Un polynôme non nul de degré n a au plus n racines dans K. En conséquence :

1. si deux polynômes de degré $\leq n$ coïncident en $n + 1$ points distincts, ils sont égaux ;
2. un polynôme qui s'annule en une infinité de points est nul.

Démonstration. Par récurrence sur n. Un polynôme de degré 0 est une constante non nulle, sans racine. Soit P de degré $n \geq 1$. S'il n'a pas de racine, c'est fini. Sinon, soit a une racine : $P = (X - a)Q$ avec $\deg Q = n - 1$ (théorème 5.1.4 et proposition 5.1.2). Si $b \neq a$ est une autre racine, $0 = P(b) = (b - a)Q(b)$, donc $Q(b) = 0$. Les racines de P sont donc a et les racines de Q, qui sont au plus $n - 1$ par hypothèse de récurrence : au total, au plus n.

Pour 1, la différence des deux polynômes est de degré $\leq n$ et a $n + 1$ racines : elle est nulle. Le point 2 en découle. ■

Méthode 5.1.6 — Le principe d'identification en pratique

Pour établir une identité polynomiale $P = Q$, il suffit de la vérifier en $\max(\deg P, \deg Q) + 1$ valeurs distinctes bien choisies (souvent $0, 1, -1, 2$, ..., ou les racines d'un autre polynôme). C'est presque toujours plus rapide qu'un développement.

Exemple 5.1.7. Montrer que, pour tous a, b, c distincts, $\frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(X-c)(X-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)} = 1$.

Solution. Le membre de gauche est un polynôme de degré ≤ 2 ; il vaut 1 en $X = a$ (seul le premier terme est non nul, et il vaut 1), en $X = b$ et en $X = c$. Il coïncide donc avec le polynôme constant 1 en trois points distincts : il lui est égal (théorème 5.1.5). C'est un cas particulier de l'interpolation de Lagrange (chapitre 7).

Définition 5.1.8 (Multiplicité d'une racine)

a est racine de **multiplicité** $m \geq 1$ de $P \neq 0$ si $(X - a)^m \mid P$ et $(X - a)^{m+1} \nmid P$, c'est-à-dire si $P = (X - a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$. Une racine de multiplicité 1 est dite **simple**.

Proposition 5.1.9 (Multiplicité et dérivées)

Soit $P \in K[X]$ non nul et $a \in K$. Alors a est racine de multiplicité au moins 2 de P si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$. Plus généralement (pour $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), a est de multiplicité m si et seulement si $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Démonstration. Écrivons $P = (X-a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$. Alors $P' = (X-a)^{m-1}(mQ + (X-a)Q')$, et $mQ(a) + 0 \neq 0$: donc a est racine de P' de multiplicité exactement $m-1$ (avec la convention qu'une « racine de multiplicité 0 » n'est pas racine). En itérant, a est racine de $P^{(j)}$ de multiplicité $m-j$ pour $j \leq m$; en particulier $P^{(j)}(a) = 0$ pour $j < m$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$. La réciproque en découle, car la multiplicité est déterminée par ces conditions. ■

5.2 Le théorème fondamental de l'algèbre

Théorème 5.2.1 (d'Alembert–Gauss)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine complexe. Par récurrence, tout $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ et de coefficient dominant a_n s'écrit

$$P(X) = a_n \prod_{i=1}^{n} (X - z_i),$$

les z_i étant ses racines, chacune répétée autant de fois que sa multiplicité.

Démonstration. Nous admettons un seul résultat d'analyse : *une fonction continue sur un disque fermé du plan atteint son minimum* (théorème des bornes atteintes).

Étape 1 : $|P|$ atteint un minimum sur $\mathbb{C}$. Pour $|z|$ grand, $|P(z)| \geq |a_n||z|^n - \sum_{k<n} |a_k|\,|z|^k \to +\infty$. Il existe donc $R > 0$ tel que $|P(z)| > |P(0)|$ pour $|z| > R$. Sur le disque $|z| \leq R$, la fonction continue $|P|$ atteint un minimum en un point z_0, et $|P(z_0)| \leq |P(0)|$; ce minimum est donc aussi le minimum de $|P|$ sur $\mathbb{C}$.

Étape 2 : lemme de d'Alembert. Supposons $P(z_0) \neq 0$; montrons que $|P|$ prend une valeur plus petite, ce qui sera contradictoire. Quitte à remplacer $P(X)$ par $\frac{P(z_0+X)}{P(z_0)}$, on peut supposer $z_0 = 0$ et $P(0) = 1$: $P(X) = 1 + bX^k + X^{k+1}S(X)$ avec $b \neq 0$ et $k \geq 1$. Soit w une racine k-ième de $-\frac{1}{b}$ (elle existe, chapitre 9), de sorte que $bw^k = -1$. Pour $t \in]0,1[$ réel :

$$P(tw) = 1 - t^k + t^{k+1}w^{k+1}S(tw), \qquad \text{donc} \qquad |P(tw)| \leq 1 - t^k + t^{k+1}C,$$

où C majore $\left|w^{k+1}S(tw)\right|$ pour $t \in [0,1]$. Pour $t < \frac{1}{C}$ (et $t < 1$), on obtient $|P(tw)| < 1 = |P(0)|$: contradiction avec la minimalité.

Étape 3 : factorisation. Une racine z_1 donne $P = (X - z_1)P_1$ avec $\deg P_1 = n - 1$; on applique l'hypothèse de récurrence à P_1. ■

Théorème 5.2.2 (Polynômes à coefficients réels)

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si $z \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors $\overline{z}$ est racine de P, de même multiplicité. Par conséquent,

$$P(X) = a_n \prod_i (X - r_i) \prod_j \left(X^2 + b_j X + c_j\right), \qquad r_i, b_j, c_j \in \mathbb{R},\ b_j^2 - 4c_j < 0.$$

En particulier : tout polynôme réel de degré impair a une racine réelle, et les polynômes réels irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont exactement ceux de degré 1 et ceux de degré 2 à discriminant négatif.

Démonstration. Les coefficients étant réels, $\overline{P(z)} = \sum a_k \overline{z}^k = P(\overline{z})$; donc $P(z) = 0 \Rightarrow P(\overline{z}) = 0$. De même pour les dérivées successives, qui sont aussi à coefficients réels : par la proposition 5.1.9, z et $\overline{z}$ ont la même multiplicité. Dans la factorisation du théorème 5.2.1, on regroupe chaque facteur $(X - z)$, $z \notin \mathbb{R}$, avec $(X - \overline{z})$: $(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(z)X + |z|^2$, trinôme réel de discriminant $4\mathrm{Re}(z)^2 - 4|z|^2 = -4\mathrm{Im}(z)^2 < 0$. Si $\deg P$ est impair, les racines non réelles étant en nombre pair, il reste au moins une racine réelle. ■

5.3 Équations fonctionnelles polynomiales

Méthode 5.3.1 — Trouver tous les polynômes vérifiant une relation

Trois armes, à essayer dans cet ordre :

1. **Comparer les degrés et les coefficients dominants** : cela borne généralement $\deg P$ ou détermine le coefficient dominant.
2. **Exploiter les racines** : si $P(z) = 0$ entraîne $P\big(g(z)\big) = 0$, on fabrique une infinité de racines à partir d'une seule — sauf si l'orbite de z sous g est finie. Comparer les **modules** permet de conclure.
3. **Réduire** : poser $P = X^k Q$ (avec $Q(0) \neq 0$) ou $P = c + Q$, puis raisonner par récurrence sur le degré.

Exemple 5.3.2. *Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)^2$.*

Le coefficient dominant a vérifie $a = a^2$, donc $a = 1$ si $P \neq 0$. Soit z une racine : alors $P(z^2) = P(z)^2 = 0$, donc $z^2, z^4, z^8, \ldots$ sont racines. Si $|z| \notin \{0,1\}$, ces nombres sont deux à deux distincts (leurs modules le sont) et P aurait une infinité de racines : donc toute racine est de module 0 ou 1.

Écrivons $P = X^k Q$ avec $Q(0) \neq 0$. La relation devient $X^{2k} Q(X^2) = X^{2k} Q(X)^2$, donc $Q(X^2) = Q(X)^2$, et en $X = 0$: $Q(0) = Q(0)^2$, d'où $Q(0) = 1$. Si Q n'était pas constant, on pourrait écrire $Q = 1 + bX^m + (\text{termes de degré} > m)$ avec $b \neq 0$ et $m \geq 1$; le coefficient de X^m vaut $2b$ dans $Q(X)^2$ et 0 dans $Q(X^2)$, dont les termes non constants sont de degré $\geq 2m > m$: contradiction. Donc $Q = 1$ et

$$P(X) = X^n \ (n \geq 0) \qquad \text{ou} \qquad P = 0.$$

Exemple 5.3.3. *Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X + 1) = P(X) + 2X + 1$.*

Posons $Q = P - X^2$. Alors $Q(X + 1) = P(X) + 2X + 1 - (X + 1)^2 = P(X) - X^2 = Q(X)$: Q est « 1-périodique ». Donc $Q - Q(0)$ s'annule en tous les entiers naturels (récurrence), donc est nul (théorème 5.1.5) : Q est constant et $P(X) = X^2 + c$. Réciproquement, ces polynômes conviennent.

Exemple 5.3.4. *Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X)P(X + 1) = P(X^2 + X + 1)$.*

Le coefficient dominant vérifie $a^2 = a$, donc $a = 1$ (pour $P \neq 0$). Si x_0 était une racine réelle, alors $x_0^2 + x_0 + 1$ serait aussi racine (prendre $X = x_0$), et $x_0^2 + x_0 + 1 - x_0 = x_0^2 + 1 > 0$ montre que cette nouvelle racine est strictement plus grande : en itérant, on obtiendrait une infinité de racines réelles. Donc P n'a pas de racine réelle.

Supposons P non constant et soit z une racine de module maximal (donc $z \neq 0$). En prenant $X = z$, puis $X = z - 1$, on voit que $u = z^2 + z + 1$ et $v = (z-1)^2 + (z-1) + 1 = z^2 - z + 1$ sont aussi racines, d'où $|u| \leq |z|$ et $|v| \leq |z|$. Or $u - v = 2z$, donc $2|z| \leq |u| + |v| \leq 2|z|$: il y a égalité partout. Ainsi $|u| = |v| = |z|$ et, par le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire (chapitre 9), $v = -u$. Alors $u + v = 2(z^2 + 1) = 0$, c'est-à-dire $z = \pm i$. Comme P est réel, $X^2 + 1$ divise P.

Or $X^2 + 1$ vérifie la relation :

$$(X^2 + 1)[(X+1)^2 + 1] = (X^2 + 1)(X^2 + 2X + 2) = (X^2 + X + 1)^2 + 1.$$

En écrivant $P = (X^2 + 1)Q$, on obtient après simplification $Q(X)Q(X+1) = Q(X^2 + X + 1)$, avec $\deg Q < \deg P$. Par récurrence sur le degré, $P = (X^2 + 1)^k$ ($k \geq 0$) ; réciproquement, ces polynômes conviennent, ainsi que $P = 0$.

À retenir — les réflexes du chapitre 5

- $P(a) = 0 \Leftrightarrow (X - a) \mid P$; et $(a - b) \mid P(a) - P(b)$ si $P \in \mathbb{Z}[X]$.
- Un polynôme de degré n a au plus n racines : pour prouver une identité, il suffit de la vérifier en $n + 1$ points.
- Une racine double annule aussi la dérivée.
- Pour une équation fonctionnelle polynomiale : degré et coefficient dominant, puis racines (module maximal), puis récurrence sur le degré.

5.4 Exercices

Exercice 5.1 ★. Effectuer la division euclidienne de $X^4 + 2X^3 - X + 5$ par $X^2 + 1$.

Exercice 5.2 ★. Déterminer a, b pour que $X^4 + aX^2 + b$ soit divisible par $X^2 - 3X + 2$.

Exercice 5.3 ★. Factoriser $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

Exercice 5.4 ★★. Soit P de degré 3 tel que $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 3$, $P(4) = 5$. Calculer $P(5)$.

Exercice 5.5 ★★. Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3k}$ pour tous $n, m, k \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.6 ★★. Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(2X) = 2P(X)$.

Exercice 5.7 ★★. Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X)^2 = P(X^2) + 2X^2$.

Exercice 5.8 ★★. Soit P de degré n tel que $P(k) = \frac{1}{k}$ pour $k = 1, \ldots, n+1$. Calculer $P(n+2)$.

Exercice 5.9 ★★★. Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X)P(X+1) = P(X^2 + X + 1)$.

Exercice 5.10 ★★★. Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ non nuls tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Exercice 5.11 ★★★. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ avec $P = A^2 + B^2$.

5.5 Solutions

Solution de l'exercice 5.1. $X^4 + 2X^3 - X + 5 = (X^2 + 1)(X^2 + 2X - 1) + (-3X + 6)$.

Solution de l'exercice 5.2. $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$: il faut $P(1) = P(2) = 0$, c'est-à-dire $1 + a + b = 0$ et $16 + 4a + b = 0$. On obtient $a = -5$, $b = 4$ (et $X^4 - 5X^2 + 4 = (X^2 - 1)(X^2 - 4)$).

Solution de l'exercice 5.3. $P(1)=0$, donc $P=(X-1)(X^2-5X+6)=(X-1)(X-2)(X-3)$.

Solution de l'exercice 5.4. Posons $Q=P-X$, de degré 3, nul en 1,2,3 : $Q=c(X-1)(X-2)(X-3)$. De $Q(4)=P(4)-4=1$ on tire $6c=1$, $c=\frac{1}{6}$. Alors $P(5)=5+\frac{1}{6}\cdot 4\cdot 3\cdot 2=9$.

Solution de l'exercice 5.5. Soit ω une racine primitive cubique de l'unité : $\omega^3=1$ et $\omega^2+\omega+1=0$. Alors $\omega^{3n+2}+\omega^{3m+1}+\omega^{3k}=\omega^2+\omega+1=0$, et de même en $\overline{\omega}$. Les deux racines de X^2+X+1 annulant le polynôme, celui-ci en est divisible.

Solution de l'exercice 5.6. Comparons les dominants : $2^n a=2a$, donc $n=1$ (ou $P=0$). Avec $P=aX+b$: $2aX+b=2aX+2b$ donne $b=0$. Donc $P(X)=aX$.

Solution de l'exercice 5.7. Le cas P constant est impossible, car $c^2=c+2X^2$ ne peut être une identité. Soit $n=\deg P\geq 1$ et a son coefficient dominant.

Si $n\geq 2$: le terme de degré $2n$ de $P(X)^2-P(X^2)$ est $(a^2-a)X^{2n}$; comme ce polynôme vaut $2X^2$, de degré $2<2n$, on a $a=1$. Écrivons $P=X^n+R$ avec $R=0$ ou $\deg R=k<n$. Alors

$$P(X)^2-P(X^2)=2X^nR(X)+R(X)^2-R(X^2).$$

Le cas $R=0$ donne $0=2X^2$, impossible. Sinon, si b est le dominant de R, le terme $2bX^{n+k}$ ne peut être compensé, car R^2 et $R(X^2)$ sont de degré $2k<n+k$; donc $n+k=2$, soit $n=2$ et $k=0$: $P=X^2+b$. Alors $(X^2+b)^2-(X^4+b)=2bX^2+b^2-b=2X^2$ impose $b=1$.

Si $n=1$: avec $P=aX+b$, on obtient $a^2X^2+2abX+b^2=(a+2)X^2+b$, donc $2ab=0$, $a^2=a+2$, $b^2=b$. Si $b=0$: $a\in\{2,-1\}$. Si $b=1$: $a=0$, incompatible avec $a^2=a+2$.

Solutions : $P(X)=2X$, $P(X)=-X$ et $P(X)=X^2+1$.

Solution de l'exercice 5.8. Posons $Q(X)=XP(X)-1$, de degré $n+1$, nul en $1,\dots,n+1$: donc $Q(X)=c(X-1)\cdots\big(X-(n+1)\big)$. En $X=0$: $-1=c(-1)^{n+1}(n+1)!$, donc $c=\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$. Puis en $X=n+2$: $(n+2)P(n+2)-1=c\,(n+1)!=(-1)^n$, d'où

$$P(n+2)=\frac{1+(-1)^n}{n+2}=\begin{cases}\dfrac{2}{n+2} & n \text{ pair},\\ 0 & n \text{ impair}.\end{cases}$$

Solution de l'exercice 5.9. Voir l'exemple 5.3.4 : les solutions sont $P=(X^2+1)^k$, $k\geq 0$ (et $P=0$).

Solution de l'exercice 5.10. Le dominant vérifie $a=a^2$, donc $a=1$. Si z est racine, alors en prenant $X=z$: $P(z^2)=P(z)P(z+1)=0$, donc z^2 est racine ; en prenant $X=z-1$: $P((z-1)^2)=P(z-1)P(z)=0$, donc $(z-1)^2$ est racine.

Si z est une racine non nulle, $z^2, z^4, z^8,\dots$ sont racines ; si de plus $|z|\neq 1$, leurs modules sont deux à deux distincts et P aurait une infinité de racines. Donc toute racine z vérifie $|z|\in\{0,1\}$. Appliqué à la racine $(z-1)^2$, cela donne aussi $|z-1|\in\{0,1\}$.

Les racines possibles sont donc $z=0$, $z=1$, ou les z tels que $|z|=|z-1|=1$, c'est-à-dire $z=e^{\pm i\pi/3}$. Dans ce dernier cas, $z^2=e^{\pm 2i\pi/3}$ serait racine, avec $|z^2-1|=\sqrt{3}\notin\{0,1\}$: impossible. Ainsi $P=X^m(X-1)^k$ avec $m,k\geq 0$.

Reportons dans la relation :

$$P(X^2)=X^{2m}(X-1)^k(X+1)^k,\qquad P(X)P(X+1)=X^{m+k}(X-1)^k(X+1)^m.$$

Par identification, $2m=m+k$ et $k=m$. Les solutions sont donc

$$P=(X^2-X)^m,\qquad m\geq 0,$$

ce qui inclut $P = 1$ pour $m = 0$; réciproquement, $(X^4 - X^2)^m = [(X^2 - X)\big((X+1)^2 - (X+1)\big)]^m$ se vérifie immédiatement.

Solution de l'exercice 5.11. Factorisons P sur $\mathbb{R}$. Comme $P \geq 0$, le dominant est > 0 et chaque racine réelle a une multiplicité paire (sinon P changerait de signe). Donc $P = c\,S^2 \prod_j \left(X^2 + b_j X + c_j\right)$ avec $b_j^2 - 4c_j < 0$ et $S \in \mathbb{R}[X]$. Chaque facteur quadratique s'écrit $\left(X + \frac{b_j}{2}\right)^2 + d_j^2$, où $d_j = \sqrt{c_j - \frac{b_j^2}{4}}$, donc est somme de deux carrés.

Or l'ensemble des sommes de deux carrés de polynômes est stable par produit grâce à l'identité de Lagrange

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC - BD)^2 + (AD + BC)^2,$$

et $cS^2 = \left(\sqrt{c}\,S\right)^2$. D'où $P = A^2 + B^2$.

CHAPITRE 6

6 Relations de Viète et identités de Newton

Les coefficients d'un polynôme sont des fonctions symétriques de ses racines : c'est le contenu des **formules de Viète**. Elles permettent de calculer une expression symétrique des racines **sans connaître les racines**, ce qui est l'une des situations les plus fréquentes en olympiade. Les **identités de Newton** complètent le dispositif en donnant les sommes de puissances des racines.

6.1 Les formules de Viète

Théorème 6.1.1 (Formules de Viète)

Soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0$ ($a_n \neq 0$) de racines $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{C}$, comptées avec multiplicité. Notons $e_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ la k-ième fonction symétrique élémentaire des racines. Alors

$$e_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

En particulier $x_1 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et $x_1 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Démonstration. Par le théorème 5.2.1, $P(X) = a_n(X - x_1)\cdots(X - x_n)$. Développons le produit : on choisit, dans chacun des n facteurs, soit X, soit $-x_i$. Pour obtenir un terme en X^{n-k}, on choisit $-x_i$ dans exactement k facteurs, d'indices $i_1 < \cdots < i_k$, ce qui donne $(-1)^k x_{i_1} \cdots x_{i_k} X^{n-k}$. En sommant sur tous les choix :

$$(X - x_1)\cdots(X - x_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, e_k X^{n-k} \qquad (e_0 = 1).$$

En multipliant par a_n et en identifiant le coefficient de X^{n-k} avec a_{n-k}, on obtient $a_n(-1)^k e_k = a_{n-k}$. ■

Exemple 6.1.2. *Pour $X^3 + pX^2 + qX + r$ de racines a, b, c : $a + b + c = -p$, $ab + bc + ca = q$, $abc = -r$.*

Réciproquement, trois nombres de somme s, de somme des produits deux à deux t et de produit u sont exactement les racines de $X^3 - sX^2 + tX - u$ (car $(X - a)(X - b)(X - c)$ se développe ainsi). C'est ce qui rend la méthode « p, q, r » du chapitre 1 effective.

Méthode 6.1.3 — Transformer les racines

Pour obtenir un polynôme dont les racines sont les $f(x_i)$, où les x_i sont les racines de P de degré n :

- $x_i + c$: le polynôme $P(X - c)$, car $P\big((x_i + c) - c\big) = 0$;
- λx_i ($\lambda \neq 0$) : le polynôme $P(X/\lambda)$;
- $1/x_i$ (si $P(0) \neq 0$) : le polynôme **réciproque** $X^n P(1/X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$;
- x_i^2 : $P(X)P(-X)$ est un polynôme en X^2, $Q(X^2)$; les racines de Q sont les x_i^2.

Exemple 6.1.4. *Soient a, b, c les racines de $X^3 - 2X^2 + 3X - 4$. Calculer $\sum \frac{1}{a}$, $\sum a^2$, $\sum \frac{1}{a^2}$.*

Ici $e_1 = 2$, $e_2 = 3$, $e_3 = 4$. Donc

$$\sum \frac{1}{a} = \frac{e_2}{e_3} = \frac{3}{4}, \qquad \sum a^2 = e_1^2 - 2e_2 = -2, \qquad \sum \frac{1}{a^2} = \left(\sum \frac{1}{a}\right)^2 - 2\sum \frac{1}{ab} = \frac{9}{16} - 2 \cdot \frac{e_1}{e_3} = \frac{9}{16} - 1 = -\frac{7}{16}.$$

(Les valeurs négatives ne sont pas absurdes : les racines ne sont pas toutes réelles.)

Exemple 6.1.5 (Une condition sur les racines). Déterminer m pour que l'une des racines de $X^3 - 7X + m$ soit le double d'une autre.

Solution. Notons les racines a, $2a$, b. Viète : $3a + b = 0$, $2a^2 + 3ab = -7$, $2a^2 b = -m$. De $b = -3a$: $2a^2 - 9a^2 = -7$, donc $a^2 = 1$, $a = \pm 1$. Si $a = 1$: $b = -3$ et $m = -2a^2 b = 6$. Si $a = -1$: $b = 3$ et $m = -6$. Vérification : $X^3 - 7X + 6 = (X-1)(X-2)(X+3)$ ✓. Donc $m = \pm 6$.

6.2 Les identités de Newton

Théorème 6.2.1 (Identités de Newton)

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres, e_k leurs fonctions symétriques élémentaires ($e_0 = 1$, et $e_k = 0$ pour $k > n$) et $p_k = x_1^k + \cdots + x_n^k$. Alors, pour tout $k \geq 1$:

$$p_k = e_1 p_{k-1} - e_2 p_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-2} e_{k-1} p_1 + (-1)^{k-1} k\, e_k.$$

En particulier, pour $k > n$: $p_k = e_1 p_{k-1} - e_2 p_{k-2} + \cdots + (-1)^{n-1} e_n p_{k-n}$.

Démonstration. *Cas $k \geq n$ (le plus utile).* Chaque x_i est racine de $X^n - e_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n e_n$ (formules de Viète), donc, en multipliant par x_i^{k-n} :

$$x_i^k = e_1 x_i^{k-1} - e_2 x_i^{k-2} + \cdots + (-1)^{n-1} e_n x_i^{k-n}.$$

En sommant sur i, on obtient $p_k = e_1 p_{k-1} - \cdots + (-1)^{n-1} e_n p_{k-n}$ avec $p_0 = n$. Pour $k = n$, le dernier terme $(-1)^{n-1} e_n p_0 = (-1)^{n-1} n\, e_n$ est bien celui de l'énoncé.

Cas général, par les séries formelles. Posons $E(t) = \prod_{i=1}^n (1 - x_i t) = \sum_{j=0}^n (-1)^j e_j t^j$. Dans l'anneau des séries formelles en t, chaque $1 - x_i t$ est inversible, d'inverse $\sum_{m \geq 0} x_i^m t^m$; en dérivant le produit,

$$-t\,E'(t) = \sum_{i=1}^n x_i\, t \prod_{j \neq i} (1 - x_j t) = E(t) \sum_{i=1}^n \frac{x_i t}{1 - x_i t} = E(t) \sum_{k \geq 1} p_k\, t^k.$$

Le coefficient de t^k vaut, à gauche, $-k(-1)^k e_k$, et à droite $\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j e_j p_{k-j}$. En isolant le terme $j = 0$, c'est-à-dire p_k, on obtient exactement la formule annoncée. ∎

Le point de vue le plus efficace.

La seconde forme dit que la suite (p_k) vérifie la **récurrence linéaire** dont le polynôme caractéristique est le polynôme unitaire de racines les x_i. C'est ce point de vue qui est le plus rapide en compétition ; les premières valeurs $p_1, \ldots, p_{n-1}$ se calculent par la première forme, ou directement : $p_1 = e_1$, $p_2 = e_1^2 - 2e_2$, $p_3 = e_1^3 - 3e_1 e_2 + 3e_3$.

Exemple 6.2.2. *Soient a, b, c les racines de $X^3 - X - 1$. Calculer $a^5 + b^5 + c^5$.*

$e_1 = 0$, $e_2 = -1$, $e_3 = 1$, donc la récurrence est $p_k = p_{k-2} + p_{k-3}$. Avec $p_0 = 3$, $p_1 = 0$, $p_2 = e_1^2 - 2e_2 = 2$:

$$p_3 = p_1 + p_0 = 3, \qquad p_4 = p_2 + p_1 = 2, \qquad p_5 = p_3 + p_2 = 5.$$

Donc $a^5 + b^5 + c^5 = 5$.

Méthode 6.2.3 — Stratégie « symétriques »

Devant un problème « racines d'un polynôme + expression symétrique » :

1. exprimer la quantité demandée à l'aide des p_k ou des e_k ;
2. lire les e_k sur les coefficients (Viète) ;
3. calculer les p_k par la récurrence de Newton — jamais en cherchant les racines.

Théorème 6.2.4 (Théorème fondamental des polynômes symétriques)

Tout polynôme symétrique en $x_1, \dots, x_n$ à coefficients dans K s'écrit de façon unique comme polynôme en $e_1, \dots, e_n$ à coefficients dans K. Si le polynôme symétrique est à coefficients entiers, le polynôme en $e_1, \dots, e_n$ est lui aussi à coefficients entiers.

Démonstration. C'est le théorème 1.2.2, démontré au chapitre 1. ■

Corollaire 6.2.5 (Intégralité)

Si $x_1, \dots, x_n$ sont les racines d'un polynôme **unitaire** à coefficients entiers, toute expression polynomiale symétrique à coefficients entiers en les x_i est un entier. En particulier, $p_k = x_1^k + \cdots + x_n^k \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \geq 0$.

Démonstration. Par Viète, les e_k sont des entiers (le coefficient dominant vaut 1). Par le théorème 6.2.4, l'expression est un polynôme à coefficients entiers en les e_k, donc un entier. Pour p_k, on peut aussi raisonner par récurrence avec les identités de Newton. ■

C'est pourquoi les problèmes « montrer que $\alpha^7 + \beta^7 + \gamma^7 \in \mathbb{Z}$ » se règlent sans calculer les racines.

Exemple 6.2.6 (Une partie entière). Montrer que $\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor$ est impair pour tout $n \geq 1$.

Solution. $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ sont les racines de $X^2 - 4X + 1$. Par le corollaire 6.2.5, $p_n = x_1^n + x_2^n$ est un entier ; il vérifie $p_n = 4p_{n-1} - p_{n-2}$ avec $p_0 = 2$, $p_1 = 4$, donc p_n est **pair** (récurrence). Comme $0 < x_2^n < 1$, on a $x_1^n = p_n - x_2^n \in]p_n - 1, p_n[$, donc $\lfloor x_1^n \rfloor = p_n - 1$, qui est impair.

À retenir — les réflexes du chapitre 6

- Racines d'un polynôme + expression symétrique : Viète, puis Newton, **sans calculer les racines**.
- Pour les inverses des racines : le polynôme réciproque.
- Une somme $\alpha^n + \beta^n$ de nombres conjugués est un entier : très utile pour les parties entières de puissances d'irrationnels.

6.3 Exercices

Exercice 6.1 ★. Soient a, b les racines de $X^2 - 5X + 3$. Calculer $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Exercice 6.2 ★. Soient a, b, c les racines de $X^3 - 3X^2 + 4X - 1$. Calculer $(a+b)(b+c)(c+a)$.

Exercice 6.3 ★★. Soient a, b, c les racines de $X^3 + X + 1$. Calculer $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}$.

Exercice 6.4 ★★. Trouver le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont les carrés des racines de $X^3 - 2X + 5$.

Exercice 6.5 ★★. Soient a, b, c les racines de $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$. Calculer $\sum \frac{1}{a+1}$ sans chercher les racines.

Exercice 6.6 ★★. Soit $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ dont les racines vérifient $\sum x_i = 0$ et $\sum x_i^2 = 8$. Montrer que $a = 0$ et $b = -4$.

Exercice 6.7 ★★★. Soient a, b, c réels avec $a + b + c = 0$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Calculer $a^4 + b^4 + c^4$.

Exercice 6.8 ★★★. Soit α une racine de $X^3 - 3X + 1$. Montrer que $\alpha^2 - 2$ est aussi racine. Puis calculer $\alpha^7 + \beta^7 + \gamma^7$ pour les trois racines α, β, γ.

Exercice 6.9 ★★★. Soit P unitaire de degré n à coefficients entiers, de racines $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que $\prod_{i<j} (x_i - x_j)^2 \in \mathbb{Z}$.

6.4 Solutions

Solution de l'exercice 6.1. $e_1 = 5$, $e_2 = 3$: $a^2 + b^2 = 25 - 6 = 19$, $a^3 + b^3 = e_1^3 - 3e_1e_2 = 125 - 45 = 80$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{e_1}{e_2} = \frac{5}{3}$.

Solution de l'exercice 6.2. $e_1 = 3$, $e_2 = 4$, $e_3 = 1$. Par l'identité (1.2) : $(a+b)(b+c)(c+a) = e_1e_2 - e_3 = 12 - 1 = 11$.

Solution de l'exercice 6.3. $e_1 = 0$, $e_2 = 1$, $e_3 = -1$. Les nombres bc, ca, ab ont pour fonctions symétriques élémentaires $E_1 = e_2 = 1$, $E_2 = e_1e_3 = 0$, $E_3 = e_3^2 = 1$. Donc $\sum (bc)^3 = E_1^3 - 3E_1E_2 + 3E_3 = 1 + 3 = 4$, et

$$\sum \frac{1}{a^3} = \frac{\sum (bc)^3}{(abc)^3} = \frac{4}{-1} = -4.$$

Solution de l'exercice 6.4. Avec $P(X) = X^3 - 2X + 5$: $-P(X)P(-X) = (X^3 - 2X)^2 - 25 = X^6 - 4X^4 + 4X^2 - 25$. En posant $Y = X^2$, le polynôme cherché est

$$Y^3 - 4Y^2 + 4Y - 25.$$

Vérification par Viète : $\sum a^2 = e_1^2 - 2e_2 = 4$, $\sum a^2b^2 = e_2^2 - 2e_1e_3 = 4$, $(abc)^2 = 25$.

Solution de l'exercice 6.5. Le polynôme de racines $a+1, b+1, c+1$ est $Q(X) = P(X-1)$: $Q(X) = (X-1)^3 - 6(X-1)^2 + 11(X-1) - 6 = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$. Donc $\sum \frac{1}{a+1} = \frac{E_2}{E_3} = \frac{26}{24} = \frac{13}{12}$.

Solution de l'exercice 6.6. $\sum x_i = -a = 0$ donne $a = 0$; puis $\sum x_i^2 = a^2 - 2b = -2b = 8$ donne $b = -4$.

Solution de l'exercice 6.7. $e_1 = 0$ et $p_2 = -2e_2 = 1$ donnent $e_2 = -\frac{1}{2}$. La récurrence de Newton donne $p_4 = -e_2p_2 + e_3p_1 = \frac{1}{2}$. Donc $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}$.

Solution de l'exercice 6.8. Si $\alpha^3 = 3\alpha - 1$, alors $\alpha^4 = 3\alpha^2 - \alpha$ et $\alpha^6 = (3\alpha - 1)^2 = 9\alpha^2 - 6\alpha + 1$. Donc

$$(\alpha^2 - 2)^3 - 3(\alpha^2 - 2) + 1 = \alpha^6 - 6\alpha^4 + 9\alpha^2 - 1 = (9\alpha^2 - 6\alpha + 1) - 6(3\alpha^2 - \alpha) + 9\alpha^2 - 1 = 0.$$

Ainsi $\alpha^2 - 2$ est racine. Pour les sommes de puissances : $e_1 = 0$, $e_2 = -3$, $e_3 = -1$, donc $p_k = 3p_{k-2} - p_{k-3}$ avec $p_0 = 3$, $p_1 = 0$, $p_2 = 6$:

$$p_3 = -3, \quad p_4 = 18, \quad p_5 = -15, \quad p_6 = 57, \quad p_7 = 3p_5 - p_4 = -45 - 18 = -63.$$

Solution de l'exercice 6.9. $D = \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2$ est symétrique (échanger deux racines change des signes qui disparaissent au carré). Par le théorème précédent, D est un polynôme à coefficients entiers en les e_k ; ceux-ci sont entiers puisque P est unitaire à coefficients entiers. Donc $D \in \mathbb{Z}$: c'est le discriminant de P.

CHAPITRE 7

7 Interpolation et différences finies

Un polynôme de degré n est entièrement déterminé par ses valeurs en $n+1$ points. Ce principe, d'apparence modeste, est à l'origine de nombreuses solutions élégantes : l'**interpolation de Lagrange** reconstruit le polynôme, les **différences finies** permettent de travailler directement sur les valeurs, et les **polynômes de Tchebychev** répondent à la question « quel polynôme unitaire reste le plus petit possible sur $[-1,1]$? ».

7.1 Interpolation de Lagrange

Théorème 7.1.1 (Interpolation de Lagrange)

Soient $x_0, \dots, x_n$ des nombres deux à deux distincts et $y_0, \dots, y_n$ quelconques. Il existe un unique polynôme P de degré $\leq n$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i, donné par

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, L_i(X), \qquad L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

Démonstration. *Existence.* Chaque L_i est un polynôme de degré n (produit de n facteurs de degré 1), qui vaut 1 en x_i (tous les facteurs valent 1) et 0 en x_k pour $k \neq i$ (le facteur d'indice $j = k$ est nul). Donc $P(x_k) = \sum_i y_i \, L_i(x_k) = y_k$, et $\deg P \leq n$.

Unicité. Si P et $\tilde{P}$ conviennent, $P - \tilde{P}$ est de degré $\leq n$ et s'annule en les $n+1$ points distincts $x_0, \dots, x_n$: il est nul (théorème 5.1.5). ■

Exemple 7.1.2. Le polynôme de degré ≤ 2 qui vaut $1, 3, 7$ en $0, 1, 2$ est

$$P(X) = 1 \cdot \frac{(X-1)(X-2)}{2} + 3 \cdot \frac{X(X-2)}{-1} + 7 \cdot \frac{X(X-1)}{2} = X^2 + X + 1.$$

Méthode 7.1.3 — Le réflexe « polynôme auxiliaire »

Devant des données du type $P(x_i) = y_i$, on n'écrit presque jamais la formule de Lagrange : on construit un polynôme auxiliaire

$$Q(X) = g(X)P(X) - h(X),$$

où g et h sont simples et choisis pour que Q s'annule en $x_0, \dots, x_n$. Alors $Q = c\prod(X - x_i)$ (par le théorème 5.1.4 appliqué successivement à chaque racine, si $\deg Q = n+1$), et **une évaluation supplémentaire** donne c.

Exemples de choix : $P(k) = k \Rightarrow Q = P - X$; $P(k) = \frac{1}{k} \Rightarrow Q = XP - 1$; $P(k) = \frac{k}{k+1} \Rightarrow Q = (X+1)P - X$.

Exemple 7.1.4 (Un classique). Soit P de degré n tel que $P(k) = \frac{1}{k}$ pour $k = 1, 2, \dots, n+1$. Calculer $P(0)$.

Solution. Le polynôme $Q(X) = XP(X) - 1$ est de degré $n+1$ et s'annule en $1, 2, \ldots, n+1$: $Q(X) = c(X-1)(X-2)\cdots(X-n-1)$. En $X = 0$: $Q(0) = -1 = c(-1)^{n+1}(n+1)!$, donc $c = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$. Enfin, $P(0)$ est le coefficient de X dans Q (car $Q = XP - 1$) ; le coefficient de X dans $c\prod_{k=1}^{n+1}(X-k)$ vaut $c\,(-1)^n(n+1)!\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$. Donc

$$P(0) = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}.$$

7.2 Différences finies

Définition 7.2.1 (Opérateur de différence)

Pour une fonction f, on pose $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x)$, et $\Delta^k = \Delta \circ \Delta^{k-1}$ ($\Delta^0 f = f$). Pour x quelconque et $k \geq 0$ entier, on note $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ (polynôme de degré k en x).

Théorème 7.2.2 (Différences finies d'un polynôme)

Soit P de degré n, de coefficient dominant a_n.

1. ΔP est de degré $n-1$, de coefficient dominant na_n (si $n \geq 1$).
2. $\Delta^n P = n!\ a_n$ (constante) et $\Delta^{n+1}P = 0$.
3. $\left(\Delta^k P\right)(x) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}P(x+j)$.
4. (**Formule de Newton**) $P(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\Delta^k P\right)(0)\binom{x}{k}$.

Démonstration.

1. $\Delta(X^m) = (X+1)^m - X^m = mX^{m-1} +$ (termes de degré $< m-1$) par la formule du binôme. Par linéarité, le terme dominant de ΔP provient de $a_n X^n$ et vaut $na_n X^{n-1}$.
2. En appliquant n fois le point 1, $\Delta^n P$ est de degré 0 et de coefficient $n(n-1)\cdots 1 \cdot a_n$. La différence d'une constante est nulle.
3. Notons E l'opérateur de translation $(Ef)(x) = f(x+1)$, de sorte que $\Delta = E - I$. Les opérateurs E et I commutent, donc la formule du binôme s'applique : $\Delta^k = (E-I)^k = \sum_j \binom{k}{j}(-1)^{k-j}E^j$, et $E^j P(x) = P(x+j)$. (On peut aussi raisonner par récurrence sur k avec la relation de Pascal.)
4. Posons $B_k(x) = \binom{x}{k}$. On vérifie que $\Delta B_k = B_{k-1}$ pour $k \geq 1$: $\binom{x+1}{k} - \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+2)}{k!}[(x+1) - (x-k+1)] = \binom{x}{k-1}$. De plus $B_k(0) = 0$ pour $k \geq 1$ et $B_0 = 1$. Les B_k ($0 \leq k \leq n$) étant de degrés $0, 1, \ldots, n$, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{n} c_k B_k$ (on détermine c_n par le terme dominant, puis on recommence avec $P - c_n B_n$). Alors $\Delta^j P = \sum_{k \geq j} c_k B_{k-j}$, et en évaluant en 0 : $\left(\Delta^j P\right)(0) = c_j$. ■

Corollaire 7.2.3 (Polynômes à valeurs entières)

Soit P de degré n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $P(m) \in \mathbb{Z}$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$;
2. $P(0), P(1), \ldots, P(n)$ sont des entiers ;

3. tous les $(\Delta^k P)(0)$, $0 \le k \le n$, sont entiers.

Ainsi $\frac{x^2+x}{2} = \binom{x}{2} + \binom{x}{1}$ est à valeurs entières bien que ses coefficients ne le soient pas.

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$ est évident. $2 \Rightarrow 3$: par le point 3 du théorème, $(\Delta^k P)(0)$ est une combinaison à coefficients entiers de $P(0), \dots, P(k)$. $3 \Rightarrow 1$: par la formule de Newton, il suffit de voir que $\binom{m}{k} \in \mathbb{Z}$ pour $m \in \mathbb{Z}$. C'est clair pour $m \ge 0$ (nombre de parties). Pour $m = -u < 0$: $\binom{-u}{k} = \frac{(-u)(-u-1)\cdots(-u-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{u+k-1}{k} \in \mathbb{Z}$. ■

Exemple 7.2.4. *Soit P de degré n avec $P(k) = 2^k$ pour $k = 0, \dots, n$. Calculer $P(n+1)$.*

Puisque $\Delta^{n+1} P = 0$, le point 3 donne $\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} P(j) = 0$. En isolant $j = n+1$:

$$P(n+1) = -\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} 2^j = -[(2-1)^{n+1} - 2^{n+1}] = 2^{n+1} - 1.$$

Exemple 7.2.5. *Si P est de degré n et $P(0), \dots, P(n) \in \mathbb{Z}$, alors $P(k) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

C'est l'implication $2 \Rightarrow 1$ du corollaire 7.2.3.

7.3 Polynômes de Tchebychev

Définition 7.3.1 (Polynômes de Tchebychev)

On définit $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ pour $n \ge 1$. Ainsi $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$, $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

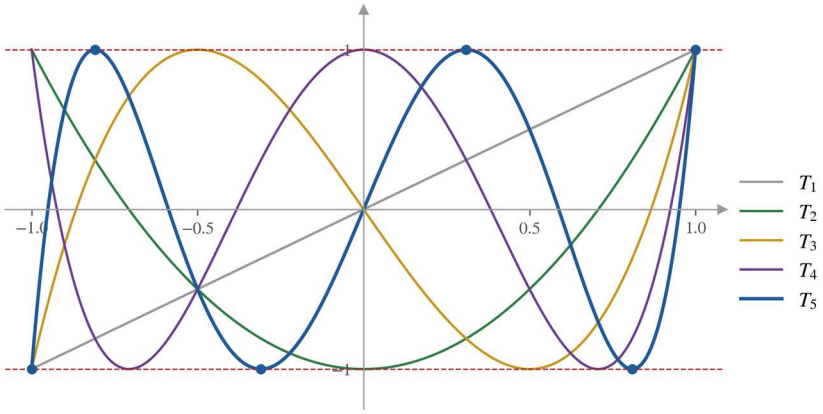
Proposition 7.3.2 (Propriétés des polynômes de Tchebychev)

Pour tout $n \ge 0$ et tout réel θ :

1. $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$;
2. $\deg T_n = n$ et, pour $n \ge 1$, le coefficient dominant de T_n vaut 2^{n-1} ;
3. $|T_n(x)| \le 1$ pour $x \in [-1,1]$, et $T_n\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^k$ pour $k = 0, \dots, n$.

Démonstration.

1. Par récurrence double : c'est vrai pour $n = 0,1$. La formule $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos\theta\cos(n\theta)$ montre que $c_n = \cos(n\theta)$ vérifie $c_{n+1} = 2\cos\theta\, c_n - c_{n-1}$, la même relation que $T_n(\cos\theta)$.
2. Par récurrence : si T_n a pour terme dominant $2^{n-1}X^n$, alors $2XT_n$ a pour terme dominant $2^n X^{n+1}$, et T_{n-1} est de degré plus petit.
3. Tout $x \in [-1,1]$ s'écrit $\cos\theta$, et $|\cos n\theta| \le 1$. Pour $\theta = \frac{k\pi}{n}$, $\cos(n\theta) = \cos(k\pi) = (-1)^k$. ■



Les polynômes de Tchebychev T_1 à T_5 sur $[-1, 1]$: ils oscillent entre −1 et 1 et atteignent ces valeurs n + 1 fois.

Théorème 7.3.3 (Propriété de minimalité)

Pour $n \geq 1$, tout polynôme unitaire Q de degré n vérifie

$$\max_{x\in[-1,1]} |Q(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}},$$

et l'égalité est atteinte pour $Q = 2^{1-n}T_n$.

Démonstration. Le polynôme $2^{1-n}T_n$ est unitaire (proposition 7.3.2) et son maximum sur $[-1,1]$ vaut 2^{1-n}. Supposons qu'un polynôme unitaire Q de degré n vérifie $|Q(x)| < 2^{1-n}$ pour tout $x \in [-1,1]$. Posons $R = 2^{1-n}T_n - Q$: les termes X^n se compensent, donc $\deg R \leq n-1$. Aux points $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ $(k = 0, \dots, n)$, on a $R(x_k) = 2^{1-n}(-1)^k - Q(x_k)$, qui est du signe de $(-1)^k$ puisque $|Q(x_k)| < 2^{1-n}$. Ainsi R change de signe entre x_k et x_{k+1} pour chaque $k = 0, \dots, n-1$: par le théorème des valeurs intermédiaires, il a au moins n racines distinctes. Étant de degré $\leq n-1$, il est nul, ce qui est absurde puisque $R(x_0) > 0$. ■

Utilisation en olympiade.

Le théorème 7.3.3 répond à des énoncés du type : « montrer que, pour tous réels a, b, c, l'un des nombres $|P(-1)|$, $\left|P\left(-\frac{1}{2}\right)\right|$, $\left|P\left(\frac{1}{2}\right)\right|$, $|P(1)|$, où $P = X^3 + aX^2 + bX + c$, est au moins égal à $\frac{1}{4}$ ». La preuve ci-dessus n'utilise en effet que les valeurs aux $n+1$ points $\cos\frac{k\pi}{n}$: pour $n = 3$, ce sont $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1$.

À retenir — les réflexes du chapitre 7

- Des conditions $P(x_i) = y_i$: construire $Q = gP - h$ qui s'annule aux x_i, puis évaluer en un point de plus.
- $\Delta^{n+1}P = 0$ pour $\deg P \leq n$: une relation linéaire entre $n+2$ valeurs consécutives.
- Valeurs entières en $n+1$ entiers consécutifs ⇒ valeurs entières partout.
- $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ et la minimalité de $2^{1-n}T_n$.

7.4 Exercices

Exercice 7.1 ★. Trouver le polynôme de degré ≤ 2 tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 3$, $P(2) = 7$.

Exercice 7.2 ★. Calculer ΔP, $\Delta^2 P$, $\Delta^3 P$ pour $P(X) = X^3$.

Exercice 7.3 ★★. Soit $n \geq 2$ et P de degré au plus n tel que $P(k) = k^2$ pour $k = 1, \ldots, n+1$. Que vaut $P(n+2)$?

Exercice 7.4 ★★. Soit P de degré n tel que $P(k) = \frac{k}{k+1}$ pour $k = 0, \ldots, n$. Calculer $P(n+1)$.

Exercice 7.5 ★★. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^n = (-1)^n n!$.

Exercice 7.6 ★★. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^m = 0$ pour tout $0 \leq m < n$.

Exercice 7.7 ★★★. Soit P unitaire de degré $n \geq 1$ à coefficients réels. Montrer qu'il existe $x \in [-1,1]$ tel que $|P(x)| \geq 2^{1-n}$.

Exercice 7.8 ★★★. Soit P unitaire de degré n à coefficients entiers. Montrer que pour $n+1$ entiers consécutifs $k_0, \ldots, k_0 + n$, on a $\max_j |P(k_0 + j)| \geq \frac{n!}{2^n}$.

7.5 Solutions

Solution de l'exercice 7.1. $\Delta P(0) = P(1) - P(0) = 2$, $\Delta^2 P(0) = \Delta P(1) - \Delta P(0) = 4 - 2 = 2$. Donc $P(X) = 1 + 2\binom{X}{1} + 2\binom{X}{2} = 1 + 2X + X(X-1) = X^2 + X + 1$.

Solution de l'exercice 7.2. $\Delta P = 3X^2 + 3X + 1$, $\Delta^2 P = 6X + 6$, $\Delta^3 P = 6 = 3!$, conformément au théorème 7.2.2.

Solution de l'exercice 7.3. Le polynôme X^2 est de degré $2 \leq n$ et coïncide avec P en $n+1$ points ; par unicité de l'interpolation, $P(X) = X^2$ et $P(n+2) = (n+2)^2$. La leçon : avant de calculer, vérifier si la solution évidente est admissible en degré.

Solution de l'exercice 7.4. Posons $Q(X) = (X+1)P(X) - X$, de degré $n+1$, nul en $0, 1, \ldots, n$: donc $Q = cX(X-1)\cdots(X-n)$. En $X = -1$: $Q(-1) = 0 + 1 = 1$ et $c(-1)(-2)\cdots(-1-n) = c(-1)^{n+1}(n+1)!$, donc $c = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. En $X = n+1$: $(n+2)P(n+1) - (n+1) = c\,(n+1)! = (-1)^{n+1}$, donc

$$P(n+1) = \frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2} = \begin{cases} \dfrac{n}{n+2} & n \text{ pair}, \\ 1 & n \text{ impair}. \end{cases}$$

Solution de l'exercice 7.5. Appliquons la propriété 3 du théorème 7.2.2 à $P(X) = X^n$ en $x = 0$: $(\Delta^n P)(0) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^n$. Or $\Delta^n P = n!$ car P est unitaire de degré n. En multipliant par $(-1)^n$, on obtient l'identité.

Solution de l'exercice 7.6. Même calcul avec $P(X) = X^m$, $m < n$: on a $\Delta^n P = 0$; en effet, Δ fait baisser le degré d'une unité, donc $\Delta^{m+1} P = 0$, et $m + 1 \leq n$. Ainsi $\sum_j (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^m = 0$, et l'on multiplie par $(-1)^n$.

Solution de l'exercice 7.7. Supposons $|P(x)| < 2^{1-n}$ sur $[-1,1]$. Posons $T = 2^{1-n} T_n$, unitaire de degré n, qui vaut $2^{1-n}(-1)^k$ aux $n+1$ points $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$, $0 \leq k \leq n$. Alors $D = T - P$ est de degré $\leq n-1$ et $D(x_k)$ a le signe de $(-1)^k$: D change de signe n fois, donc possède au moins n racines, ce qui contredit $\deg D \leq n-1$ (et $D \neq 0$).

Solution de l'exercice 7.8. Par la propriété 3, $n! = (\Delta^n P)(k_0) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(k_0 + j)$, donc

$$n! \leq \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} |P(k_0 + j)| \leq 2^n \max_j |P(k_0 + j)|.$$

D'où $\max_j |P(k_0 + j)| \geq \frac{n!}{2^n}$: un polynôme unitaire ne peut pas être partout petit sur $n + 1$ entiers consécutifs.

CHAPITRE 8

8 Polynômes à coefficients entiers

C'est le chapitre le plus « olympique » de cette partie : il combine algèbre et arithmétique et alimente de nombreux problèmes d'IMO. On y établit deux lemmes simples mais redoutables (divisibilité des différences de valeurs, racines rationnelles), puis les outils d'**irréductibilité** : lemme de Gauss, critère d'Eisenstein, réduction modulo un nombre premier.

8.1 Les deux lemmes fondamentaux

Lemme 8.1.1 (Lemme de divisibilité)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Pour tous entiers $a \neq b$: $(a-b) \mid \big(P(a)-P(b)\big)$.

Démonstration. $P(a)-P(b)=\sum_k a_k\left(a^k-b^k\right)$, et chaque a^k-b^k est divisible par $a-b$ (théorème 1.1.2), le quotient étant entier. ■

Lemme 8.1.2 (Racines rationnelles)

Soit $P=a_nX^n+\cdots+a_0 \in \mathbb{Z}[X]$, $a_n \neq 0$. Si $\frac{p}{q}$, écrit sous forme irréductible ($q \geq 1$), est racine de P, alors $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$. En particulier, les racines rationnelles d'un polynôme unitaire à coefficients entiers sont entières et divisent a_0.

Démonstration. En multipliant $P\left(\frac{p}{q}\right)=0$ par q^n :

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0.$$

Tous les termes sauf a_0q^n sont multiples de p, donc $p \mid a_0q^n$; comme p est premier avec q, donc avec q^n, le lemme de Gauss donne $p \mid a_0$. De même, tous les termes sauf a_np^n sont multiples de q, donc $q \mid a_np^n$, puis $q \mid a_n$. ■

Exemple 8.1.3 (Irrationalité). $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel. En effet, $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ vérifie $x^2=5+2\sqrt{6}$, donc $(x^2-5)^2=24$: x est racine de X^4-10X^2+1. Ce polynôme unitaire à coefficients entiers n'a pour racines rationnelles possibles que ±1, qui ne sont pas racines. Donc x n'est pas rationnel.

Proposition 8.1.4 (Pas de cycle de longueur ≥ 3)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $a_1,\ldots,a_k$ ($k \geq 3$) des entiers deux à deux distincts. Il est impossible d'avoir $P(a_1)=a_2$, $P(a_2)=a_3$, …, $P(a_{k-1})=a_k$, $P(a_k)=a_1$.

Démonstration. Posons $a_{k+1}=a_1$, $a_{k+2}=a_2$ et $d_i=a_{i+1}-a_i$. Par le lemme 8.1.1, $d_i=a_{i+1}-a_i$ divise $P(a_{i+1})-P(a_i)=a_{i+2}-a_{i+1}=d_{i+1}$ pour tout i ; en faisant le tour du cycle, $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_k \mid d_1$, donc tous les $|d_i|$ sont égaux à un même $d>0$. Si deux différences consécutives étaient opposées, $d_{i+1}=-d_i$, on aurait $a_{i+2}=a_i$, contradiction avec la distinction des a_i (car $k \geq 3$). Donc toutes les d_i ont le même signe et sont égales, et leur somme $d_1+\cdots+d_k=a_{k+1}-a_1=0$ vaut $\pm kd \neq 0$: contradiction. ■

Méthode 8.1.5 — Exploiter le lemme de divisibilité

- **Borner** : si $P(a)$ et $P(b)$ sont petits et $|a-b|$ grand, on obtient une contradiction.
- **Cycles** : les itérés d'un polynôme à coefficients entiers ne peuvent parcourir un cycle de longueur ≥ 3 (proposition 8.1.4).
- **Valeurs premières** : si $P(a) = p$ premier, alors $p \mid P(a+kp)$ pour tout k ; un polynôme non constant ne prend donc pas que des valeurs premières.

Exemple 8.1.6. *Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ et a, b, c entiers distincts avec $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$. Montrer que c'est impossible.*

C'est le cas $k = 3$ de la proposition 8.1.4. Directement : le lemme donne $(a-b) \mid (b-c)$, $(b-c) \mid (c-a)$, $(c-a) \mid (a-b)$, donc $|a-b| = |b-c| = |c-a| = d > 0$. Comme $(a-b)+(b-c)+(c-a) = 0$ et que chaque terme vaut $\pm d$, la somme vaut $\pm d$ ou $\pm 3d$, jamais 0. Contradiction.

Exemple 8.1.7. *Aucun polynôme non constant $P \in \mathbb{Z}[X]$ ne prend que des valeurs premières sur $\mathbb{N}$.*

Soit $p = P(0)$, supposé premier. Pour tout k, $p \mid P(kp) - P(0)$, donc $p \mid P(kp)$; comme $P(kp)$ est premier, $P(kp) = p$. Le polynôme $P - p$ a alors une infinité de racines $0, p, 2p, \ldots$: il est nul (théorème 5.1.5), et P est constant. Contradiction.

8.2 Contenu, lemme de Gauss, irréductibilité

Définition 8.2.1 (Contenu, polynôme primitif, irréductibilité)

Le **contenu** $c(P)$ d'un polynôme non nul de $\mathbb{Z}[X]$ est le pgcd de ses coefficients ; le polynôme est **primitif** si son contenu vaut 1. Tout $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul s'écrit $P = c(P)P_0$ avec P_0 primitif. Un polynôme non constant de $\mathbb{Q}[X]$ est **irréductible sur $\mathbb{Q}$** s'il n'est pas produit de deux polynômes non constants de $\mathbb{Q}[X]$.

Théorème 8.2.2 (Lemme de Gauss)

1. Le produit de deux polynômes primitifs est primitif ; plus généralement, $c(PQ) = c(P)c(Q)$.
2. Si $P \in \mathbb{Z}[X]$ se factorise en produit de deux polynômes non constants de $\mathbb{Q}[X]$, il se factorise aussi en produit de deux polynômes non constants de $\mathbb{Z}[X]$, de mêmes degrés.

Démonstration.

1. Soient $P = \sum a_i X^i$ et $Q = \sum b_j X^j$ primitifs, et supposons qu'un nombre premier p divise tous les coefficients de PQ. Soit r le plus petit indice tel que $p \nmid a_r$, et s le plus petit indice tel que $p \nmid b_s$ (ils existent car P et Q sont primitifs). Le coefficient de X^{r+s} dans PQ vaut

$$a_r b_s + \sum_{i<r} a_i\, b_{r+s-i} + \sum_{j<s} a_{r+s-j}\, b_j.$$

Les deux sommes sont divisibles par p (car $p \mid a_i$ pour $i < r$ et $p \mid b_j$ pour $j < s$), mais $a_r b_s$ ne l'est pas (p premier) : contradiction. Pour le cas général, on écrit $P = c(P)P_0$, $Q = c(Q)Q_0$, et $PQ = c(P)c(Q)P_0Q_0$ avec P_0Q_0 primitif.

2. Supposons $P = AB$ avec $A, B \in \mathbb{Q}[X]$ non constants. En chassant les dénominateurs et en factorisant les contenus, on écrit $A = \alpha A_0$, $B = \beta B_0$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ et $A_0, B_0 \in \mathbb{Z}[X]$ primitifs.

Alors $P = \alpha\beta A_0 B_0$; par le point 1, $A_0 B_0$ est primitif, et en comparant les contenus, $\alpha\beta = \pm c(P) \in \mathbb{Z}$. Donc $P = (\alpha\beta A_0)B_0$ est une factorisation dans $\mathbb{Z}[X]$. ■

Théorème 8.2.3 (Critère d'Eisenstein)

Soit $P = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ et p un nombre premier tel que $p \nmid a_n$, $p \mid a_i$ pour $0 \le i \le n-1$, et $p^2 \nmid a_0$. Alors P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Démonstration. Supposons P réductible sur $\mathbb{Q}$; par le lemme de Gauss, $P = AB$ avec $A = \sum_{i=0}^{r} b_i X^i$, $B = \sum_{j=0}^{s} c_j X^j$ dans $\mathbb{Z}[X]$, $r, s \ge 1$, $r + s = n$. Comme $a_0 = b_0 c_0$ est divisible par p mais pas par p^2, exactement l'un des deux facteurs est divisible par p ; disons $p \mid b_0$ et $p \nmid c_0$. Comme $a_n = b_r c_s$ n'est pas divisible par p, $p \nmid b_r$. Soit t le plus petit indice tel que $p \nmid b_t$: $1 \le t \le r < n$. Le coefficient $a_t = b_t c_0 + b_{t-1} c_1 + \cdots + b_0 c_t$ est divisible par p (car $t < n$), ainsi que tous les termes $b_{t-1} c_1, \ldots, b_0 c_t$; donc $p \mid b_t c_0$, ce qui est absurde puisque p ne divise ni b_t ni c_0. ■

Exemple 8.2.4. $X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (critère d'Eisenstein avec $p = 2$). Le polynôme cyclotomique $\Phi_p = X^{p-1} + \cdots + X + 1$ ne satisfait pas directement le critère, mais

$$\Phi_p(X+1) = \frac{(X+1)^p - 1}{X} = X^{p-1} + \binom{p}{1} X^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1}$$

le satisfait pour le nombre premier p (les $\binom{p}{k}$, $1 \le k \le p-1$, sont divisibles par p, et le terme constant vaut p) ; comme une factorisation de $\Phi_p(X)$ en donnerait une de $\Phi_p(X+1)$, Φ_p est irréductible.

Proposition 8.2.5 (Réduction modulo p)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n et p un nombre premier ne divisant pas le coefficient dominant. Si le polynôme réduit $\overline{P}$ (coefficients pris modulo p) est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$, alors P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Démonstration. Si $P = AB$ dans $\mathbb{Z}[X]$ avec A, B non constants (lemme de Gauss), alors $\overline{P} = \overline{A}\,\overline{B}$. Comme p ne divise pas le coefficient dominant $a_n = b_r c_s$ de P, il ne divise ni b_r ni c_s : $\overline{A}$ et $\overline{B}$ gardent les degrés $r, s \ge 1$, et $\overline{P}$ serait réductible. ■

Méthode 8.2.6 — Prouver l'irréductibilité

Par ordre de préférence :

1. chercher une racine rationnelle (suffisant en degré 2 et 3 : un polynôme de degré ≤ 3 réductible a un facteur de degré 1) ;
2. le critère d'Eisenstein, éventuellement après translation $X \mapsto X + c$;
3. la réduction modulo p (proposition 8.2.5) ;
4. la méthode des modules de racines : supposer $P = QR$ et évaluer $|Q|$, $|R|$ en des points choisis (voir l'exercice 8.7).

Exemple 8.2.7 (Réduction modulo 2). Le polynôme $X^3 + X + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_2$ (0 et 1 donnent 1) : il est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$ car de degré 3. Donc tout polynôme $X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{Z}[X]$ avec a pair et b, c impairs est irréductible sur $\mathbb{Q}$, par exemple $X^3 + 4X^2 + 7X + 13$.

À retenir — les réflexes du chapitre 8

- $(a-b) \mid P(a)-P(b)$: à utiliser dès que des valeurs entières de P sont connues.
- Racine rationnelle $\frac{p}{q}$: $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.
- Factorisation sur $\mathbb{Q}$ = factorisation sur $\mathbb{Z}$ (Gauss).
- Irréductibilité : Eisenstein (après translation) ou réduction modulo p.

8.3 Exercices

Exercice 8.1 ★. Trouver toutes les racines rationnelles de $2X^3 - 3X^2 - 8X + 12$.

Exercice 8.2 ★. Montrer que $X^3 - 3X - 1$ n'a pas de racine rationnelle.

Exercice 8.3 ★★. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(0)$ et $P(1)$ soient impairs. Montrer que P n'a aucune racine entière.

Exercice 8.4 ★★. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et a, b, c, d quatre entiers distincts avec $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$. Montrer que $P(n) \neq 8$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8.5 ★★. Montrer que $X^5 - 4X + 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 8.6 ★★. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant. Montrer que l'ensemble des nombres premiers divisant au moins une valeur $P(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, est infini.

Exercice 8.7 ★★★ (IMO 1993, problème 1). Soit $n \geq 2$. Montrer que $X^n + 5X^{n-1} + 3$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 8.8 ★★★. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(n) > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et soit (a_k) la suite définie par $a_1 = 1$, $a_{k+1} = P(a_k)$. Montrer que si tout entier $n \geq 1$ divise au moins un a_k, alors $P(X) = X + 1$.

8.4 Solutions

Solution de l'exercice 8.1. Candidats : $\frac{p}{q}$ avec $p \mid 12$, $q \mid 2$. On trouve $P(2) = 0$, puis $2X^3 - 3X^2 - 8X + 12 = (X-2)(2X^2 + X - 6) = (X-2)(2X-3)(X+2)$. Racines : $2, \frac{3}{2}, -2$.

Solution de l'exercice 8.2. Le polynôme est unitaire avec $a_0 = -1$: les seules racines rationnelles possibles sont ± 1. Or $P(1) = -3$ et $P(-1) = 1$. Il n'y a donc aucune racine rationnelle.

Solution de l'exercice 8.3. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Si m est pair, $2 \mid m - 0$, donc $P(m) \equiv P(0) \equiv 1 \pmod 2$; si m est impair, $2 \mid m - 1$, donc $P(m) \equiv P(1) \equiv 1 \pmod 2$. Dans les deux cas $P(m)$ est impair, donc $P(m) \neq 0$.

Solution de l'exercice 8.4. Posons $Q = P - 5$; alors $Q = (X-a)(X-b)(X-c)(X-d)R$ avec $R \in \mathbb{Z}[X]$. Si $P(n) = 8$, alors $Q(n) = 3$, donc

$$(n-a)(n-b)(n-c)(n-d)\,R(n) = 3.$$

Les quatre entiers $n-a, \ldots, n-d$ sont distincts et divisent 3 : ils forment donc l'ensemble $\{1, -1, 3, -3\}$, et leur produit vaut $1 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-3) = 9$. Or l'égalité $9 \cdot R(n) = 3$ est impossible avec $R(n) \in \mathbb{Z}$. Contradiction.

Solution de l'exercice 8.5. Critère d'Eisenstein avec $p = 2$: $2 \nmid 1$, $2 \mid -4$, $2 \mid 2$ (ainsi que les coefficients nuls), $4 \nmid 2$. Le polynôme est irréductible.

Solution de l'exercice 8.6. Supposons que seuls $p_1, \dots, p_r$ divisent des valeurs de P. Si $P(0) = 0$, alors $P(p)$ est divisible par p pour tout premier p, et $P(p) \neq 0$ pour p assez grand : l'infinité est immédiate. Sinon, posons $c = P(0) \neq 0$ et $N = c\,p_1 \cdots p_r$. Pour tout k, $P(kN) \equiv P(0) = c \pmod N$, donc $P(kN) = c(1 + mp_1 \cdots p_r)$ pour un certain $m \in \mathbb{Z}$ dépendant de k (car $N \mid P(kN) - c$ et $c \mid N$). Tout diviseur premier de $1 + mp_1 \cdots p_r$ est distinct des p_i. Comme $|P(kN)| \to \infty$, on a $|1 + mp_1 \cdots p_r| > 1$ pour k grand : on obtient un nouveau nombre premier, contradiction.

Solution de l'exercice 8.7. Supposons $P = QR$ avec $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ non constants (ce qui est licite par le lemme de Gauss), tous deux unitaires quitte à ajuster les signes. Comme $P(0) = 3$ est premier, $|Q(0)| \cdot |R(0)| = 3$: quitte à échanger, $|Q(0)| = 1$.

Soient $k = \deg Q \geq 1$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ les racines de Q, qui sont aussi racines de P ; Q étant unitaire, $\prod_i |\alpha_i| = |Q(0)| = 1$.

Chaque racine α de P vérifie $\alpha^{n-1}(\alpha + 5) = -3$, donc $|\alpha|^{n-1}|\alpha + 5| = 3$. En multipliant sur $i = 1, \dots, k$:

$$\left(\prod_i |\alpha_i|\right)^{n-1} \prod_i |\alpha_i + 5| = 3^k \Longrightarrow \prod_i |\alpha_i + 5| = 3^k.$$

Or $\prod_i (\alpha_i + 5) = \pm Q(-5)$, donc $|Q(-5)| = 3^k$. Mais

$$P(-5) = (-5)^{n-1}(-5 + 5) + 3 = 3,$$

donc $Q(-5)R(-5) = 3$ et $|Q(-5)| \leq 3$: ainsi $3^k \leq 3$, soit $k = 1$. Le polynôme P aurait alors une racine entière α avec $|\alpha| = 1$ (issue du facteur Q de degré 1 et de constante ± 1). Or

$$P(1) = 9, \qquad P(-1) = (-1)^{n-1} \cdot 4 + 3 \in \{7, -1\},$$

qui ne s'annulent jamais. Aucune racine entière de module 1 : contradiction. Donc P est irréductible.

Solution de l'exercice 8.8. La suite (a_k) est formée d'entiers strictement positifs et elle est strictement croissante, car $a_{k+1} = P(a_k) > a_k$. Pour tout k, le lemme de divisibilité donne

$$(a_{k+1} - a_k) \mid \big(P(a_{k+1}) - P(a_k)\big) = a_{k+2} - a_{k+1}.$$

Notons $d_k = a_{k+1} - a_k \geq 1$; la relation ci-dessus donne $d_k \mid d_{k+1}$, donc $d_1 \mid d_k$ pour tout k et, plus généralement, $d_k \mid a_j - a_k$ pour $j > k$.

Supposons $d_1 \geq 2$, où $d_1 = P(1) - 1$. Alors, modulo d_1, la suite (a_k) est constante : $a_k \equiv a_1 = 1 \pmod{d_1}$ pour tout k (puisque $d_1 \mid d_j$ pour tout j). Donc d_1 ne divise aucun a_k dès que $d_1 \nmid 1$, c'est-à-dire dès que $d_1 \geq 2$: cela contredit l'hypothèse (prendre $n = d_1$). Par conséquent $d_1 = 1$, c'est-à-dire $P(1) = 2$.

Plus généralement, supposons qu'il existe $j \geq 2$ tel que $d_{j-1} \geq 2$, et posons $N = a_j - a_1 = a_j - 1$. Le lemme de divisibilité, appliqué de proche en proche, donne $N = a_j - a_1 \mid a_{j+1} - a_2 \mid a_{j+2} - a_3 \mid \cdots$, c'est-à-dire $a_{s+j-1} \equiv a_s \pmod N$ pour tout $s \geq 1$: modulo N, la suite ne prend que les valeurs $a_1, \dots, a_{j-1}$. Or $1 = a_1 < \cdots < a_{j-1} = a_j - d_{j-1} < a_j - 1 = N$, donc aucun de ces entiers strictement positifs n'est divisible par N, et N ne divise aucun a_k : contradiction. Ainsi $d_k = 1$ pour tout k, donc $a_k = k$ et $P(k) = a_{k+1} = k + 1$ pour tout $k \geq 1$. Un polynôme coïncidant avec $X + 1$ en une infinité de points lui est égal : $P(X) = X + 1$.

CHAPITRE 9

9 Nombres complexes et racines de l'unité

Les énoncés d'olympiade mentionnent rarement les nombres complexes ; pourtant ils offrent souvent le chemin le plus court, en particulier pour la trigonométrie, les sommes périodiques, la factorisation et les inégalités de type triangulaire. Ce chapitre rappelle les bases, puis développe l'outil central : les **racines de l'unité**.

9.1 Rappels et forme exponentielle

Définition 9.1.1 (Nombres complexes)

$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$ avec $i^2 = -1$. Pour $z = a + ib$: le **conjugué** est $\overline{z} = a - ib$, le **module** est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, et $\mathrm{Re}z = \frac{z+\overline{z}}{2} = a$, $\mathrm{Im}z = \frac{z-\overline{z}}{2i} = b$.

Proposition 9.1.2 (Règles de calcul)

Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$: $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, $|z|^2 = z\overline{z}$, $|zw| = |z|\,|w|$, et, si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Démonstration. Les deux premières égalités se vérifient en écrivant $z = a + ib$, $w = c + id$: $zw = (ac - bd) + i(ad + bc)$ et $\overline{z}\,\overline{w} = (ac - bd) - i(ad + bc)$. Ensuite $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$. Puis $|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\overline{z}\,w\overline{w} = |z|^2|w|^2$. Enfin $z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$. ■

Définition 9.1.3 (Exponentielle imaginaire)

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$: c'est le point du cercle unité d'angle polaire θ.

Proposition 9.1.4 (Forme exponentielle et formule de Moivre)

1. $e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et $\left|e^{i\theta}\right| = 1$.
2. Tout $z \neq 0$ s'écrit $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z| > 0$ et θ (un **argument** de z) défini modulo 2π. Alors $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.
3. (**Moivre**) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.

1. $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi)$, et l'on reconnaît les formules d'addition. Le reste est immédiat.
2. $\frac{z}{|z|}$ est de module 1, donc de la forme $\cos\theta + i\sin\theta$ (point du cercle unité). Le produit découle de 1.
3. Par récurrence sur $n \geq 0$ grâce à 1, puis pour $n < 0$ en utilisant $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$. ■

Proposition 9.1.5 (Racines n-ièmes)

Soit $n \geq 1$ et $w = \rho e^{i\alpha} \neq 0$. L'équation $z^n = w$ a exactement n solutions complexes :

$$z_k = \rho^{1/n} e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}, \qquad k = 0,1,\dots,n-1.$$

Démonstration. Écrivons $z = re^{i\theta}$. Alors $z^n = r^n e^{in\theta}$, et $z^n = w$ équivaut à $r^n = \rho$ et $n\theta \equiv \alpha \pmod{2\pi}$, c'est-à-dire $r = \rho^{1/n}$ et $\theta = \frac{\alpha+2k\pi}{n}$ pour un entier k. Deux valeurs de k donnent le même z si et seulement si elles sont congrues modulo n ; on obtient donc exactement n solutions, pour $k = 0,\dots,n-1$. ■

Méthode 9.1.6 — Trigonométrie par les complexes

- $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$: toute identité trigonométrique devient algébrique.
- $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$: développer par la formule du binôme exprime $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
- Une somme $\sum\cos(k\theta)$ est la partie réelle d'une somme géométrique.
- $|1 - e^{i\alpha}| = 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$, car $1 - e^{i\alpha} = e^{i\alpha/2}\left(e^{-i\alpha/2} - e^{i\alpha/2}\right) = -2i\sin\frac{\alpha}{2}\, e^{i\alpha/2}$.

Exemple 9.1.7. *Calculer* $\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}$ *pour* $n \geq 2$.

C'est $\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2i\pi}-1}{e^{2i\pi/n}-1}\right) = 0$: la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Exemple 9.1.8 (Formule du triple). Par Moivre, $\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (c+is)^3 = c^3 - 3cs^2 + i(3c^2 s - s^3)$ avec $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$. En prenant la partie réelle et en utilisant $s^2 = 1 - c^2$: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$. On retrouve le polynôme de Tchebychev $T_3 = 4X^3 - 3X$ (chapitre 7).

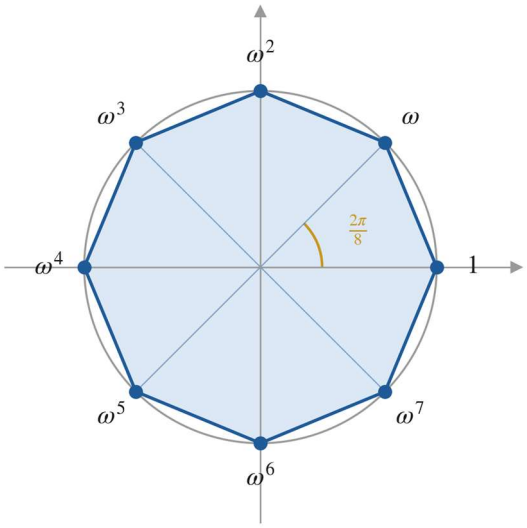
9.2 Racines de l'unité

Théorème 9.2.1 (Racines n-ièmes de l'unité)

Soit $n \geq 1$ et $\zeta = e^{2i\pi/n}$. Les solutions de $z^n = 1$ sont les n nombres $\zeta^k = e^{2ik\pi/n}$, $k = 0,\dots,n-1$, et

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \zeta^k\right), \qquad 1 + \zeta + \cdots + \zeta^{n-1} = 0 \quad (n \geq 2).$$

Démonstration. La première affirmation est la proposition 9.1.5 avec $w = 1$. Les ζ^k sont n racines distinctes du polynôme unitaire $X^n - 1$ de degré n : en factorisant successivement (théorème 5.1.4), on obtient $X^n - 1 = \prod(X - \zeta^k)$. Enfin, par Viète, la somme des racines est l'opposé du coefficient de X^{n-1}, nul pour $n \geq 2$. (Ou : $\sum_k \zeta^k = \frac{\zeta^n - 1}{\zeta - 1} = 0$ car $\zeta \neq 1$.) ■



Les racines 8-ièmes de l'unité forment un octogone régulier inscrit dans le cercle unité ; leur somme est nulle.

Théorème 9.2.2 (Filtre des racines de l'unité)

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$: $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{jk} = 1$ si $n \mid j$, et 0 sinon. Par conséquent, si $f(X) = \sum_m a_m X^m$ est un polynôme, alors pour tout entier r,

$$\sum_{m \equiv r \pmod n} a_m = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{-k}\ f(\zeta^k).$$

Démonstration. Si $n \mid j$, $\zeta^j = 1$ et la somme vaut n. Sinon, $\omega = \zeta^j \neq 1$ et $\omega^n = 1$, donc $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0$. Pour la seconde formule :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{-k}\ f(\zeta^k) = \sum_m a_m \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{k(m-r)},$$

et le facteur de a_m vaut 1 si $m \equiv r \pmod n$, 0 sinon. ■

Exemple 9.2.3. *Calculer* $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots$.

Avec $f(X) = (1+X)^n$ et $\omega = e^{2i\pi/3}$:

$$\sum_{3 \mid m} \binom{n}{m} = \frac{2^n + (1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n}{3} = \frac{2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}}{3},$$

car $1 + \omega = -\omega^2 = e^{i\pi/3}$ et $1 + \omega^2 = e^{-i\pi/3}$.

Exemple 9.2.4. *Montrer que* $\prod_{k=1}^{n-1} 2\sin\frac{k\pi}{n} = n$.

De $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \zeta^k)$ on tire, en divisant par $X - 1$:

$$1 + X + \cdots + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}(X - \zeta^k), \qquad \text{donc, en } X = 1, \qquad \prod_{k=1}^{n-1}(1 - \zeta^k) = n.$$

Or $|1 - e^{i\alpha}| = 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$ (méthode 9.1.6), donc $|1 - \zeta^k| = 2\sin\frac{k\pi}{n} > 0$ pour $1 \leq k \leq n-1$. En prenant les modules, on conclut.

Définition 9.2.5 (Racine primitive)

Une racine n-ième de l'unité ω est **primitive** si $\omega^d \neq 1$ pour $1 \leq d < n$. Par exemple $\zeta = e^{2i\pi/n}$ est primitive, et pour $n = 3$, $\omega = e^{2i\pi/3}$ vérifie $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ et $\overline{\omega} = \omega^2$.

Proposition 9.2.6

ζ^k est une racine n-ième primitive de l'unité si et seulement si $\gcd(k, n) = 1$. Si ω est primitive, alors $\omega^m = 1 \Leftrightarrow n \mid m$.

Démonstration. On a $\left(\zeta^k\right)^d = 1 \Leftrightarrow n \mid kd$. Si $\gcd(k,n) = 1$, cela équivaut à $n \mid d$, donc aucun $d \in \{1, \ldots, n-1\}$ ne convient. Si $g = \gcd(k,n) > 1$, alors $d = \frac{n}{g} < n$ convient. Pour la seconde affirmation, on écrit $m = qn + s$ avec $0 \leq s < n$: $\omega^m = \omega^s$, qui vaut 1 si et seulement si $s = 0$. ■

9.3 Inégalité triangulaire complexe

Théorème 9.3.1 (Inégalité triangulaire)

Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$:

$$||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|,$$

avec égalité à droite si et seulement si z et w sont positivement colinéaires ($z = 0$, ou $w = \lambda z$ avec $\lambda \geq 0$). Plus généralement, $|\sum z_i| \leq \sum |z_i|$.

Démonstration. $|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w})$. Or $\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq |z\overline{w}| = |z|\,|w|$, d'où $|z+w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$. L'égalité a lieu si et seulement si $\mathrm{Re}(z\overline{w}) = |z\overline{w}|$, c'est-à-dire si $z\overline{w}$ est un réel positif, ce qui équivaut (pour $z \neq 0$) à $w = \lambda z$ avec $\lambda = \frac{\overline{z}w}{|z|^2} \geq 0$. La minoration s'obtient en appliquant la majoration à $z = (z+w) + (-w)$ et à $w = (z+w) + (-z)$. La généralisation se fait par récurrence. ■

C'est le pont entre complexes et inégalités : par exemple, $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$ est exactement $|z| + |w| \geq |z+w|$ avec $z = a + ib$, $w = c + id$ — autrement dit l'inégalité de Minkowski (chapitre 12).

Exemple 9.3.2. Montrer que, pour tous réels x : $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{(x-3)^2+4} \geq \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Solution. Avec $z = x + i$ et $w = (3-x) + 2i$: $|z| + |w| \geq |z+w| = |3+3i| = 3\sqrt{2}$. Égalité si $w = \lambda z$ avec $\lambda \geq 0$: $\lambda = 2$ et $3 - x = 2x$, soit $x = 1$.

À retenir — les réflexes du chapitre 9

- Trigonométrie : passer aux exponentielles ; sommes de cosinus = parties réelles de sommes géométriques.
- Coefficients d'indices dans une classe modulo n : le filtre des racines n-ièmes de l'unité.
- $x^2 + x + 1$ divise P si et seulement si $P(\omega) = 0$, $\omega = e^{2i\ /3}$.
- Sommes de racines carrées de sommes de carrés : inégalité triangulaire complexe.

9.4 Exercices

Exercice 9.1 ★. Écrire $(1+i)^{10}$ sous forme algébrique.

Exercice 9.2 ★. Résoudre $z^3 = 8$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 9.3 ★. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{2k}{n}$ pour $n \geq 2$.

Exercice 9.4 ★★. Soit $\omega = e^{2i\pi/3}$. Calculer $(1+\omega)^{2024}$.

Exercice 9.5 ★★. Exprimer $\cos 5\theta$ comme polynôme en $\cos\theta$.

Exercice 9.6 ★★. Calculer $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$.

Exercice 9.7 ★★. Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1}\left(2-2\cos\frac{2k\pi}{n}\right) = n^2$.

Exercice 9.8 ★★★. Soient $z_1, \ldots, z_n$ de module 1 et de somme nulle. Montrer que pour tout z de module 1 : $\sum_{i=1}^{n}|z-z_i|^2 = 2n$.

Exercice 9.9 ★★★. Montrer que $\sum_{k=1}^{n-1}\cot^2\frac{k\pi}{n} = \frac{(n-1)(n-2)}{3}$.

Exercice 9.10 ★★★. Soient a, b, c des complexes de module 1 tels que $a+b+c=0$. Montrer que $\{a,b,c\}$ est l'ensemble des sommets d'un triangle équilatéral, et que $a^2+b^2+c^2=0$.

9.5 Solutions

Solution de l'exercice 9.1. $1+i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$, donc $(1+i)^{10} = 2^5 e^{10i\pi/4} = 32\,e^{5i\pi/2} = 32i$.

Solution de l'exercice 9.2. $z = 2e^{2ik\pi/3}$, $k = 0,1,2$, c'est-à-dire $z \in \{2,\ -1+i\sqrt{3},\ -1-i\sqrt{3}\}$.

Solution de l'exercice 9.3. C'est la partie imaginaire de la somme des racines n-ièmes de l'unité, donc 0.

Solution de l'exercice 9.4. $1+\omega = -\omega^2$, donc $(1+\omega)^{2024} = \omega^{4048}$. Comme $4048 = 3\cdot 1349 + 1$, cela vaut $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Solution de l'exercice 9.5. $\cos 5\theta = \mathrm{Re}(c+is)^5 = c^5 - 10c^3s^2 + 5cs^4$ avec $c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$. Avec $s^2 = 1-c^2$:

$$\cos 5\theta = c^5 - 10c^3(1-c^2) + 5c(1-c^2)^2 = 16c^5 - 20c^3 + 5c = T_5(c).$$

Solution de l'exercice 9.6. $\sum_k \binom{n}{k}\cos k\theta = \mathrm{Re}\left(1+e^{i\theta}\right)^n$. Or $1+e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\theta/2}$, donc la somme vaut $2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}$.

Solution de l'exercice 9.7. $2-2\cos\alpha = \left|1-e^{i\alpha}\right|^2$, donc le produit vaut $\prod_{k=1}^{n-1}\left|1-\zeta^k\right|^2 = n^2$ d'après l'exemple 9.2.4.

Solution de l'exercice 9.8. $|z-z_i|^2 = |z|^2 + |z_i|^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{z_i}) = 2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{z_i})$. En sommant : $\sum_i |z-z_i|^2 = 2n - 2\mathrm{Re}(z\overline{\sum z_i}) = 2n$.

Solution de l'exercice 9.9. Écrivons $\sin n\theta = \sin^n\theta \cdot U(\cot\theta)$, où $U(x) = \binom{n}{1}x^{n-1} - \binom{n}{3}x^{n-3} + \binom{n}{5}x^{n-5} - \cdots$ (développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ et prendre la partie imaginaire). Les nombres $x_k = \cot\frac{k\pi}{n}$, $1 \leq k \leq n-1$, sont deux à deux distincts et annulent U, qui est de degré $n-1$: ce sont donc toutes ses racines. Par les relations de Viète,

$$\sum_k x_k = 0, \qquad \sum_{k<l} x_k\, x_l = -\frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{1}},$$

d'où

$$\sum_k \cot^2\frac{k\pi}{n} = \left(\sum_k x_k\right)^2 - 2\sum_{k<l} x_k\, x_l = \frac{2}{n}\binom{n}{3} = \frac{(n-1)(n-2)}{3}.$$

Solution de l'exercice 9.10. De $a+b+c=0$ on tire $c=-(a+b)$, donc $1=|c|^2=|a|^2+|b|^2+2\mathrm{Re}(a\overline{b})=2+2\mathrm{Re}(a\overline{b})$, d'où $\mathrm{Re}(a\overline{b})=-\frac{1}{2}$. Comme $|a\overline{b}|=1$, cela signifie $a\overline{b}=e^{\pm 2i\pi/3}$, c'est-à-dire que $\frac{a}{b}=a\overline{b}$ est une racine primitive cubique de l'unité : $b=a\omega^{\pm 1}$. Alors $c=-(a+b)=-a(1+\omega^{\pm 1})=a\omega^{\mp 1}$, donc $\{a,b,c\}=\{a,a\omega,a\omega^2\}$: c'est un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité. Enfin

$$a^2+b^2+c^2=a^2(1+\omega^2+\omega^4)=a^2(1+\omega^2+\omega)=0.$$

Remarque.
On pouvait aussi écrire $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$ et remarquer que $ab+bc+ca=abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=abc(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})=0$, puisque $\frac{1}{a}=\overline{a}$ pour $|a|=1$.

PARTIE III — Inégalités

CHAPITRE 10

10 Principes de base

Démontrer une inégalité, c'est transformer l'expression jusqu'à la ramener à une évidence — le plus souvent : **un carré est positif**. Avant les grands théorèmes (moyennes, Cauchy–Schwarz, convexité), ce chapitre fixe les règles de manipulation, les conséquences immédiates de l'inégalité $x^2 \geq 0$, et trois réflexes stratégiques : chercher le **cas d'égalité**, utiliser le **second degré**, exploiter l'**homogénéité**.

10.1 Manipuler une inégalité

Proposition 10.1.1 (Règles de manipulation)

Pour des réels quelconques :

1. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$;
2. $a \leq b$ et $c > 0 \Rightarrow ac \leq bc$; si $c < 0$, l'inégalité change de sens ;
3. $0 < a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$;
4. $0 \leq a \leq b \Rightarrow a^n \leq b^n$ pour tout entier $n \geq 1$, et $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$;
5. on peut **additionner** deux inégalités de même sens, jamais les soustraire ;
6. on peut **multiplier** deux inégalités de même sens si tous les membres sont positifs.

Démonstration. On utilise que $x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0$, et que la somme et le produit de deux réels positifs sont positifs.

1. $(b + c) - (a + c) = b - a \geq 0$.
2. $bc - ac = (b - a)c$, du signe de c.
3. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} \geq 0$.
4. $b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + \cdots + a^{n-1})$ (théorème 1.1.2), produit de deux nombres positifs. Pour les racines : si l'on avait $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, le cas $n = 2$ donnerait $a > b$.
5. Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $(b + d) - (a + c) = (b - a) + (d - c) \geq 0$. En revanche, $1 \leq 3$ et $0 \leq 3$ ne donnent pas $1 - 0 \leq 3 - 3$.
6. Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bc \leq bd$ par le point 2 appliqué deux fois. ■

Les erreurs les plus fréquentes en compétition.

- Multiplier deux inégalités sans vérifier la positivité.
- Élever au carré sans connaître le signe des deux membres.
- Écrire « il suffit de montrer » alors que l'implication va dans le mauvais sens : pour prouver $A \geq B$, il suffit de prouver $A \geq C$ **et** $C \geq B$; prouver $C \geq B$ seul ne suffit pas.
- Oublier de traiter le cas d'égalité quand l'énoncé le demande.

10.2 L'inégalité triviale et ses conséquences

Théorème 10.2.1 (Inégalité triviale)

Pour tout réel x : $x^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$. Plus généralement, une somme de carrés de réels est positive, et elle est nulle si et seulement si chacun des carrés est nul.

Démonstration. Si $x \geq 0$, $x^2 = x \cdot x \geq 0$; si $x < 0$, $x^2 = (-x)(-x) > 0$. Une somme de nombres positifs est positive, et elle est nulle si et seulement si chaque terme est nul (sinon elle serait au moins égale à un terme strictement positif). ■

Tout, absolument tout, découle de cette remarque. Voici les conséquences à connaître instantanément.

Proposition 10.2.2 (Conséquences immédiates)

Pour tous réels a, b, c (et $a, b, c > 0$ là où c'est indiqué) :

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \qquad (10.1)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \qquad (10.2)$$

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \qquad (10.3)$$

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 \qquad (10.4)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad (ab > 0) \qquad (10.5)$$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad (a > 0) \qquad (10.6)$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \quad (a, b, c \geq 0) \qquad (10.7)$$

Dans chaque cas, l'égalité a lieu si et seulement si les variables concernées sont égales (pour (10.6), si et seulement si $a = 1$).

Démonstration. (10.1) s'écrit $(a-b)^2 \geq 0$. (10.2) s'écrit $\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$ (identité (1.1)). En ajoutant $2(ab + bc + ca)$ aux deux membres de (10.2), on obtient (10.3) ; en ajoutant $2(a^2 + b^2 + c^2)$, on obtient (10.4). (10.5) est (10.1) divisée par $ab > 0$; (10.6) est (10.5) avec $b = 1$. Pour (10.7), on multiplie $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $b + c \geq 2\sqrt{bc}$, $c + a \geq 2\sqrt{ca}$ (chacune équivaut à un carré positif, par exemple $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$), ce qui est permis car tous les membres sont positifs (règle 6). Les cas d'égalité découlent du théorème 10.2.1. ■

À retenir

L'inégalité (10.4) est parfois appelée *inégalité pratique* : elle sert dès qu'on veut passer d'une somme de carrés au carré d'une somme, ou l'inverse. La retenir sous la forme

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2.$$

Exemple 10.2.3 (Additionner des inégalités à deux termes). Montrer que $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$ pour tous réels a, b, c.

Solution. Par (10.2) appliquée à a^2, b^2, c^2 : $a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$. Par (10.2) appliquée à ab, bc, ca : $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq ab\cdot bc + bc\cdot ca + ca\cdot ab = abc(a+b+c)$. On enchaîne les deux inégalités.

10.3 Le second degré comme outil

Méthode 10.3.1 — Choisir une variable

Pour prouver $E(a,b,c) \geq 0$, on peut fixer deux variables et voir E comme un trinôme en la troisième. Il suffit alors de montrer que le coefficient dominant est > 0 et le discriminant ≤ 0 (théorème 1.3.1).

Exemple 10.3.2 (Quand la méthode échoue). *Montrer que* $a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca)$ *pour* $a,b,c \geq 0$.

Vue comme trinôme en a : $E = a^2 + 2a(bc-b-c) + (b^2+c^2-2bc+1)$, dont le discriminant réduit vaut $(bc-b-c)^2 - [(b-c)^2+1]$. Posons $s=b+c$, $p=bc$: il vaut $(p-s)^2-(s^2-4p)-1 = p^2-2ps+4p-1$. Pour conclure, il faudrait que ce nombre soit ≤ 0, ce qui n'est pas toujours vrai (par exemple pour $b=c=2$, il vaut $16-32+16-1=-1$, mais pour $b=c=\frac{1}{10}$, il vaut $\frac{1}{10^4}-\frac{4}{10^3}+\frac{4}{10^2}-1<0\ldots$ et pour $b=0$, $c=10$, il vaut -1) : l'analyse devient pénible, et la méthode n'aboutit pas simplement. Cette inégalité se démontre proprement avec l'inégalité de Schur (chapitre 15). Leçon : le discriminant est un outil rapide, mais pas universel — il faut savoir l'abandonner vite.

Exemple 10.3.3. *Montrer que pour tous réels* x, y *:* $x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4 \geq 1$.

Trinôme en x : l'expression s'écrit $x^2+2x(y+1)+(3y^2+6y+4)$. Son minimum en x vaut $3y^2+6y+4-(y+1)^2 = 2y^2+4y+3 = 2(y+1)^2+1 \geq 1$. Plus directement :

$$x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4 = (x+y+1)^2+2(y+1)^2+1 \geq 1,$$

avec égalité si et seulement si $y=-1$ et $x=0$.

10.4 Où chercher le cas d'égalité

Méthode 10.4.1 — Diagnostic préalable

Avant toute tentative de preuve, déterminer où se situe l'égalité (en testant $a=b=c$, puis $c=0$, puis $a=b$, c quelconque). Trois cas typiques :

- **égalité au centre** ($a=b=c$) : les outils symétriques fonctionnent (IA-G, Cauchy–Schwarz, Jensen, Muirhead) ;
- **égalité au bord** (une variable nulle, ou deux variables égales et la troisième différente) : IA-G directe échouera ; penser SOS, Schur ou uvw ;
- **égalité en un point asymétrique** : normaliser puis étudier une fonction d'une variable.

Le cas d'égalité indique aussi avec quels poids appliquer IA-G : chaque application d'une inégalité doit être une **égalité** au point d'égalité de l'énoncé, sinon la chaîne d'inégalités est trop faible.

Exemple 10.4.2 (Un mauvais découpage). Pour $a,b>0$ avec $a+b=1$, montrer que $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

Diagnostic. L'égalité a lieu pour $a = b = \frac{1}{2}$ ($2 \times \frac{25}{4} = \frac{25}{2}$). Utiliser $a + \frac{1}{a} \geq 2$ serait une erreur : cette inégalité n'est une égalité que pour $a = 1$, et elle ne donne que 8. *Preuve correcte.* Par (10.4) à deux variables, $X^2 + Y^2 \geq \frac{(X+Y)^2}{2}$; or $X + Y = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 + \frac{1}{ab} \geq 1 + 4 = 5$ car $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{4}$. Donc la somme est au moins $\frac{25}{2}$, avec égalité pour $a = b = \frac{1}{2}$.

10.5 Homogénéité et normalisation

Définition 10.5.1 (Inégalité homogène)

Une inégalité $F(a,b,c) \geq G(a,b,c)$ est **homogène de degré** d si remplacer (a,b,c) par (ta,tb,tc), $t > 0$, multiplie les deux membres par t^d.

Proposition 10.5.2 (Normalisation)

Si une inégalité homogène est vraie pour tous les triplets positifs vérifiant une condition de la forme $N(a,b,c) = 1$, où N est homogène de degré $k \neq 0$ et strictement positive, alors elle est vraie pour tous les triplets positifs.

Démonstration. Soit (a,b,c) quelconque et $t = N(a,b,c)^{-1/k}$. Le triplet (ta,tb,tc) vérifie $N(ta,tb,tc) = t^k N(a,b,c) = 1$, donc $F(ta,tb,tc) \geq G(ta,tb,tc)$, c'est-à-dire $t^d F(a,b,c) \geq t^d G(a,b,c)$, et l'on divise par $t^d > 0$. ∎

Méthode 10.5.3 — Deux mouvements inverses

- **Normaliser** : si l'inégalité est homogène, on peut imposer gratuitement une condition comme $a + b + c = 1$, $a + b + c = 3$, $abc = 1$ ou $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ (proposition 10.5.2). Choisir celle qui simplifie le plus.
- **Homogénéiser** : si une contrainte est donnée (par exemple $a + b + c = 3$), on peut la faire disparaître en multipliant les termes par les puissances adéquates de $\frac{a+b+c}{3}$ pour égaliser les degrés, puis appliquer les outils homogènes (Muirhead, Schur).

Exemple 10.5.4. *Soient $a, b, c > 0$ avec $a + b + c = 3$. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$.*

Homogénéisons : $3 = \frac{(a+b+c)^2}{3}$ sous la contrainte, donc l'inégalité à prouver est $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$, qui est l'inégalité pratique (10.4), valable sans contrainte.

Exemple 10.5.5 (Normaliser). Montrer que $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ pour $a, b, c \geq 0$.

Solution. L'inégalité est homogène de degré 3 ; on peut supposer $a + b + c = 3$ (le cas $a = b = c = 0$ étant trivial). Il faut alors montrer $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3$. Or, pour $x \geq 0$, $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) \geq 0$, donc $x^3 \geq 3x - 2$. En sommant : $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3(a + b + c) - 6 = 3$. (C'est la « méthode de la tangente », chapitre 14.)

À retenir — les réflexes du chapitre 10

- Tout se ramène à des **sommes de carrés**.

- Chercher le **cas d'égalité** avant tout, et n'utiliser que des inégalités qui sont des égalités en ce point.
- Homogène : normaliser ; non homogène sous contrainte : homogénéiser.

10.6 Exercices

Exercice 10.1 ★. Montrer que pour tous réels x, y : $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$.

Exercice 10.2 ★. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$ pour tous réels a, b, c.

Exercice 10.3 ★. Montrer que $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$ pour tout réel x.

Exercice 10.4 ★★. Soient $a, b, c > 0$. Montrer que $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ et préciser le cas d'égalité.

Exercice 10.5 ★★. Soient $a, b, c > 0$. Montrer que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

Exercice 10.6 ★★. Soient a, b, c des réels. Montrer que $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

Exercice 10.7 ★★. Soient $x, y, z > 0$ avec $x + y + z = 1$. Montrer que $\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right)\left(\frac{1}{z} - 1\right) \geq 8$.

Exercice 10.8 ★★★. Soient $a, b, c > 0$. Montrer que $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$.

Exercice 10.9 ★★★. Soient x, y, z des réels vérifiant $x + y + z = 0$. Montrer que $xy + yz + zx \leq 0$.

10.7 Solutions

Solution de l'exercice 10.1. On factorise :

$$x^4 + y^4 - x^3y - xy^3 = x^3(x - y) - y^3(x - y) = (x - y)(x^3 - y^3) = (x - y)^2(x^2 + xy + y^2) \geq 0,$$

car $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$ (exemple du chapitre 1).

Solution de l'exercice 10.2. $(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0$ donne exactement $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$.

Solution de l'exercice 10.3.

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{1 + x^2} = \frac{1 + x^2 - 2x}{2(1 + x^2)} = \frac{(x - 1)^2}{2(1 + x^2)} \geq 0.$$

Solution de l'exercice 10.4. Voir (10.7) : produit de $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ et de ses analogues, tous à membres positifs. Égalité si et seulement si $a = b = c$.

Solution de l'exercice 10.5. Par (10.5) appliquée aux trois paires :

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 3 + \sum_{\text{paires}} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 3 + 6 = 9.$$

Comme $a + b + c > 0$, on divise.

Solution de l'exercice 10.6. Par (10.2) appliquée à (a^2, b^2, c^2) : $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$. Puis, en appliquant encore (10.2) à (ab, bc, ca) :

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab = abc(a+b+c).$$

Solution de l'exercice 10.7. Comme $x+y+z=1$, $\frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} = \frac{y+z}{x}$. Le produit vaut donc

$$\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{xyz} \geq \frac{8xyz}{xyz} = 8$$

par (10.7). Égalité si et seulement si $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Solution de l'exercice 10.8. Posons $S = a^2+b^2+c^2$, $Q = ab+bc+ca$ et $P = (a+b)(b+c)(c+a)$. On sait que $S \geq Q$. Si $S \geq 2Q$, le premier terme est déjà ≥ 2 et c'est fini (le second est positif). Supposons donc $Q \leq S < 2Q$. L'inégalité demandée s'écrit

$$\frac{S-Q}{Q} \geq 1 - \frac{8abc}{P} = \frac{P-8abc}{P}.$$

Or, d'après l'identité (1.2), $P = (a+b+c)Q - abc$, et un calcul direct donne

$$P - 8abc = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2.$$

De plus, $S - Q = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$. L'inégalité devient

$$\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2Q} \geq \frac{a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2}{(a+b+c)Q - abc}.$$

Une comparaison terme à terme naïve échoue (elle demanderait $(a+b+c)Q - abc \geq 2Q\max(a,b,c)$, ce qui n'est pas toujours vrai) : il faut regrouper les trois termes en une seule expression SOS. En multipliant par $2QP > 0$, l'inégalité équivaut à

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0, \qquad \text{où } S_a = P - 2aQ = (b+c-a)Q - abc,$$

et S_b, S_c sont définis de même. L'expression étant symétrique, supposons $a \geq b \geq c$. Alors $S_c \geq aQ - abc \geq a \cdot bc - abc = 0$ et $S_b \geq cQ - abc \geq c \cdot ab - abc = 0$. De plus $S_a + S_b = 2cQ - 2abc = 2c^2(a+b) \geq 0$ et $(c-a)^2 \geq (b-c)^2$, donc

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 \geq (S_a + S_b)(b-c)^2 \geq 0,$$

ce qui conclut, puisque $S_c(a-b)^2 \geq 0$. Ce critère sera systématisé au chapitre 15 (méthode SOS). À ce stade du cours, retenir la stratégie : tout ramener à une combinaison de $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-a)^2$.

Solution de l'exercice 10.9. $0 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \geq 2(xy+yz+zx)$ puisque $x^2+y^2+z^2 \geq 0$. Donc $xy+yz+zx \leq 0$.

CHAPITRE 11

11 Les inégalités de moyennes

L'inégalité arithmético-géométrique (IA-G) est l'outil le plus utilisé en olympiade. Ce chapitre la démontre de trois manières (récurrence de Cauchy, lissage, inégalité de Bernoulli), puis l'étend aux poids réels et à toutes les moyennes de puissances. Les preuves sont complètes, cas d'égalité compris.

11.1 Les quatre moyennes

Définition 11.1.1 (Moyennes classiques)

Pour $x_1, \dots, x_n > 0$, on définit

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}, \qquad G = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}, \qquad A = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \qquad Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}},$$

appelées respectivement moyennes **harmonique**, **géométrique**, **arithmétique** et **quadratique**.

Chacune de ces moyennes est comprise entre $\min x_i$ et $\max x_i$, vaut c si tous les x_i valent c, et est **homogène** : multiplier tous les x_i par $\lambda > 0$ multiplie la moyenne par λ.

Théorème 11.1.2 (Inégalités entre moyennes)

Pour tous $x_1, \dots, x_n > 0$,

$$H \le G \le A \le Q,$$

et chacune de ces trois inégalités est une égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

Démonstration de G ≤ A par la récurrence de Cauchy. Notons $P(n)$ l'énoncé : pour tous $x_1, \dots, x_n > 0$, $x_1 \cdots x_n \le \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n$. On utilise la récurrence de Cauchy (théorème 4.1.2, forme 5). $P(1)$ est évidente.

$P(2)$. L'inégalité $x_1 x_2 \le \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2$ équivaut à $(x_1 - x_2)^2 \ge 0$.

$P(n) \Rightarrow P(2n)$. Notons A_1 et A_2 les moyennes arithmétiques de $x_1, \dots, x_n$ et de $x_{n+1}, \dots, x_{2n}$. Par $P(n)$ appliquée à chaque bloc, puis par $P(2)$ appliquée à A_1, A_2 :

$$x_1 \cdots x_{2n} \le A_1^n A_2^n = (A_1 A_2)^n \le \left(\frac{A_1 + A_2}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2n}}{2n}\right)^{2n}.$$

$P(n) \Rightarrow P(n-1)$ $(n \ge 2)$. Soient $x_1, \dots, x_{n-1} > 0$ et $A' = \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$. Appliquons $P(n)$ aux n nombres $x_1, \dots, x_{n-1}, A'$; leur moyenne arithmétique vaut $\frac{(n-1)A' + A'}{n} = A'$, donc $x_1 \cdots x_{n-1} A' \le A'^n$. En divisant par $A' > 0$, on obtient $x_1 \cdots x_{n-1} \le A'^{n-1}$, c'est-à-dire $P(n-1)$.

La récurrence de Cauchy donne $P(n)$ pour tout $n \ge 1$; en prenant la racine n-ième (fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$), on obtient $G \le A$. ∎

La récurrence de Cauchy ne se prête pas bien à l'étude du cas d'égalité. On le traite par une seconde démonstration, fondée sur une idée qui reviendra souvent : le **lissage**.

Deuxième démonstration de G ≤ A, avec le cas d'égalité (lissage). Soit A la moyenne arithmétique de $x_1, \dots, x_n$. On raisonne par récurrence sur le nombre k d'indices i tels que $x_i \neq A$; on montre que $x_1 \cdots x_n \leq A^n$, avec inégalité **stricte** dès que $k \geq 1$.

Si $k = 0$, tous les x_i valent A et il y a égalité. Supposons $k \geq 1$. Comme la somme des $x_i - A$ est nulle et que l'un d'eux est non nul, il existe un indice i avec $x_i < A$ et un indice j avec $x_j > A$. Remplaçons le couple (x_i, x_j) par $(A,\ x_i + x_j - A)$:

- la somme, donc la moyenne arithmétique, est inchangée ;
- les nouveaux nombres sont strictement positifs, car $x_i + x_j - A > x_i > 0$;
- le produit augmente strictement, puisque
$$A(x_i + x_j - A) - x_i x_j = (A - x_i)(x_j - A) > 0;$$
- le nombre d'indices différents de A diminue d'au moins 1.

Par hypothèse de récurrence, le nouveau produit est au plus A^n ; l'ancien produit, strictement plus petit, vérifie donc $x_1 \cdots x_n < A^n$.

Ainsi $G = A$ si et seulement si tous les x_i sont égaux. ■

Démonstration de H ≤ G. Appliquons $G \leq A$ aux nombres $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$:

$$\frac{1}{G} = \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_n}} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{H},$$

d'où $H \leq G$. Il y a égalité si et seulement si les $\frac{1}{x_i}$ sont égaux, c'est-à-dire si les x_i sont égaux. ■

Démonstration de A ≤ Q. En développant, et en utilisant $\sum x_i = nA$:

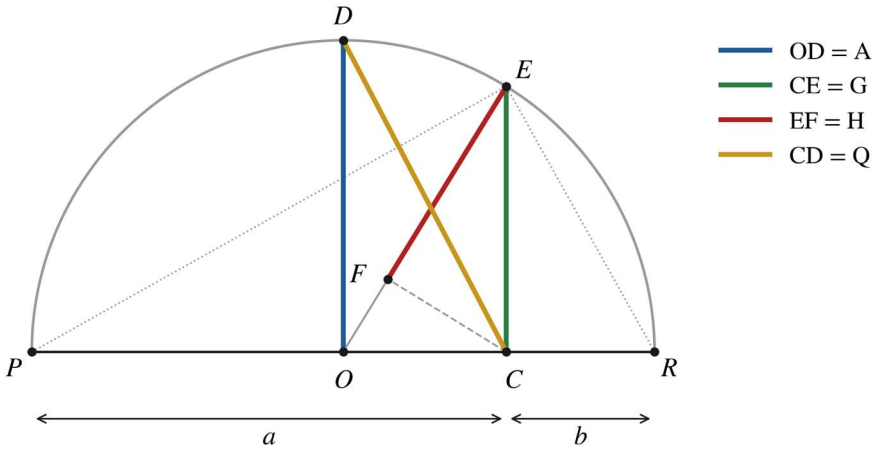
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - A)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2A}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + A^2 = Q^2 - 2A^2 + A^2 = Q^2 - A^2.$$

Le membre de gauche est une somme de carrés, donc $Q^2 \geq A^2$, puis $Q \geq A$ puisque $A, Q > 0$. Il y a égalité si et seulement si $x_i = A$ pour tout i. ■

L'identité de la variance.

L'identité $Q^2 - A^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - A)^2$ est plus précise que l'inégalité : elle mesure l'écart. Elle est encore vraie pour des réels de signes quelconques, et donne alors $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{n}$ (« inégalité pratique »).

Pour deux nombres, les quatre moyennes ont une interprétation géométrique classique, représentée ci-dessous.



Les quatre moyennes de deux nombres a et b dans un demi-cercle de diamètre a + b : EF = H, CE = G, OD = A, CD = Q.

Exemple 11.1.3 (Lecture de la figure). Soit $[PR]$ un segment, C le point de $[PR]$ tel que $PC = a$ et $CR = b$, O le milieu de $[PR]$ et Γ le demi-cercle de diamètre $[PR]$. Soient D le point de Γ situé sur la médiatrice de $[PR]$, E le point de Γ situé sur la perpendiculaire à (PR) en C, et F le projeté orthogonal de C sur (OE). Alors :

- $OD = \frac{a+b}{2} = A$ (rayon) ;
- $CE = \sqrt{ab} = G$, car le triangle PER est rectangle en E et $CE^2 = CP \cdot CR$ (relation de la hauteur) ;
- $EF = \frac{CE^2}{OE} = \frac{ab}{(a+b)/2} = H$, par la même relation dans le triangle OCE rectangle en C ;
- $CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = Q.$

Dans le triangle OCE rectangle en C, l'hypoténuse OE majore le côté CE, qui majore lui-même le segment EF (côté du triangle CEF rectangle en F) : $H \leq G \leq A$. Dans le triangle OCD rectangle en O, $CD \geq OD$: $A \leq Q$. Les égalités ont lieu exactement quand $C = O$, c'est-à-dire $a = b$.

11.2 L'inégalité arithmético-géométrique pondérée

On veut maintenant des **poids** réels quelconques. On passe par l'inégalité de Bernoulli.

Lemme 11.2.1 (Inégalité de Bernoulli, exposant réel)

Soit $r > 1$ un réel. Pour tout réel $t > -1$,

$$(1+t)^r \geq 1 + rt,$$

avec égalité si et seulement si $t = 0$.

Démonstration. Posons $\varphi(t) = (1+t)^r - 1 - rt$ sur $]-1, +\infty[$. La fonction φ est dérivable et

$$\varphi'(t) = r[(1+t)^{r-1} - 1].$$

Comme $r - 1 > 0$, la fonction $u \mapsto u^{r-1}$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$; donc $(1+t)^{r-1} < 1$ si $-1 < t < 0$ et $(1+t)^{r-1} > 1$ si $t > 0$. Ainsi φ est strictement décroissante sur $]-1, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$; elle atteint son minimum strict en 0, où $\varphi(0) = 0$. Donc $\varphi(t) > 0$ pour $t \neq 0$. ■

Théorème 11.2.2 (Inégalité arithmético-géométrique pondérée)

Soient $x_1, \dots, x_n > 0$ et des poids $w_1, \dots, w_n > 0$ tels que $w_1 + \cdots + w_n = 1$. Alors

$$x_1^{w_1} x_2^{w_2} \cdots x_n^{w_n} \leq w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n,$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

Démonstration. *Cas $n = 2$.* Il s'agit de montrer que $x^w y^{1-w} \leq wx + (1-w)y$ pour $x, y > 0$ et $0 < w < 1$. En divisant par y et en posant $u = \frac{x}{y}$, cela revient à

$$u^w \leq wu + 1 - w.$$

Appliquons le lemme 11.2.1 avec $r = \frac{1}{w} > 1$ et $1 + t = u^w$ (donc $t > -1$) : $u = (u^w)^{1/w} \geq 1 + \frac{u^w - 1}{w}$. En multipliant par $w > 0$: $wu \geq w + u^w - 1$, ce qui est l'inégalité voulue. Il y a égalité si et seulement si $t = 0$, soit $u^w = 1$, soit $u = 1$, c'est-à-dire $x = y$.

Récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivial. Supposons le résultat vrai pour $n - 1$ nombres ($n \geq 3$). Posons $s = 1 - w_n = w_1 + \cdots + w_{n-1} \in]0,1[$ et $g = \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{w_i/s}$. Les poids w_i/s ($i \leq n-1$) sont positifs et de somme 1 ; par hypothèse de récurrence,

$$g \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{w_i}{s} x_i.$$

Alors, par le cas $n = 2$ appliqué à g et x_n avec les poids s et w_n,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i} = g^s x_n^{w_n} \leq s\, g + w_n x_n \leq \sum_{i=1}^{n-1} w_i\, x_i + w_n x_n.$$

Il y a égalité si et seulement si les deux inégalités sont des égalités, c'est-à-dire $x_1 = \cdots = x_{n-1}$ (hypothèse de récurrence) et $g = x_n$; or si $x_1 = \cdots = x_{n-1} = c$, alors $g = c$, donc la condition est $x_1 = \cdots = x_n$. ■

Avec $w_i = \frac{1}{n}$, on retrouve $G \leq A$: c'est une **troisième démonstration** de l'IA-G, cas d'égalité compris.

Corollaire 11.2.3 (Inégalité de Young)

Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (exposants **conjugués**) et $u, v > 0$. Alors

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q},$$

avec égalité si et seulement si $u^p = v^q$.

Démonstration. Appliquons le théorème 11.2.2 à $x_1 = u^p$, $x_2 = v^q$ avec les poids $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$: $(u^p)^{1/p}(v^q)^{1/q} = uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$, avec égalité si et seulement si $u^p = v^q$. ■

L'inégalité de Young est l'ingrédient de la démonstration de l'inégalité de Hölder (chapitre 12).

Exemple 11.2.4 (Optimiser un produit sous contrainte). *Soient $x, y > 0$ tels que $x + y = 5$. Déterminer le maximum de $x^2 y^3$.*

Solution. On veut appliquer l'IA-G pondérée de sorte que la somme pondérée soit **constante**. Écrivons $x = 2 \cdot \frac{x}{2}$ et $y = 3 \cdot \frac{y}{3}$, puis appliquons l'IA-G aux cinq nombres $\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, \frac{y}{3}, \frac{y}{3}, \frac{y}{3}$:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 \left(\frac{y}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{2 \cdot \frac{x}{2} + 3 \cdot \frac{y}{3}}{5}\right)^5 = \left(\frac{x+y}{5}\right)^5 = 1.$$

Donc $x^2 y^3 \leq 4 \cdot 27 = 108$, avec égalité si et seulement si $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$, c'est-à-dire $x = 2$, $y = 3$. Le maximum vaut 108.

Plus généralement, sous la contrainte $x + y = s$, le produit $x^\alpha y^\beta$ $(\alpha, \beta > 0)$ est maximal pour $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$.

11.3 Les moyennes de puissances

Définition 11.3.1 (Moyenne d'ordre p)

Soient $x_1, \ldots, x_n > 0$. Pour tout réel $p \neq 0$, on pose

$$M_p = \left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{1/p},$$

et $M_0 = G$. On a $M_{-1} = H$, $M_1 = A$, $M_2 = Q$.

Théorème 11.3.2 (Inégalité des moyennes de puissances)

Pour tous réels $p < q$, on a $M_p \leq M_q$, avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

Démonstration. *Étape 1 : cas $0 < p < q$.* Posons $y_i = x_i^p$ et $r = \frac{q}{p} > 1$. L'inégalité $M_p \leq M_q$ s'écrit, après élévation à la puissance $q > 0$,

$$\left(\frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}\right)^r \leq \frac{y_1^r + \cdots + y_n^r}{n}.$$

Les deux membres sont multipliés par λ^r quand on remplace chaque y_i par λy_i ; on peut donc supposer que la moyenne des y_i vaut 1. Écrivons $y_i = 1 + t_i$; alors $t_i > -1$ et $\sum t_i = 0$. Par le lemme 11.2.1,

$$\sum_{i=1}^n y_i^r = \sum_{i=1}^n (1+t_i)^r \geq \sum_{i=1}^n (1 + r t_i) = n,$$

c'est-à-dire que le membre de droite est au moins 1, qui est le membre de gauche. L'égalité exige $t_i = 0$ pour tout i, soit $y_1 = \cdots = y_n$, soit $x_1 = \cdots = x_n$.

Étape 2 : cas $p < 0 < q$, et cas où p ou q est nul. Il suffit de montrer que $M_p \leq G$ pour $p < 0$ et que $G \leq M_q$ pour $q > 0$. L'IA-G appliquée aux nombres x_i^q donne $G^q \leq M_q^q$, donc $G \leq M_q$ (car $q > 0$). Appliquée aux nombres x_i^p, elle donne $G^p \leq M_p^p$; comme $p < 0$, l'élévation à la puissance $\frac{1}{p}$ renverse l'inégalité : $G \geq M_p$. Les cas d'égalité sont ceux de l'IA-G.

Étape 3 : cas $p < q < 0$. Notons $M_s(x)$ la moyenne d'ordre s des x_i et $\frac{1}{x}$ la famille des $\frac{1}{x_i}$. On vérifie directement que $M_s(x) = \frac{1}{M_{-s}(1/x)}$. Comme $0 < -q < -p$, l'étape 1 donne $M_{-q}(1/x) \leq M_{-p}(1/x)$, et en passant aux inverses, $M_p(x) \leq M_q(x)$. Le cas d'égalité est celui de l'étape 1. ∎

Moyennes d'ordre infini.

Soit $m = \max x_i$. Pour $p > 0$, on a $\frac{m^p}{n} \le \frac{1}{n}\sum x_i^p \le m^p$, donc $n^{-1/p} m \le M_p \le m$. Comme $n^{-1/p} \to 1$ quand $p \to +\infty$, on obtient $M_p \to \max x_i$; de même, $M_p \to \min x_i$ quand $p \to -\infty$. On pose donc $M_{+\infty} = \max x_i$ et $M_{-\infty} = \min x_i$, et la chaîne

$$\min x_i \le H \le G \le A \le Q \le \max x_i$$

résume le chapitre. On montre aussi, à l'aide du logarithme, que $M_p \to G$ quand $p \to 0$, ce qui justifie la convention $M_0 = G$; ce résultat n'est pas utilisé dans la suite.

11.4 Mettre en œuvre l'IA-G

Méthode 11.4.1 — Comment appliquer l'IA-G efficacement

1. **Repérer le cas d'égalité.** L'IA-G est une égalité quand les termes sont égaux : on découpe donc les termes pour qu'ils soient égaux au point d'égalité attendu.
2. **Découper.** Pour faire apparaître un monôme $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ avec $\alpha + \beta + \gamma = n$, on applique l'IA-G à α copies de a^n, β copies de b^n et γ copies de c^n : on obtient $\alpha a^n + \beta b^n + \gamma c^n \ge n\, a^\alpha b^\beta c^\gamma$.
3. **Équilibrer.** Pour minimiser $a + \frac{1}{a^2}$, on écrit $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, de sorte que le produit des termes soit constant.
4. **Rendre le produit (ou la somme) constant.** L'IA-G donne un minorant constant pour une somme dès que le produit des termes est constant, et un majorant constant pour un produit dès que la somme est constante.

Exemple 11.4.2. *Soient $a, b, c > 0$. Montrer que $a^3 + b^3 + c^3 \ge 3abc$, puis que $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 3$.*

La première inégalité est l'IA-G pour a^3, b^3, c^3. La seconde est l'IA-G pour $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$, dont le produit vaut 1. Dans les deux cas, l'égalité a lieu si et seulement si $a = b = c$.

Exemple 11.4.3. *Soient $a, b, c > 0$. Montrer que $a^2 b + b^2 c + c^2 a \ge 3abc$.*

Par l'IA-G : $\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3} \ge \sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} = \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc$.

Exemple 11.4.4. *Minimiser $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$ pour $x > 0$.*

L'égalité dans l'IA-G demande des termes égaux ; découpons $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$ afin que le produit des trois termes soit constant :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{4}{x^2} \ge 3\sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{4}{x^2}} = 3,$$

avec égalité si et seulement si $\frac{x}{2} = \frac{4}{x^2}$, c'est-à-dire $x^3 = 8$, soit $x = 2$. Le minimum vaut $f(2) = 3$.

Exemple 11.4.5. *Soient $a, b, c > 0$ avec $abc = 1$. Montrer que $a + b + c \le a^2 + b^2 + c^2$.*

Par l'inégalité $A \le Q$ (sous la forme de l'inégalité pratique), puis par l'IA-G :

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{a+b+c}{3}\cdot(a+b+c) \geq \sqrt[3]{abc}\cdot(a+b+c) = a+b+c.$$

Exemple 11.4.6. *Montrer que* $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ *pour* $n \geq 2$.

L'IA-G appliquée à $1,2,\ldots,n$, qui ne sont pas tous égaux (car $n \geq 2$), est stricte : $\sqrt[n]{n!} < \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n+1}{2}$.

Exemple 11.4.7 (Inégalité de Nesbitt). *Soient* $a,b,c>0$. *Montrer que* $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Solution. Posons $s = a+b+c$. En ajoutant 1 à chaque fraction, l'inégalité devient

$$s\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2}.$$

Appliquons $H \leq A$ aux trois nombres $b+c$, $c+a$, $a+b$, dont la somme vaut $2s$:

$$\frac{3}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}} \leq \frac{2s}{3},$$

ce qui est exactement l'inégalité voulue. Égalité si et seulement si $a+b=b+c=c+a$, c'est-à-dire $a=b=c$.

Exemple 11.4.8 (Une inégalité à contrainte). *Soient* $a,b,c>0$ *tels que* $a+b+c=3$. *Montrer que* $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca$.

Solution. On a $2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2) = 9-(a^2+b^2+c^2)$; il suffit donc de montrer que $\sum\left(a^2+2\sqrt{a}\right) \geq 9$. Par l'IA-G à trois termes :

$$a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a} \geq 3\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}} = 3a.$$

En sommant : $\sum\left(a^2+2\sqrt{a}\right) \geq 3(a+b+c) = 9$. Égalité si et seulement si $a^2=\sqrt{a}$ pour chaque variable, soit $a=b=c=1$. (Problème de l'olympiade de Russie 2002.)

À retenir — les réflexes du chapitre 11

- $\min \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq \max$, avec égalité si et seulement si tous les nombres sont égaux.
- Trois preuves de l'IA-G : récurrence de Cauchy, lissage, Bernoulli ; le lissage est une idée générale à retenir.
- IA-G pondérée : les poids permettent d'adapter l'inégalité au cas d'égalité ; Young en est le cas $n=2$.
- Avant d'appliquer l'IA-G, **repérer le cas d'égalité** et découper les termes en conséquence.

11.5 Exercices

Exercice 11.1 ★. Soient $a,b,c>0$ avec $a+b+c=3$. Montrer que $abc \leq 1$.

Exercice 11.2 ★. Minimiser $x+\frac{9}{x}$ pour $x>0$.

Exercice 11.3 ★. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ et $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$.

Exercice 11.4 ★★. Soient $a, b, c > 0$. Montrer que $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$.

Exercice 11.5 ★★. Soient $a, b, c > 0$ avec $abc = 1$. Montrer que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ et $a + b + c \geq 3$.

Exercice 11.6 ★★. Soient $x, y, z > 0$. Montrer, en utilisant IA-G, que $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$ (inégalité de Nesbitt).

Exercice 11.7 ★★. Soit $n \geq 1$. Montrer que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Exercice 11.8 ★★. Soient $a, b, c > 0$. Montrer que $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$.

Exercice 11.9 ★★★. Soient $a, b, c > 0$ avec $a + b + c = 1$. Montrer que $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64$.

Exercice 11.10 ★★★. Soient $x_1, \ldots, x_n > 0$ de produit 1. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-1+x_i} \leq 1$. (Difficile : commencer par $n = 2$, puis $n = 3$.)

Exercice 11.11 ★★★. Soient $a, b, c > 0$. Montrer, en utilisant l'inégalité $H \leq A$, que $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

11.6 Solutions

Solution de l'exercice 11.1. IA-G : $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} = 1$, donc $abc \leq 1$.

Solution de l'exercice 11.2. $x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{9} = 6$, avec égalité en $x = 3$. Le minimum vaut 6.

Solution de l'exercice 11.3. La première est (10.5). Pour la seconde : $\frac{a^2}{b} + b \geq 2a$ et $\frac{b^2}{a} + a \geq 2b$ (par IA-G). En additionnant : $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} + a + b \geq 2a + 2b$, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 11.4. Par IA-G, $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$. Le produit des deux donne une quantité ≥ 9.

Solution de l'exercice 11.5. IA-G : $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = 1$, et de même pour les inverses (dont le produit vaut aussi 1).

Solution de l'exercice 11.6. Posons $x + y = p$, $y + z = q$, $z + x = r$; alors $x = \frac{p-q+r}{2}$, etc., et

$$\sum \frac{x}{y+z} = \frac{p+r-q}{2q} + \frac{q+p-r}{2r} + \frac{r+q-p}{2p} = \frac{1}{2}\left[\frac{p}{q} + \frac{q}{p} + \frac{q}{r} + \frac{r}{q} + \frac{r}{p} + \frac{p}{r}\right] - \frac{3}{2},$$

d'où, par IA-G appliquée à chaque paire,

$$\sum \frac{x}{y+z} \geq \frac{1}{2} \cdot 6 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Solution de l'exercice 11.7. Utilisons la formule du binôme :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\, n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

(L'inégalité $k! \geq 2^{k-1}$ pour $k \geq 1$ est immédiate par récurrence.)

Solution de l'exercice 11.8. Par IA-G : $\frac{a^3+a^3+b^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^6b^3} = a^2b$. En écrivant les trois inégalités analogues (pour a^2b, b^2c, c^2a) et en les additionnant :

$$\frac{3a^3+3b^3+3c^3}{3} = a^3+b^3+c^3 \geq a^2b+b^2c+c^2a.$$

Solution de l'exercice 11.9. $1+\frac{1}{a} = \frac{a+1}{a} = \frac{a+a+b+c}{a}$ car $a+b+c=1$. Par IA-G au numérateur, $a+a+b+c \geq 4\sqrt[4]{a^2bc}$, donc

$$\prod\left(1+\frac{1}{a}\right) \geq \frac{4^3\sqrt[4]{a^2bc}\,\sqrt[4]{ab^2c}\,\sqrt[4]{abc^2}}{abc} = \frac{64\sqrt[4]{a^4b^4c^4}}{abc} = 64.$$

Égalité si et seulement si $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Solution de l'exercice 11.10. Traitons $n=2$: $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} \leq 1$ avec $xy=1$ équivaut, après réduction, à $2+x+y \leq 1+x+y+xy = 2+x+y$: égalité toujours.

Pour $n=3$, l'inégalité $\sum \frac{1}{2+x_i} \leq 1$ avec $x_1x_2x_3=1$ se réduit, en multipliant par $\prod(2+x_i)$, à

$$\sum_i \prod_{j\neq i}(2+x_j) \leq \prod_i (2+x_i),$$

c'est-à-dire, en développant avec $e_1=\sum x_i$, $e_2=\sum x_ix_j$, $e_3=1$:

$$12+4e_1+e_2 \leq 8+4e_1+2e_2+1 \Leftrightarrow 3 \leq e_2,$$

ce qui est IA-G ($e_2 \geq 3\sqrt[3]{e_3^2} = 3$).

Le cas général se traite de même. Notons $e_0=1, e_1, \ldots, e_n$ les fonctions symétriques élémentaires des x_i. En développant $\prod(n-1+x_i) = \sum_k (n-1)^{n-k}\, e_k$ et $\sum_i \prod_{j\neq i}(n-1+x_j) = \sum_k (n-k)\,(n-1)^{n-1-k} e_k$, puis en multipliant par $n-1$, l'inégalité équivaut à

$$\sum_{k=2}^{n} (k-1)\,(n-1)^{n-k} e_k \geq (n-1)^n.$$

Tous les coefficients sont positifs, et IA-G appliquée aux $\binom{n}{k}$ produits de k facteurs (dont le produit vaut 1) donne $e_k \geq \binom{n}{k}$. Il suffit donc de vérifier l'inégalité lorsque tous les x_i valent 1, où elle est une égalité. Pour $n \geq 3$, il y a égalité si et seulement si tous les x_i valent 1 (car $e_2 = \binom{n}{2}$ l'impose) ; pour $n=2$, on a vu que l'égalité a toujours lieu.

Solution de l'exercice 11.11. Par $H \leq A$ appliquée à $b+c$, $c+a$, $a+b$:

$$\frac{3}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}} \leq \frac{2(a+b+c)}{3} \Rightarrow \frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Or, en posant $s=a+b+c$,

$$\sum \frac{a}{b+c} = \sum \frac{s-(b+c)}{b+c} = s\sum \frac{1}{b+c} - 3 \geq s\cdot\frac{9}{2s} - 3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

CHAPITRE 12

12 Cauchy–Schwarz, Hölder, Minkowski

Les inégalités de ce chapitre comparent une somme de **produits** à des produits de **sommes**. Elles ont une interprétation géométrique : dans $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire de deux vecteurs est au plus le produit de leurs normes (Cauchy–Schwarz), et la longueur d'un côté d'un triangle est au plus la somme des deux autres (Minkowski). Hölder est la généralisation de Cauchy–Schwarz à d'autres exposants.

12.1 L'inégalité de Cauchy–Schwarz

Théorème 12.1.1 (Inégalité de Cauchy–Schwarz)

Pour tous réels $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

avec égalité si et seulement si les familles (a_i) et (b_i) sont **proportionnelles**, c'est-à-dire s'il existe $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ tel que $\lambda a_i = \mu b_i$ pour tout i.

Première démonstration : l'identité de Lagrange. Par l'identité de Lagrange (théorème 1.1.8),

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i\right)^2 = \sum_{1 \le i < j \le n} \left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 \ge 0.$$

Il y a égalité si et seulement si $a_i b_j = a_j b_i$ pour tous $i < j$. Si tous les a_i sont nuls, c'est vrai et les familles sont proportionnelles ($\lambda = 1$, $\mu = 0$). Sinon, soit k tel que $a_k \neq 0$; les relations $a_k b_j = a_j b_k$ donnent $b_j = \frac{b_k}{a_k} a_j$ pour tout j, donc (b_i) est proportionnelle à (a_i). La réciproque est immédiate. ∎

Deuxième démonstration : le discriminant. Si tous les a_i sont nuls, l'inégalité est une égalité. Sinon, posons $\alpha = \sum a_i^2 > 0$, $\beta = \sum a_i b_i$, $\gamma = \sum b_i^2$. Pour tout réel t,

$$T(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2 = \alpha t^2 + 2\beta t + \gamma \ge 0.$$

Un trinôme de coefficient dominant $\alpha > 0$ qui ne prend que des valeurs positives a un discriminant réduit négatif ou nul (sinon il aurait deux racines distinctes et serait strictement négatif entre elles) : $\beta^2 - \alpha\gamma \le 0$, ce qui est l'inégalité.

Il y a égalité si et seulement si le discriminant est nul, c'est-à-dire si T a une racine (double) t_0 : alors $\sum (a_i t_0 + b_i)^2 = 0$, donc $b_i = -t_0 a_i$ pour tout i. Réciproquement, si $b_i = c a_i$ pour tout i, alors $T(-c) = 0$. ∎

Troisième démonstration : normalisation et IA-G. Si l'une des familles est nulle, il n'y a rien à démontrer. Sinon, posons $A = \sqrt{\sum a_i^2}$, $B = \sqrt{\sum b_i^2}$ et $u_i = \frac{a_i}{A}$, $v_i = \frac{b_i}{B}$, de sorte que $\sum u_i^2 = \sum v_i^2 = 1$. Par l'inégalité $2uv \le u^2 + v^2$,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i\, v_i \le \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^2 + v_i^2}{2} = 1,$$

donc $\sum a_i b_i \le AB$. Appliquée à $(-a_i)$, la même inégalité donne $-\sum a_i b_i \le AB$, d'où $|\sum a_i b_i| \le AB$. ■

Cette troisième preuve, par **normalisation**, est celle qui se généralise à Hölder (section 12.2).

Lemme 12.1.2 (Forme d'Engel, ou lemme de Titu)

Pour tous réels $x_1, \dots, x_n$ et tous réels $y_1, \dots, y_n > 0$:

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \ge \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n},$$

avec égalité si et seulement si $\frac{x_1}{y_1} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$.

Démonstration. Appliquons le théorème 12.1.1 à $a_i = \frac{x_i}{\sqrt{y_i}}$ et $b_i = \sqrt{y_i}$; comme $a_i b_i = x_i$,

$$(\sum x_i)^2 \le \left(\sum \frac{x_i^2}{y_i}\right)(\sum y_i),$$

et il suffit de diviser par $\sum y_i > 0$. Comme les b_i ne sont pas tous nuls, il y a égalité si et seulement s'il existe c tel que $a_i = c b_i$ pour tout i, c'est-à-dire $x_i = c y_i$. ■

À retenir

La forme d'Engel est l'outil le plus rentable de tout le cours d'inégalités. Dès qu'une somme de fractions apparaît avec des carrés au numérateur, ou qu'on peut en fabriquer, elle s'applique. Réflexe : écrire $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab}$.

Exemple 12.1.3 (Nesbitt, deuxième démonstration). *Soient $a, b, c > 0$. Montrer que $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$.*

Écrivons $\frac{a}{b+c} = \frac{a^2}{a(b+c)}$. Par la forme d'Engel,

$$\sum \frac{a^2}{a(b+c)} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \ge \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2},$$

la dernière étape étant (10.3). (La première démonstration, par $H \le A$, est l'exemple 11.4.7.)

Exemple 12.1.4. *Soient $a, b, c > 0$. Montrer que $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \ge \frac{a+b+c}{2}$.*

La forme d'Engel s'applique directement : la somme est au moins $\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2}$.

Exemple 12.1.5 (OIM 1995, problème 2). *Soient $a, b, c > 0$ avec $abc = 1$. Montrer que*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}.$$

Solution. Posons $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$, de sorte que $xyz = 1$. Alors

$$\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{x^3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = \frac{x^3yz}{y+z} = \frac{x^2\cdot xyz}{y+z} = \frac{x^2}{y+z}.$$

L'inégalité devient $\sum \frac{x^2}{y+z} \geq \frac{3}{2}$. Par la forme d'Engel, puis par l'IA-G,

$$\sum \frac{x^2}{y+z} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Égalité si et seulement si $x=y=z=1$, c'est-à-dire $a=b=c=1$.

Ce problème est un modèle : substitution pour exploiter $abc=1$, puis forme d'Engel, puis IA-G.

Exemple 12.1.6 (Somme et somme des inverses). *Soient $x_1,\dots,x_n>0$. Montrer que $(x_1+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2$.*

C'est Cauchy–Schwarz avec $a_i=\sqrt{x_i}$ et $b_i=\frac{1}{\sqrt{x_i}}$, pour lesquels $a_ib_i=1$. C'est aussi l'inégalité $H\leq A$ du théorème 11.1.2. Égalité si et seulement si tous les x_i sont égaux.

12.2 L'inégalité de Hölder

Théorème 12.2.1 (Inégalité de Hölder)

Soient $p,q>1$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, et $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\geq 0$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\,b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

Pour $p=q=2$, on retrouve Cauchy–Schwarz (pour des réels positifs).

Démonstration. Posons $A=\left(\sum a_i^p\right)^{1/p}$ et $B=\left(\sum b_i^q\right)^{1/q}$. Si $A=0$, tous les a_i sont nuls et l'inégalité est une égalité ; de même si $B=0$. Sinon, on normalise : $u_i=\frac{a_i}{A}$, $v_i=\frac{b_i}{B}$, de sorte que $\sum u_i^p=\sum v_i^q=1$. Par l'inégalité de Young (corollaire 11.2.3), valable aussi lorsque u_i ou v_i est nul,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i\,v_i \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i^p}{p}+\frac{v_i^q}{q}\right) = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

En multipliant par AB, on obtient $\sum a_ib_i\leq AB$.

Il y a égalité si et seulement si $u_i^p=v_i^q$ pour tout i (cas d'égalité de Young ; si $u_iv_i=0$, l'égalité $0=\frac{u_i^p}{p}+\frac{v_i^q}{q}$ impose $u_i=v_i=0$), c'est-à-dire si les familles $\left(a_i^p\right)$ et $\left(b_i^q\right)$ sont proportionnelles. ∎

En compétition, on utilise surtout la version « à plusieurs familles » suivante, dont la preuve n'utilise que l'IA-G.

Théorème 12.2.2 (Hölder à plusieurs familles)

Soient $m\geq 2$ et, pour $1\leq k\leq m$, une famille $\left(a_{k,1},\dots,a_{k,n}\right)$ de réels positifs. Alors

$$\prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{k,i}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt[m]{a_{1,i}a_{2,i}\cdots a_{m,i}}\right)^{m}.$$

Pour trois familles : $(\sum a_i)(\sum b_i)(\sum c_i) \geq \left(\sum \sqrt[3]{a_i b_i c_i}\right)^3$.

Démonstration. Notons $S_k = \sum_i a_{k,i}$. Si l'un des S_k est nul, toute la famille k est nulle et les deux membres sont nuls. Sinon, par l'IA-G appliquée, pour chaque i, aux m nombres $\frac{a_{k,i}}{S_k}$ $(1 \leq k \leq m)$:

$$\sqrt[m]{\frac{a_{1,i}}{S_1}\cdots\frac{a_{m,i}}{S_m}} \leq \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{a_{k,i}}{S_k}.$$

En sommant sur i, le membre de droite donne $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{S_k}{S_k} = 1$. Donc $\sum_i \sqrt[m]{a_{1,i}\cdots a_{m,i}} \leq \sqrt[m]{S_1\cdots S_m}$, et il reste à élever à la puissance m. ■

Exemple 12.2.3 (OIM 2001, problème 2). *Soient $a, b, c > 0$. Montrer que*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Solution. Notons S le membre de gauche. Appliquons le théorème 12.2.2 à trois familles : deux fois la famille des termes de S, et la famille $t_a = a(a^2+8bc)$, $t_b = b(b^2+8ca)$, $t_c = c(c^2+8ab)$. Pour le premier indice,

$$\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\cdot a(a^2+8bc)} = \sqrt[3]{a^3} = a,$$

et de même pour les autres. Donc

$$S^2 \cdot [a(a^2+8bc) + b(b^2+8ca) + c(c^2+8ab)] \geq (a+b+c)^3.$$

Il suffit donc de montrer que $(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc$. Or

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3\sum_{\text{sym}} a^2 b + 6abc,$$

où $\sum_{\text{sym}} a^2 b = a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$. L'inégalité équivaut donc à $3\sum_{\text{sym}} a^2 b \geq 18abc$, c'est-à-dire $\sum_{\text{sym}} a^2 b \geq 6abc$, qui est l'IA-G pour ces six termes (leur produit vaut $(abc)^6$). Égalité si et seulement si $a = b = c$.

Corollaire 12.2.4 (Formes d'Engel généralisées)

Pour tous $x_i \geq 0$ et $y_i > 0$:

$$\left(\sum \frac{x_i^2}{y_i}\right)(\sum y_i) \geq (\sum x_i)^2, \qquad \left(\sum \frac{x_i^3}{y_i^2}\right)(\sum y_i)^2 \geq (\sum x_i)^3.$$

Démonstration. La première est le théorème 12.2.2 avec $m = 2$, $a_{1,i} = \frac{x_i^2}{y_i}$ et $a_{2,i} = y_i$, pour lesquels $\sqrt{a_{1,i}a_{2,i}} = x_i$. La seconde s'obtient avec $m = 3$, $a_{1,i} = \frac{x_i^3}{y_i^2}$ et $a_{2,i} = a_{3,i} = y_i$, pour lesquels $\sqrt[3]{a_{1,i}a_{2,i}a_{3,i}} = x_i$. ■

Méthode 12.2.5 — Choisir les familles dans Hölder

Pour minorer une somme $S = \sum s_i$ de termes compliqués, on cherche une famille auxiliaire (t_i) telle que $s_i \cdot s_i \cdot t_i$ (ou $s_i \cdot t_i$) soit **simple**. Hölder donne alors $S^2 \sum t_i \geq \left(\sum \sqrt[3]{s_i^2 t_i}\right)^3$, et il reste une inégalité polynomiale.

12.3 L'inégalité de Minkowski

Théorème 12.3.1 (Inégalité de Minkowski)

Pour tout réel $p \geq 1$ et tous $a_i, b_i \geq 0$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}.$$

Pour $p = 2$, l'inégalité est vraie pour des réels de signes quelconques : c'est l'**inégalité triangulaire** dans $\mathbb{R}^n$,

$$\sqrt{\sum (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}.$$

Démonstration pour p = 2. Les deux membres étant positifs, il suffit de comparer leurs carrés :

$$\sum (a_i + b_i)^2 = \sum a_i^2 + 2\sum a_i b_i + \sum b_i^2 \leq \sum a_i^2 + 2\sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2} + \sum b_i^2,$$

par Cauchy–Schwarz ; le membre de droite est $\left(\sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}\right)^2$. ∎

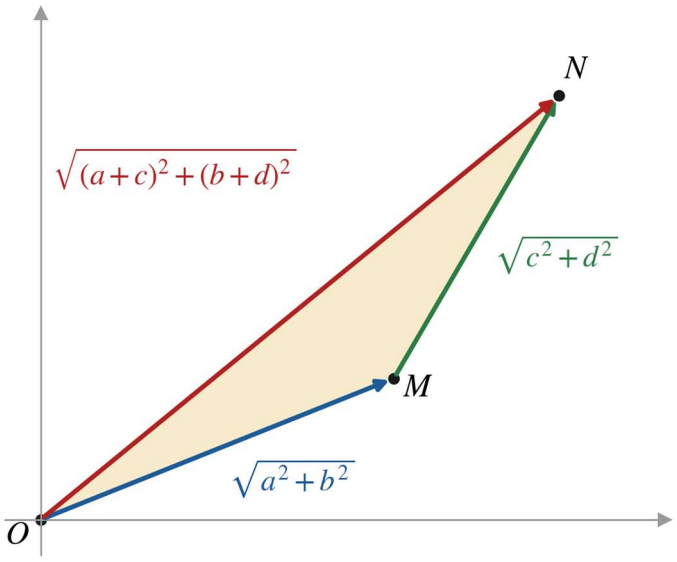
Démonstration pour p ≥ 1 quelconque. Pour $p = 1$, il y a égalité. Soit $p > 1$ et $q = \frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $(p-1)q = p$. Posons $S = \sum (a_i + b_i)^p$; si $S = 0$, il n'y a rien à démontrer. Sinon,

$$S = \sum a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum b_i (a_i + b_i)^{p-1}.$$

Appliquons Hölder (théorème 12.2.1) à chacune des deux sommes, avec les exposants p et q :

$$\sum a_i (a_i + b_i)^{p-1} \leq \left(\sum a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum (a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q} = \left(\sum a_i^p\right)^{1/p} S^{1/q},$$

et de même pour la seconde. Donc $S \leq \left[\left(\sum a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum b_i^p\right)^{1/p}\right] S^{1/q}$. En divisant par $S^{1/q} > 0$ et en utilisant $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, on obtient l'inégalité. ∎



Minkowski pour p = 2 : la ligne brisée OMN est plus longue que le segment [ON].

Exemple 12.3.2. *Montrer que pour $a, b, c, d > 0$:*

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}.$$

C'est Minkowski avec $p = 2$ et $n = 2$. Interprétation géométrique (figure ci-dessus) : avec $O = (0,0)$, $M = (a, b)$ et $N = (a + c, b + d)$, le membre de gauche est $OM + MN$ et le membre de droite est ON. On peut aussi l'écrire $|z| + |w| \geq |z + w|$ avec $z = a + ib$, $w = c + id$ (chapitre 9).

Exemple 12.3.3 (Minimiser une somme de distances). *Déterminer le minimum de $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(3 - x)^2 + 4}$ pour $x \in \mathbb{R}$.*

Solution. Par Minkowski (forme triangulaire, valable pour des réels quelconques) appliquée aux vecteurs $(x, 1)$ et $(3 - x, 2)$:

$$f(x) \geq \sqrt{\big(x + (3 - x)\big)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

L'égalité a lieu quand les vecteurs sont positivement proportionnels : $\frac{x}{1} = \frac{3-x}{2}$, soit $x = 1$. On vérifie : $f(1) = \sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2}$. Le minimum vaut $3\sqrt{2}$.

À retenir — les réflexes du chapitre 12

- Cauchy–Schwarz : trois preuves (Lagrange, discriminant, normalisation) ; égalité pour des familles proportionnelles.
- Forme d'Engel : $\sum \frac{x_i^2}{y_i} \geq \frac{(\sum x_i)^2}{\sum y_i}$; réflexe $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab}$.
- Hölder : normalisation puis Young ou IA-G ; choisir une famille auxiliaire qui simplifie les racines.
- Minkowski : inégalité triangulaire ; les sommes de racines de sommes de carrés sont des longueurs.

12.4 Exercices

Exercice 12.1 ★. Montrer que $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.

Exercice 12.2 ★. Soient $x, y, z > 0$ avec $x + y + z = 1$. Montrer que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9$ à l'aide d'Engel.

Exercice 12.3 ★★. Soient $a, b, c > 0$. Montrer que $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$.

Exercice 12.4 ★★. Soient $a, b, c > 0$ avec $a + b + c = 3$. Montrer que $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$. (Indication : $\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2}$.)

Exercice 12.5 ★★. Soient $n \geq 2$ et $a_1, \ldots, a_n > 0$ de somme S. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S-a_i} \geq \frac{n}{n-1}$.

Exercice 12.6 ★★. Soient $x, y, z > 0$. Montrer que $\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \geq 1$.

Exercice 12.7 ★★★ (OIM 1995). Soient $a, b, c > 0$ avec $abc = 1$. Montrer que $\sum \frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{3}{2}$.

Exercice 12.8 ★★★ (OIM 2001). Soient $a, b, c > 0$. Montrer que $\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq 1$.

Exercice 12.9 ★★★. Soient $a, b, c > 0$ avec $a + b + c = 1$. Montrer que $\sqrt{\frac{a}{a+2b}} + \sqrt{\frac{b}{b+2c}} + \sqrt{\frac{c}{c+2a}} \geq 1$.

Exercice 12.10 ★★★ (OIM 2005, problème 3). Soient $x, y, z > 0$ avec $xyz \geq 1$. Montrer que

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

12.5 Solutions

Solution de l'exercice 12.1. Cauchy–Schwarz avec $(1,1)$ et (a, b) : $(a + b)^2 \leq (1 + 1)(a^2 + b^2)$.

Solution de l'exercice 12.2. Engel : $\frac{1^2}{x} + \frac{1^2}{y} + \frac{1^2}{z} \geq \frac{(1+1+1)^2}{x+y+z} = 9$.

Solution de l'exercice 12.3. Engel : $\sum \frac{a^2}{b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c} = a + b + c$.

Solution de l'exercice 12.4. Comme suggéré, $\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2}$. Or $1 + b^2 \geq 2b$, donc $\frac{ab^2}{1+b^2} \leq \frac{ab^2}{2b} = \frac{ab}{2}$. Ainsi

$$\sum \frac{a}{1 + b^2} \geq (a + b + c) - \frac{ab + bc + ca}{2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2},$$

car $ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$.

Solution de l'exercice 12.5. Engel : $\sum \frac{a_i}{S-a_i} = \sum \frac{a_i^2}{a_i(S-a_i)} \geq \frac{S^2}{\sum a_i(S-a_i)} = \frac{S^2}{S^2 - \sum a_i^2}$. Or $\sum a_i^2 \geq \frac{S^2}{n}$, donc le dénominateur est $\leq S^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, d'où le résultat $\geq \frac{n}{n-1}$.

Solution de l'exercice 12.6. Engel : $\sum \frac{x}{y+2z} = \sum \frac{x^2}{x(y+2z)} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\sum x(y+2z)}$. Or $\sum x(y + 2z) = xy + 2xz + yz + 2xy + zx + 2zy = 3(xy + yz + zx)$. Comme $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$, la somme est ≥ 1.

Solution de l'exercice 12.7. Voir l'exemple 12.1.5.

Solution de l'exercice 12.8. Voir l'exemple 12.2.3.

Solution de l'exercice 12.9. Comme $0 < a < 1$, on a $\sqrt{a} > a$, donc $\sqrt{\frac{a}{a+2b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+2b}} > \frac{a}{\sqrt{a+2b}}$. Il suffit donc de montrer que $T = \sum \frac{a}{\sqrt{a+2b}} \geq 1$. Par Hölder (version à trois facteurs) :

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt{a+2b}}\right)^2 \left(\sum a(a+2b)\right) \geq (a+b+c)^3 = 1.$$

Or $\sum a(a+2b) = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 = 1$. Donc $T^2 \geq 1$, et la somme T, positive, est ≥ 1, avec égalité si et seulement si $a = b = c = \frac{1}{3}$. L'inégalité de l'énoncé est donc même stricte.

Solution de l'exercice 12.10. Remarquons d'abord que

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5+y^2+z^2} = 1 - \frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}.$$

L'inégalité à prouver équivaut donc à

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{x^5+y^2+z^2} \leq \frac{3}{x^2+y^2+z^2}.$$

Par Cauchy–Schwarz,

$$(x^5+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x}+y^2+z^2\right) \geq (x^2+y^2+z^2)^2,$$

donc

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2} \leq \frac{\frac{1}{x}+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

En sommant cycliquement et en notant $S = x^2+y^2+z^2$:

$$\sum \frac{1}{x^5+y^2+z^2} \leq \frac{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+2S}{S^2}.$$

Il suffit donc que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+2S \leq 3S$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq x^2+y^2+z^2.$$

Or $xyz \geq 1$ donne $\frac{1}{x} = \frac{yz}{xyz} \leq yz$, donc $\sum \frac{1}{x} \leq xy+yz+zx \leq x^2+y^2+z^2$ par (10.2).

CHAPITRE 13

13 Inégalités liées à l'ordre

Lorsqu'on associe les éléments de deux familles de nombres deux à deux, la somme des produits est la plus grande quand on associe le plus grand au plus grand, et la plus petite quand on associe le plus grand au plus petit. Ce principe intuitif, l'**inégalité de réarrangement**, suffit à démontrer une grande partie des inégalités classiques.

13.1 L'inégalité de réarrangement

Dans ce chapitre, une **permutation** de $[\![1,n]\!]$ est une bijection σ de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même. Une **inversion** de σ est un couple (i,j) tel que $i<j$ et $\sigma(i)>\sigma(j)$; l'identité est la seule permutation sans inversion (une permutation sans inversion est strictement croissante de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même, donc égale à l'identité).

Théorème 13.1.1 (Inégalité de réarrangement)

Soient $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ et $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$ des réels, et soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$. Alors

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{n+1-i}}_{\text{ordre opposé}} \le \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{\sigma(i)} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i}_{\text{même ordre}}.$$

Si de plus les a_i sont deux à deux distincts et les b_i aussi, l'inégalité de droite est stricte pour σ différente de l'identité.

Démonstration. *Lemme d'échange.* Soit σ une permutation et (i,j) une inversion de σ. Notons σ' la permutation obtenue en échangeant les valeurs $\sigma(i)$ et $\sigma(j)$. Seuls deux termes changent, et

$$S(\sigma') - S(\sigma) = a_i b_{\sigma(j)} + a_j b_{\sigma(i)} - a_i b_{\sigma(i)} - a_j b_{\sigma(j)} = \big(a_j - a_i\big)\big(b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)}\big) \ge 0,$$

où $S(\sigma) = \sum a_i b_{\sigma(i)}$, car $a_j \ge a_i$ et $b_{\sigma(i)} \ge b_{\sigma(j)}$. De plus, σ' a **strictement moins d'inversions** que σ. En effet, les couples ne faisant intervenir ni i ni j ne changent pas ; (i,j) cesse d'être une inversion ; pour k en dehors de l'intervalle $[i,j]$, les couples formés avec i et avec j sont simplement échangés entre eux ; enfin, pour $i<k<j$, comptons les inversions parmi les couples (i,k) et (k,j) :

- si $\sigma(k)<\sigma(j)$: une inversion avant (le couple (i,k)), une après (le couple (i,k)) ;
- si $\sigma(j)<\sigma(k)<\sigma(i)$: deux inversions avant, aucune après ;
- si $\sigma(k)>\sigma(i)$: une inversion avant (le couple (k,j)), une après (le couple (k,j)).

Le nombre total d'inversions diminue donc d'au moins 1.

Majoration. L'ensemble des permutations est fini. Parmi celles qui **maximisent** S, choisissons-en une, τ, ayant le moins d'inversions possible. Si τ avait une inversion, le lemme fournirait τ' avec $S(\tau') \ge S(\tau)$, donc τ' maximiserait aussi S, avec moins d'inversions : contradiction. Donc τ est l'identité, et $S(\sigma) \le S(\mathrm{id}) = \sum a_i b_i$ pour toute σ.

Minoration. Appliquons la majoration aux familles (a_i) et $(-b_{n+1-i})$, toutes deux croissantes. Pour toute permutation σ, la permutation $\rho(i) = n+1-\sigma(i)$ vérifie $\sum a_i\big(-b_{n+1-\rho(i)}\big) = -\sum a_i b_{\sigma(i)}$, donc $-\sum a_i b_{\sigma(i)} \le -\sum a_i b_{n+1-i}$.

Cas strict. Si les a_i et les b_i sont distincts et $\sigma \neq \mathrm{id}$, on part de σ et l'on applique le lemme tant qu'il reste une inversion. Le nombre d'inversions diminue à chaque étape, donc on atteint l'identité en un nombre fini d'étapes ; la première étape augmente strictement S, car $(a_j - a_i)(b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)}) > 0$, et les suivantes ne la diminuent pas. Donc $S(\sigma) < S(\mathrm{id})$. ■

Pourquoi le lemme d'échange est-il intuitif ?.

Pour deux indices seulement, la somme $a_1b_1 + a_2b_2$ est l'aire totale de deux rectangles de côtés $a_1 \times b_1$ et $a_2 \times b_2$. Associer le plus grand côté au plus grand côté donne plus d'aire : c'est l'identité $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \geq 0$. L'inégalité générale s'obtient en répétant cet échange.

Méthode 13.1.2 — Utiliser le réarrangement

1. Si l'inégalité est **symétrique**, on peut supposer $a \geq b \geq c$ sans perte de généralité : c'est l'hypothèse d'ordre dont le théorème a besoin. Si elle est seulement **cyclique**, il faut distinguer $a \geq b \geq c$ et $a \geq c \geq b$.
2. Repérer deux familles ordonnées dans le même sens, par exemple (a, b, c) et (a^2, b^2, c^2) pour des réels positifs, ou (a, b, c) et $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\right)$.
3. Écrire l'inégalité voulue comme la comparaison de deux appariements.

Exemple 13.1.3. *Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ par réarrangement.*

Appliquons le théorème à la famille (a, b, c), rangée dans l'ordre croissant, et à elle-même. Le membre de gauche est l'appariement « même ordre » ; $ab + bc + ca$ est l'appariement associé à une permutation circulaire. Il est donc plus petit.

Exemple 13.1.4 (OIM 1975, problème 1). *Soient $x_1 \geq \cdots \geq x_n$ et $y_1 \geq \cdots \geq y_n$ des réels, et (z_i) une permutation des (y_i). Montrer que*

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2.$$

En développant, et comme $\sum y_i^2 = \sum z_i^2$, l'inégalité équivaut à $\sum x_i z_i \leq \sum x_i y_i$: c'est exactement le réarrangement, le maximum étant atteint pour l'appariement dans le même ordre.

Exemple 13.1.5 (OIM 1978, problème 5). *Soient $x_1, \ldots, x_n$ des entiers strictement positifs distincts. Montrer que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ la suite croissante obtenue en réordonnant les x_k. La famille $\left(\frac{1}{k^2}\right)$ est décroissante ; par réarrangement (minoration), la somme $\sum \frac{x_k}{k^2}$ est minimale lorsque les x_k sont rangés dans l'ordre croissant, donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}.$$

Or les a_k sont des entiers strictement positifs, distincts et rangés dans l'ordre croissant, donc $a_k \geq k$ (par récurrence : $a_1 \geq 1$ et $a_{k+1} \geq a_k + 1$). D'où $\sum \frac{a_k}{k^2} \geq \sum \frac{k}{k^2} = \sum \frac{1}{k}$.

Exemple 13.1.6 (Une inégalité cyclique). *Soient $a, b, c > 0$. Montrer que $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$.*

Les familles (a^2, b^2, c^2) et (a, b, c) sont rangées dans le même ordre, quel que soit cet ordre (car $t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$). Le membre de gauche $a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c$ est l'appariement « même ordre » ; le membre de droite $a^2 \cdot b + b^2 \cdot c + c^2 \cdot a$ est un autre appariement. Aucune hypothèse d'ordre n'est nécessaire, car le théorème compare **toutes** les permutations à l'appariement « même ordre ».

13.2 L'inégalité de Tchebychev

Théorème 13.2.1 (Inégalité de Tchebychev)

Si $a_1 \geq \cdots \geq a_n$ et $b_1 \geq \cdots \geq b_n$, alors

$$n \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \geq n \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{n+1-i}.$$

L'inégalité de gauche est une égalité si et seulement si les a_i sont tous égaux ou les b_i sont tous égaux.

Première démonstration (identité de sommation). Pour tous i, j, les nombres $a_i - a_j$ et $b_i - b_j$ ont le même signe (les deux familles sont ordonnées dans le même sens), donc $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$. En développant et en sommant sur tous les couples (i, j) :

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_i - a_j)\,(b_i - b_j) = 2n \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right).$$

C'est l'inégalité de gauche. L'égalité exige $(a_i - a_j)(b_i - b_j) = 0$ pour tous i, j ; en particulier $(a_1 - a_n)(b_1 - b_n) = 0$, donc $a_1 = a_n$ (les a_i sont égaux) ou $b_1 = b_n$ (les b_i sont égaux). La réciproque est immédiate.

L'inégalité de droite s'obtient en appliquant celle de gauche aux familles (a_i) et $(-b_{n+1-i})$, rangées dans le même ordre. ■

Deuxième démonstration (par le réarrangement). Pour $k = 0, \ldots, n-1$, notons σ_k la permutation $i \mapsto i + k$ (indices pris modulo n). Par le théorème 13.1.1, $\sum_i a_i\, b_i \geq \sum_i a_i\, b_{\sigma_k(i)}$ pour chaque k. En sommant ces n inégalités, le membre de droite devient $\sum_i a_i \sum_k b_{\sigma_k(i)} = (\sum a_i)(\sum b_j)$, car pour i fixé, $\sigma_k(i)$ parcourt tous les indices quand k varie. ■

Exemple 13.2.2. *Soient $a, b, c > 0$. Montrer que $a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.*

Solution sans logarithme. En élevant au cube, il s'agit de montrer que $a^{3a} b^{3b} c^{3c} \geq (abc)^{a+b+c}$. Le quotient des deux membres vaut

$$a^{2a-b-c}\, b^{2b-c-a}\, c^{2c-a-b} = \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} \left(\frac{b}{c}\right)^{b-c} \left(\frac{c}{a}\right)^{c-a},$$

comme on le vérifie en comparant les exposants de a, b et c. Or, pour $x, y > 0$, $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y} \geq 1$: si $x \geq y$, c'est une puissance d'exposant positif d'un nombre au moins égal à 1 ; si $x < y$, c'est une puissance d'exposant négatif d'un nombre inférieur à 1. Donc le quotient est au moins 1.

Avec le logarithme. L'inégalité équivaut à $3(a\ln a + b\ln b + c\ln c) \geq (a+b+c)(\ln a + \ln b + \ln c)$, qui est Tchebychev appliqué aux familles (a,b,c) et $(\ln a, \ln b, \ln c)$, rangées dans le même ordre car $\ln$ est croissante.

Exemple 13.2.3. *Soient $a,b,c>0$. Montrer que $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geq \frac{a+b+c}{3}$.*

Tchebychev avec deux fois la famille (a,b,c) : $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$.

Exemple 13.2.4 (Puissances). *Soient $x_1,\dots,x_n \geq 0$ et $k \geq 1$ un entier. Montrer que $\frac{x_1^k+\cdots+x_n^k}{n} \geq \left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^k$.*

Solution. Par récurrence sur k ; le cas $k=1$ est une égalité. Les familles (x_i) et (x_i^k) sont rangées dans le même ordre, donc, par Tchebychev puis par l'hypothèse de récurrence,

$$\frac{1}{n}\sum x_i^{k+1} \geq \frac{1}{n}\sum x_i \cdot \frac{1}{n}\sum x_i^k \geq \frac{1}{n}\sum x_i \cdot \left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)^k = \left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)^{k+1}.$$

C'est un cas particulier du théorème 11.3.2 ($M_1 \leq M_k$), obtenu ici sans Bernoulli.

Exemple 13.2.5 (Nesbitt, troisième démonstration). *Soient $a,b,c>0$. Montrer que $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.*

Solution. L'inégalité est symétrique ; supposons $a \geq b \geq c$. Alors $b+c \leq c+a \leq a+b$, donc $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$: les familles (a,b,c) et $\left(\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}\right)$ sont rangées dans le même ordre. Par Tchebychev,

$$\sum \frac{a}{b+c} \geq \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2} = \frac{3}{2},$$

la dernière étape étant l'inégalité $H \leq A$ appliquée à $b+c$, $c+a$, $a+b$ (exemple 11.4.7).

À retenir — les réflexes du chapitre 13

- Réarrangement : « le plus grand avec le plus grand » maximise la somme des produits ; la preuve repose sur un échange qui réduit le nombre d'inversions.
- Tchebychev : $n\sum a_i b_i \geq \sum a_i \sum b_i$ pour des familles de même ordre ; preuve en une ligne par $\sum_{i,j}(a_i-a_j)(b_i-b_j) \geq 0$.
- Pour une inégalité symétrique, supposer $a \geq b \geq c$; pour une inégalité cyclique, distinguer deux cas.

13.3 Exercices

Exercice 13.1 ★. Soient $a,b,c>0$. Montrer que $a^3+b^3+c^3 \geq a^2b+b^2c+c^2a$ par réarrangement.

Exercice 13.2 ★★. Soient $a,b,c>0$. Montrer que $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$.

Exercice 13.3 ★★ (OIM 1964). Soient a,b,c les côtés d'un triangle. Montrer que $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc$.

Exercice 13.4 ★★. Soient $a_1,\dots,a_n>0$. Montrer que $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1} \geq n$.

Exercice 13.5 ★★★. Soient $x_1, \dots, x_n > 0$ de somme 1. Montrer que $\sum \frac{x_i^2}{x_i + x_{i+1}} \geq \frac{1}{2}$ (indices cycliques).

Exercice 13.6 ★★★. Soient $a \geq b \geq c > 0$. Montrer que $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ par Tchebychev.

13.4 Solutions

Solution de l'exercice 13.1. L'inégalité n'est pas symétrique mais cyclique ; aucune hypothèse d'ordre n'est pourtant nécessaire. Quel que soit l'ordre de $a, b, c > 0$, les familles (a^2, b^2, c^2) et (a, b, c) sont ordonnées de la même façon (la fonction $t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$), donc l'appariement « même ordre » est maximal et, par réarrangement, $a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$.

Solution de l'exercice 13.2. Par Tchebychev ou plus simplement par IA-G : $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = \frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$ (puisque $\frac{a^2}{bc} = \frac{a^3}{abc}$). En écrivant les trois inégalités analogues et en additionnant, on obtient $3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$.

Solution de l'exercice 13.3. Supposons $a \geq b \geq c$. Alors $a(b + c - a) \leq b(c + a - b) \leq c(a + b - c)$: en effet,

$$b(c + a - b) - a(b + c - a) = (a - b)(a + b - c) \geq 0, \qquad c(a + b - c) - b(c + a - b) = (b - c)(b + c - a) \geq 0,$$

grâce à $a \geq b \geq c$ et à l'inégalité triangulaire. Les familles (a, b, c) et $\big(a(b + c - a),\ b(c + a - b),\ c(a + b - c)\big)$ sont donc ordonnées en sens contraires, et la somme $\sum a \cdot a(b + c - a) = \sum a^2(b + c - a)$ correspond à l'appariement « ordre opposé ». Le réarrangement, appliqué aux deux appariements cycliques non triviaux et additionné, donne

$$\begin{aligned} &2\sum a^2(b + c - a) \\ &\leq [b\,a(b + c - a) + c\,b(c + a - b) + a\,c(a + b - c)] \\ &+ [c\,a(b + c - a) + a\,b(c + a - b) + b\,c(a + b - c)] = 6abc. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Solution de l'exercice 13.4. IA-G : le produit des n quotients vaut 1, donc leur somme est $\geq n$.

Solution de l'exercice 13.5. Par la forme d'Engel : $\sum \frac{x_i^2}{x_i + x_{i+1}} \geq \frac{(\sum x_i)^2}{\sum (x_i + x_{i+1})} = \frac{1}{2}$.

Solution de l'exercice 13.6. Les familles (a, b, c) et $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\right)$ sont ordonnées dans le même sens (si $a \geq b \geq c$, alors $b + c \leq c + a \leq a + b$). Par Tchebychev,

$$3\sum \frac{a}{b + c} \geq (a + b + c)\sum \frac{1}{b + c} \geq (a + b + c) \cdot \frac{9}{2(a + b + c)} = \frac{9}{2},$$

la dernière étape étant l'inégalité $H \leq A$ (théorème 11.1.2) appliquée à $b + c$, $c + a$, $a + b$. Donc la somme est $\geq \frac{3}{2}$.

CHAPITRE 14

14 Convexité et inégalité de Jensen

La convexité transforme une inégalité à plusieurs variables en une propriété d'**une seule fonction**. Ce chapitre fait appel aux dérivées (niveau terminale) ; toutes les propriétés utilisées sont démontrées à partir de la définition et du théorème des accroissements finis.

14.1 Fonctions convexes

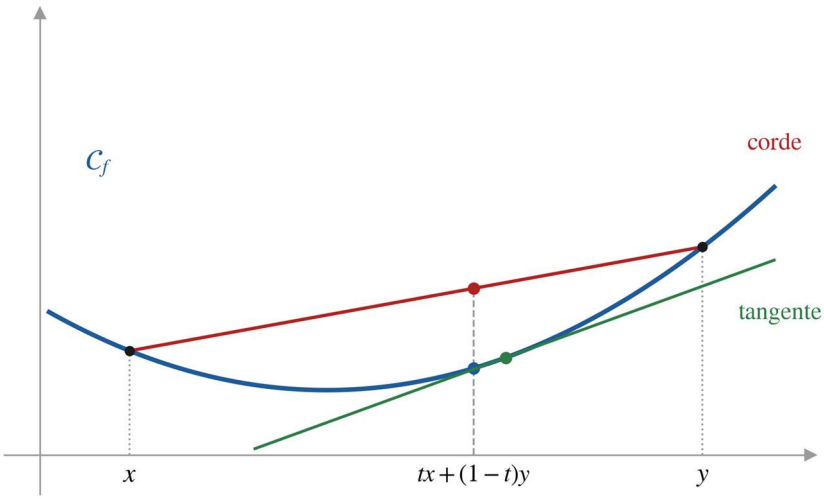
Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Définition 14.1.1 (Fonction convexe)

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **convexe** si pour tous $x, y \in I$ et tout $t \in [0,1]$:

$$f(tx + (1-t)y) \leq t\,f(x) + (1-t)\,f(y).$$

Elle est **strictement convexe** si l'inégalité est stricte pour $x \neq y$ et $0 < t < 1$. Elle est **concave** si $-f$ est convexe. Géométriquement, f est convexe si et seulement si son graphe est situé sous chacune de ses cordes (figure ci-dessous).



Une fonction convexe : le graphe est sous chaque corde et au-dessus de chaque tangente.

Pour $u \neq v$ dans I, notons $p(u,v) = \frac{f(u)-f(v)}{u-v}$ la **pente** de la corde joignant les points d'abscisses u et v ; on a $p(u,v) = p(v,u)$.

Lemme 14.1.2 (Lemme des trois pentes)

Soit f convexe sur I. Pour tous $x < z < y$ dans I :

$$p(x,z) \leq p(x,y) \leq p(z,y).$$

Par conséquent, pour tout $v \in I$, la fonction $u \mapsto p(u,v)$ est croissante sur $I \setminus \{v\}$.

Démonstration. Écrivons $z = tx + (1-t)y$ avec $t = \frac{y-z}{y-x} \in]0,1[$. La convexité donne $f(z) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$. En retranchant $f(x)$ et en utilisant $1 - t = \frac{z-x}{y-x}$:

$$f(z) - f(x) \leq (1-t)\big(f(y) - f(x)\big) = \frac{z-x}{y-x}\big(f(y) - f(x)\big),$$

et en divisant par $z - x > 0$, on obtient $p(x,z) \leq p(x,y)$. De même, en retranchant $f(y)$ et en utilisant $t = \frac{y-z}{y-x}$: $f(z) - f(y) \leq \frac{y-z}{y-x}\big(f(x) - f(y)\big)$; en divisant par $z - y < 0$, on obtient $p(z,y) \geq p(x,y)$.

Pour la conséquence, soient $u_1 < u_2$ distincts de v. Si $v < u_1 < u_2$, le lemme appliqué à $v < u_1 < u_2$ donne $p(v,u_1) \leq p(v,u_2)$. Si $u_1 < v < u_2$, il donne $p(u_1,v) \leq p(u_1,u_2) \leq p(v,u_2)$. Si $u_1 < u_2 < v$, il donne $p(u_1,v) \leq p(u_2,v)$. Dans tous les cas, $p(u_1,v) \leq p(u_2,v)$. ■

Théorème 14.1.3 (Caractérisations des fonctions convexes dérivables)

Soit f dérivable sur I. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I ;
2. f' est croissante sur I ;
3. le graphe de f est au-dessus de chacune de ses tangentes : $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$ pour tous $a, x \in I$.

Si f est deux fois dérivable, elles équivalent à : $f'' \geq 0$ sur I. Si $f'' > 0$ sur I, f est strictement convexe.

Démonstration. *1 ⇒ 2.* Soient $a < b$ dans I. Par le lemme 14.1.2, pour u dans I avec $u < a$ ou $a < u < b$, on a $p(u,a) \leq p(a,b)$; en faisant tendre u vers a, $f'(a) \leq p(a,b)$. De même, $p(a,b) \leq p(b,w)$ pour w proche de b, et donc $p(a,b) \leq f'(b)$. Ainsi $f'(a) \leq f'(b)$.

2 ⇒ 3. Soient $a \neq x$. Par le théorème des accroissements finis, il existe c strictement entre a et x tel que $f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)$. Si $x > a$, alors $c > a$, $f'(c) \geq f'(a)$ et $x - a > 0$; si $x < a$, alors $f'(c) \leq f'(a)$ et $x - a < 0$. Dans les deux cas $f'(c)(x-a) \geq f'(a)(x-a)$.

3 ⇒ 1. Soient $x, y \in I$, $t \in [0,1]$ et $z = tx + (1-t)y$. Par 3 appliqué en $a = z$:

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x-z), \qquad f(y) \geq f(z) + f'(z)(y-z).$$

Multiplions la première par t, la seconde par $1-t$, et additionnons : comme $t(x-z) + (1-t)(y-z) = z - z = 0$, on obtient $tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(z)$.

Dérivée seconde. f' est croissante si et seulement si $f'' \geq 0$ (sens de variation d'une fonction dérivable). Si $f'' > 0$, f' est strictement croissante, et la démonstration de 2 ⇒ 3 donne une inégalité stricte pour $x \neq a$; celle de 3 ⇒ 1 donne alors une inégalité stricte pour $x \neq y$ et $0 < t < 1$ (car $z \neq x$ et $z \neq y$). ■

Le tableau suivant rassemble les exemples usuels ; chaque ligne se vérifie par le signe de la dérivée seconde.

Fonction	Domaine	Dérivée seconde	Nature
x^p ($p \geq 1$ ou $p \leq 0$)	$x > 0$	$p(p-1)x^{p-2} \geq 0$	convexe
x^p ($0 \leq p \leq 1$)	$x > 0$	$p(p-1)x^{p-2} \leq 0$	concave
$\frac{1}{x}$	$x > 0$	$\frac{2}{x^3} > 0$	strictement convexe
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x > 0$	strictement convexe
$\ln x$	$x > 0$	$-\frac{1}{x^2} < 0$	strictement concave

Fonction	Domaine	Dérivée seconde	Nature
$\sin x$	$[0,\pi]$	$-\sin x \le 0$	concave
$\cos x$	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$	$-\cos x \le 0$	concave
$\tan x$	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$	$\frac{2\sin x}{\cos^3 x} \ge 0$	convexe

Théorème 14.1.4 (Inégalité de Jensen)

Soit f convexe sur I, $x_1,\dots,x_n \in I$ et $w_1,\dots,w_n > 0$ avec $\sum w_i = 1$. Alors $\sum w_i x_i \in I$ et

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x_i).$$

Cas non pondéré : $f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$. Si f est strictement convexe, il y a égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$. Les inégalités sont renversées si f est concave.

Démonstration. Le point $\sum w_i x_i$ est compris entre $\min x_i$ et $\max x_i$, donc dans l'intervalle I. On raisonne par récurrence sur n ; le cas $n = 1$ est trivial et le cas $n = 2$ est la définition. Supposons le résultat vrai pour $n-1$ points ($n \ge 3$), et posons $s = 1 - w_n \in]0,1[$ et $y = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{w_i}{s} x_i \in I$. Alors $\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i = sy + w_n x_n$, et par la définition, puis par l'hypothèse de récurrence (les poids $\frac{w_i}{s}$ sont de somme 1),

$$f(sy + w_n x_n) \le s\, f(y) + w_n f(x_n) \le s \sum_{i=1}^{n-1} \frac{w_i}{s} f(x_i) + w_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x_i).$$

Si f est strictement convexe et s'il y a égalité, la seconde inégalité impose $x_1 = \cdots = x_{n-1}$, donc $y = x_1$, et la première impose $y = x_n$. ■

Deuxième démonstration pour f dérivable (par la tangente). Soit $m = \sum w_i x_i$. Par le théorème 14.1.3, $f(x_i) \ge f(m) + f'(m)(x_i - m)$ pour tout i. En multipliant par w_i et en sommant, le terme $f'(m)\sum w_i(x_i - m)$ est nul, et il reste $\sum w_i f(x_i) \ge f(m)$. ■

Jensen contient l'IA-G.

La fonction $\ln$ est concave. Par Jensen, $\ln(\sum w_i x_i) \ge \sum w_i \ln x_i = \ln \prod x_i^{w_i}$, et, $\exp$ étant croissante, on retrouve l'IA-G pondérée (théorème 11.2.2). De même, l'inégalité des moyennes de puissances (théorème 11.3.2, pour $0 < p < q$) découle de la convexité de $x \mapsto x^{q/p}$.

Exemple 14.1.5. *Soient A, B, C les angles d'un triangle. Montrer que* $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

La fonction $\sin$ est concave sur $[0,\pi]$, qui contient A, B et C. Par Jensen,

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \le \sin\frac{A+B+C}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Comme $\sin$ est strictement concave sur $]0,\pi[$ (sa dérivée seconde $-\sin$ y est strictement négative), l'égalité a lieu si et seulement si le triangle est équilatéral.

Exemple 14.1.6. *Soient $a, b, c > 0$ avec $a + b + c = 3$. Montrer que* $\frac{a^2}{a+2} + \frac{b^2}{b+2} + \frac{c^2}{c+2} \ge 1$.

Posons $f(x) = \frac{x^2}{x+2} = x - 2 + \frac{4}{x+2}$; alors $f''(x) = \frac{8}{(x+2)^3} > 0$ pour $x > 0$: f est strictement convexe. Par Jensen, $\frac{1}{3}\sum f(a) \geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = f(1) = \frac{1}{3}$, donc $\sum f(a) \geq 1$, avec égalité si et seulement si $a = b = c = 1$.

14.2 La méthode de la tangente

La propriété 3 du théorème 14.1.3 suggère une méthode qui fonctionne **même sans convexité** : il suffit que le graphe soit au-dessus de **la** tangente au point d'égalité, sur le domaine utile.

Méthode 14.2.1 (Méthode de la tangente)

Pour une inégalité de la forme $\sum f(a_i) \geq k$ avec une contrainte linéaire $\sum a_i = s$ et un cas d'égalité en $a_i = m = \frac{s}{n}$:

1. calculer la tangente au graphe de f en m : $T(x) = f(m) + f'(m)(x - m)$;
2. démontrer l'inégalité à une variable $f(x) \geq T(x)$ sur tout le domaine autorisé (souvent en factorisant par $(x - m)^2$) ;
3. sommer : $\sum f(a_i) \geq \sum T(a_i) = nf(m) + f'(m)(s - nm) = nf(m)$.

Cette méthode fonctionne même quand f n'est pas convexe : c'est là tout son intérêt.

Exemple 14.2.2. *Soient $a, b, c > 0$ avec $a + b + c = 3$. Montrer que $\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1$.*

Soit $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$. On a $f(1) = \frac{1}{3}$ et $f'(x) = \frac{2-x^2}{(x^2+2)^2}$, donc $f'(1) = \frac{1}{9}$. La tangente en 1 est $T(x) = \frac{1}{3} + \frac{x-1}{9} = \frac{x+2}{9}$.

Montrons $f(x) \leq T(x)$ pour $x > 0$. Comme $x^2 + 2 > 0$, cela équivaut à $9x \leq (x + 2)(x^2 + 2)$, c'est-à-dire

$$x^3 + 2x^2 - 7x + 4 \geq 0.$$

Or $x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = (x - 1)^2(x + 4) \geq 0$ pour $x > 0$. En sommant les trois inégalités :

$$\sum f(a) \leq \frac{(a + b + c) + 6}{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

Égalité si et seulement si $a = b = c = 1$.

La fonction f n'est **pas** concave sur $]0,3[$: $f''(x) = \frac{2x(x^2-6)}{(x^2+2)^3}$ est positive pour $x > \sqrt{6}$. Jensen ne s'applique donc pas directement ; la tangente, elle, reste au-dessus du graphe sur tout $]0, +\infty[$ (figure ci-dessous).

[Méthode de la tangente pour f(x) = x/(x² + 2) : le graphe reste sous la tangente en 1 sur]0, +∞, bien que f ne soit pas concave.

14.3 Majoration et inégalité de Karamata

Définition 14.3.1 (Majoration)

Soient (x_i) et (y_i) deux familles de n réels, rangées par ordre décroissant. On dit que (x_i) **majore** (y_i), et l'on note $(x) \succ (y)$, si

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \geq \sum_{i=1}^{k} y_i \quad (1 \leq k \leq n-1) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Intuitivement, (x) est « plus étalée » que (y). Par exemple $(3,0,0) \succ (2,1,0) \succ (1,1,1)$.

Théorème 14.3.2 (Inégalité de Karamata)

Soit f convexe et dérivable sur I, et soient $(x) \succ (y)$ deux familles d'éléments de I. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f(y_i).$$

Démonstration. Pour chaque i, posons $c_i = p(x_i, y_i)$ si $x_i \neq y_i$, et $c_i = f'(x_i)$ si $x_i = y_i$; dans les deux cas $f(x_i) - f(y_i) = c_i(x_i - y_i)$.

La suite (c_i) est décroissante. Étendons p à la diagonale par $p(u,u) = f'(u)$. Par le lemme 14.1.2, p est croissante en chaque variable hors de la diagonale ; en faisant tendre une variable vers l'autre (démonstration du théorème 14.1.3, 1 ⇒ 2), on voit que cette croissance persiste avec la valeur $f'(u)$ sur la diagonale. Comme $x_i \geq x_{i+1}$ et $y_i \geq y_{i+1}$,

$$c_i = p(x_i, y_i) \geq p(x_{i+1}, y_i) \geq p(x_{i+1}, y_{i+1}) = c_{i+1}.$$

Transformation d'Abel. Posons $X_k = x_1 + \cdots + x_k$, $Y_k = y_1 + \cdots + y_k$, $X_0 = Y_0 = 0$, et $D_k = X_k - Y_k$. Alors $x_i - y_i = D_i - D_{i-1}$ et, par la transformation d'Abel (chapitre 2),

$$\sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(y_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(D_i - D_{i-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} (c_k - c_{k+1})\,D_k + c_n D_n.$$

Or $c_k - c_{k+1} \geq 0$, $D_k \geq 0$ (hypothèse de majoration) et $D_n = 0$. La somme est donc positive. ∎

Portée du théorème.

L'hypothèse de dérivabilité simplifie la preuve mais n'est pas nécessaire : Karamata est vrai pour toute fonction convexe sur I (on remplace $f'(x_i)$ par une dérivée à droite). Jensen est le cas particulier $(x) \succ (m, m, \ldots, m)$ où m est la moyenne des x_i : en effet, si $x_1 \geq \cdots \geq x_n$, la moyenne des k plus grands termes est au moins la moyenne de tous, donc $X_k \geq km$. Karamata est l'outil adapté lorsque l'égalité n'a pas lieu au centre mais au **bord**.

Exemple 14.3.3. *Soient A, B, C les angles d'un triangle acutangle avec $A \geq B \geq C$. Montrer que* $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

Comme $A \geq B \geq C$ et $A + B + C = \pi$, on a $A \geq \frac{\pi}{3}$ et $A + B = \pi - C \geq \frac{2\pi}{3}$: la famille (A, B, C) majore $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$. La fonction $-\cos$ est convexe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (sa dérivée seconde est $\cos \geq 0$). Karamata donne $\sum(-\cos A) \geq 3\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}$, c'est-à-dire $\sum \cos A \leq \frac{3}{2}$.

L'inégalité reste vraie pour tout triangle, mais $-\cos$ n'est plus convexe sur $[0, \pi]$ tout entier : il faut alors un autre argument, par exemple l'identité $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$ jointe à l'inégalité d'Euler $R \geq 2r$.

Exemple 14.3.4 (Égalité au bord). *Soient* $a,b,c \in [0,1]$ *tels que* $a+b+c=\frac{3}{2}$. *Montrer que* $a^2+b^2+c^2 \leq \frac{5}{4}$.

Solution. Supposons $a \geq b \geq c$. La famille $\left(1,\frac{1}{2},0\right)$ majore (a,b,c) : en effet $1 \geq a$, et $1+\frac{1}{2} \geq a+b$ car $a+b=\frac{3}{2}-c \leq \frac{3}{2}$; les sommes totales sont égales. Par Karamata appliqué à la fonction convexe $x \mapsto x^2$:

$$a^2+b^2+c^2 \leq 1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2=\frac{5}{4}.$$

Le maximum est atteint pour $(a,b,c)=\left(1,\frac{1}{2},0\right)$ et ses permutations, c'est-à-dire **au bord** du domaine, où Jensen seul ne peut rien donner.

À retenir — les réflexes du chapitre 14

- Convexité : graphe sous les cordes, au-dessus des tangentes ; critère pratique $f'' \geq 0$.
- Jensen : l'égalité est au centre ; preuve par récurrence ou par la tangente.
- Méthode de la tangente : ne demande que $f \geq T$ sur le domaine, pas la convexité ; factoriser par $(x-m)^2$.
- Karamata : l'égalité est au bord ; vérifier la majoration sur les sommes partielles.

14.4 Exercices

Exercice 14.1 ★. Montrer que $e^x \geq 1+x$ pour tout réel x.

Exercice 14.2 ★. Soient $x_1,\ldots,x_n>0$. Montrer que $\frac{1}{n}\sum\frac{1}{x_i} \geq \frac{n}{\sum x_i}$ par convexité de $\frac{1}{x}$.

Exercice 14.3 ★★. Soient $a,b,c>0$ avec $a+b+c=1$. Montrer que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 9$ par Jensen.

Exercice 14.4 ★★. Soient A,B,C les angles d'un triangle. Montrer que $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$.

Exercice 14.5 ★★. Soient $a,b,c>0$ avec $a+b+c=3$. Montrer que $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1} \geq \frac{3}{2}$. (Indication : tangente en 1.)

Exercice 14.6 ★★★. Soient $a,b,c>0$ avec $a+b+c=3$. Montrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca$.

Exercice 14.7 ★★★. Soient $x,y,z>0$ avec $x+y+z=1$. Montrer que $\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2} \leq \frac{9}{10}$.

14.5 Solutions

Solution de l'exercice 14.1. $f(x)=e^x$ est convexe ; son graphe est au-dessus de sa tangente en 0, qui est $y=1+x$.

Solution de l'exercice 14.2. $f(x)=\frac{1}{x}$ est convexe sur $]0,+\infty[$, donc par Jensen $\frac{1}{n}\sum\frac{1}{x_i} \geq \frac{1}{\frac{1}{n}\sum x_i}=\frac{n}{\sum x_i}$.

Solution de l'exercice 14.3. Par l'exercice précédent avec $n=3$ et $\sum a=1$: $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq \frac{3}{a+b+c}=3$, soit $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 9$.

Solution de l'exercice 14.4. $\tan$ est convexe sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\frac{A+B+C}{2}=\frac{\pi}{2}$, donc la moyenne des $\frac{A}{2}$ vaut $\frac{\pi}{6}$. Jensen donne

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}{3}\geq\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

donc la somme est $\geq\sqrt{3}$.

Solution de l'exercice 14.5. Soit $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, $f(1)=\frac{1}{2}$, $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$, $f'(1)=-\frac{1}{2}$. La tangente est $T(x)=\frac{1}{2}-\frac{x-1}{2}=\frac{2-x}{2}$. Vérifions :

$$f(x)-T(x)=\frac{1}{x^2+1}-\frac{2-x}{2}=\frac{2-(2-x)(x^2+1)}{2(x^2+1)}=\frac{x^3-2x^2+x}{2(x^2+1)}=\frac{x(x-1)^2}{2(x^2+1)}\geq 0$$

pour $x\geq 0$. La tangente convient donc bien sur $[0,3]$, et en sommant :

$$\sum\frac{1}{a^2+1}\geq\frac{6-(a+b+c)}{2}=\frac{3}{2}.$$

Solution de l'exercice 14.6. Comme $ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}=\frac{9-\sum a^2}{2}$, l'inégalité s'écrit

$$2\sum\sqrt{a}+\sum a^2\geq 9.$$

Posons $g(x)=2\sqrt{x}+x^2$; alors $g(1)=3$ et il suffit de montrer $\sum g(a)\geq 9=3g(1)$. Utilisons la tangente en 1 : $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+2x$, $g'(1)=3$, donc $T(x)=3+3(x-1)=3x$. Montrons $g(x)\geq 3x$ pour $x\in]0,3[$:

$$2\sqrt{x}+x^2-3x\geq 0\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\geq 3x-x^2=x(3-x).$$

En posant $t=\sqrt{x}>0$, cela s'écrit $2t\geq t^2(3-t^2)$, c'est-à-dire $2\geq t(3-t^2)=3t-t^3$, c'est-à-dire $t^3-3t+2\geq 0$, soit $(t-1)^2(t+2)\geq 0$: vrai. (L'inégalité $g(x)\geq 3x$ est d'ailleurs évidente pour $x\geq 3$.) En sommant : $\sum g(a)\geq 3(a+b+c)=9$.

Solution de l'exercice 14.7. Soit $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ sur $]0,1[$, avec cas d'égalité attendu en $x=\frac{1}{3}$: $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1/3}{10/9}=\frac{3}{10}$, et $3\cdot\frac{3}{10}=\frac{9}{10}$. Tangente : $f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, donc $f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8/9}{100/81}=\frac{72}{100}=\frac{18}{25}$, et

$$T(x)=\frac{3}{10}+\frac{18}{25}\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{18x}{25}+\frac{3}{50}.$$

Montrons $f(x)\leq T(x)$ pour $x\in]0,1[$: en multipliant par $50(1+x^2)>0$,

$$50x\leq(36x+3)(1+x^2)\Leftrightarrow 36x^3+3x^2-14x+3\geq 0.$$

Or $36x^3+3x^2-14x+3=(3x-1)^2(4x+3)\geq 0$. En sommant les trois inégalités :

$$\sum f\leq\frac{18}{25}(x+y+z)+\frac{9}{50}=\frac{18}{25}+\frac{9}{50}=\frac{45}{50}=\frac{9}{10}.$$

CHAPITRE 15

15 Techniques avancées

Ce chapitre rassemble les outils utilisés pour les inégalités symétriques ou cycliques en trois variables les plus difficiles : l'inégalité de Schur, l'inégalité de Muirhead, la méthode SOS, les substitutions classiques et la méthode pqr. Chacun est démontré complètement.

15.1 L'inégalité de Schur

Théorème 15.1.1 (Inégalité de Schur)

Pour $a, b, c \geq 0$ et $t > 0$:

$$a^t(a-b)(a-c) + b^t(b-a)(b-c) + c^t(c-a)(c-b) \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si $a = b = c$, ou si deux des nombres sont égaux et le troisième est nul. Pour $t = 1$ cela s'écrit

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a),$$

soit, en termes de $p = a+b+c$, $q = ab+bc+ca$, $r = abc$:

$$p^3 - 4pq + 9r \geq 0.$$

Démonstration. L'expression est symétrique en a, b, c ; supposons $a \geq b \geq c \geq 0$. Regroupons les deux premiers termes :

$$a^t(a-b)(a-c) + b^t(b-a)(b-c) = (a-b)[a^t(a-c) - b^t(b-c)] \geq 0,$$

car $a - b \geq 0$, $a^t \geq b^t \geq 0$ et $a - c \geq b - c \geq 0$. Le troisième terme vérifie $c^t(c-a)(c-b) = c^t(a-c)(b-c) \geq 0$. La somme est donc positive.

Cas d'égalité. Il faut que les deux quantités soient nulles. La seconde est nulle si et seulement si $c = 0$, $a = c$ ou $b = c$. Si $a = c$, alors $a = b = c$. Si $b = c$ et $c > 0$: la première vaut $(a-b)[a^t(a-b)] = a^t(a-b)^2$, nulle si et seulement si $a = b$. Si $c = 0$: la première vaut $(a-b)(a^{t+1} - b^{t+1})$, nulle si et seulement si $a = b$. On obtient bien $a = b = c$ ou $(a, a, 0)$ à permutation près ; la réciproque est immédiate.

Forme pqr pour $t = 1$. En développant, $\sum a(a-b)(a-c) = \sum a^3 - \sum_{\text{sym}} a^2 b + 3abc$. Par ailleurs $p^3 = \sum a^3 + 3\sum_{\text{sym}} a^2 b + 6abc$ et $pq = \sum_{\text{sym}} a^2 b + 3abc$, donc

$$p^3 - 4pq + 9r = \sum a^3 - \sum_{\text{sym}} a^2 b + 3abc,$$

ce qui est l'expression de Schur. ■

À retenir

Quand utiliser Schur ? Quand le cas d'égalité est à la fois en $a = b = c$ et en $(a, a, 0)$: c'est la signature typique des inégalités que Muirhead ne peut pas traiter.

Exemple 15.1.2. *Soient $a, b, c \geq 0$ tels que $a + b + c = 1$. Montrer que $4(ab + bc + ca) \leq 1 + 9abc$.*

C'est exactement la forme pqr de Schur avec $p = 1 : 1 - 4q + 9r \geq 0$. Égalité pour $a = b = c = \frac{1}{3}$ et pour $(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ à permutation près.

15.2 L'inégalité de Muirhead

Définition 15.2.1 (Sommes symétriques)

Pour un triplet de réels positifs $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et des réels $a, b, c > 0$, on note

$$[\alpha] = \sum_{\text{sym}} a^{\alpha_1} b^{\alpha_2} c^{\alpha_3} = \sum_{\sigma \in S_3} a^{\alpha_{\sigma(1)}} b^{\alpha_{\sigma(2)}} c^{\alpha_{\sigma(3)}},$$

somme de six termes, où S_3 est l'ensemble des permutations de $\{1,2,3\}$. Par exemple $[1,1,1] = 6abc$ et $[2,1,0] = \sum_{\text{sym}} a^2 b$. L'expression $[\alpha]$ ne dépend pas de l'ordre des composantes de α.

Théorème 15.2.2 (Inégalité de Muirhead)

Soient α et β deux triplets de réels positifs, rangés par ordre décroissant, tels que $\alpha \succ \beta$ (majoration, définition 14.3.1). Alors, pour tous $a, b, c > 0$: $[\alpha] \geq [\beta]$. Par continuité, l'inégalité reste vraie pour $a, b, c \geq 0$.

La démonstration est donnée après la méthode 15.2.4.

Exemple 15.2.3. $(3,0,0) \succ (2,1,0) \succ (1,1,1)$, donc pour $a, b, c \geq 0$:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq \sum_{\text{sym}} a^2 b \geq 6abc.$$

De même $(4,0,0) \succ (2,1,1)$ donne $2(a^4 + b^4 + c^4) \geq 2abc(a + b + c)$, retrouvant un exercice du chapitre 10.

Méthode 15.2.4 (Muirhead en pratique)

1. Homogénéiser l'inégalité (utiliser la contrainte pour égaliser les degrés).
2. Chasser les dénominateurs : on obtient une inégalité polynomiale symétrique.
3. Écrire les deux membres comme combinaisons à coefficients positifs de sommes $[\alpha]$ et comparer terme à terme par majoration.

Limite : Muirhead ne s'applique qu'aux sommes **symétriques** (pas seulement cycliques), et échoue lorsque l'égalité a aussi lieu au bord, par exemple en $(1,1,0)$; dans ce cas, on utilise Schur ou la méthode SOS.

Démontrons maintenant le théorème 15.2.2. La démonstration repose sur deux idées : un **transfert** d'exposant d'une composante à une autre fait décroître $[\alpha]$, et tout couple $\alpha \succ \beta$ se relie par au plus deux transferts.

Lemme 15.2.5 (Transfert)

Soient $x \geq y$ et z des réels positifs, et x', y' des réels tels que $x' + y' = x + y$ et $y \leq x', y' \leq x$. Alors $[x, y, z] \geq [x', y', z]$.

Démonstration. Regroupons les six termes de $[x,y,z]$ selon la variable qui porte l'exposant z. Si c'est w et si u,v sont les deux autres variables, on obtient les deux termes $w^z(u^xv^y+u^yv^x)$. Il suffit donc de montrer que, pour $u,v>0$,

$$u^xv^y+u^yv^x \geq u^{x'}v^{y'}+u^{y'}v^{x'}.$$

Posons $m=x-y$, $s=x'-y\geq 0$ et $t=y'-y\geq 0$, de sorte que $s+t=m$. En mettant $(uv)^y$ en facteur, la différence des deux membres vaut

$$(uv)^y(u^m+v^m-u^sv^t-u^tv^s)=(uv)^y(u^s-v^s)(u^t-v^t).$$

Comme $s,t\geq 0$, les nombres u^s-v^s et u^t-v^t ont le même signe que $u-v$ (ou sont nuls) ; leur produit est positif. ■

Démonstration du théorème 15.2.2. Notons $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ et $\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, rangés par ordre décroissant, et S leur somme commune. La majoration donne $\beta_1\leq\alpha_1$, $\beta_1+\beta_2\leq\alpha_1+\alpha_2$, donc $\beta_3\geq\alpha_3$. De plus $\beta_1\geq\frac{S}{3}\geq\alpha_3$.

Cas 1 : $\beta_1\geq\alpha_2$. Posons $\gamma=(\beta_1,\alpha_1+\alpha_2-\beta_1,\alpha_3)$. On passe de α à γ par un transfert entre les deux premières composantes : les nouvelles valeurs β_1 et $\alpha_1+\alpha_2-\beta_1$ sont dans $[\alpha_2,\alpha_1]$ car $\alpha_2\leq\beta_1\leq\alpha_1$. Puis on passe de γ à β par un transfert entre les deux dernières composantes $\gamma_2=\alpha_1+\alpha_2-\beta_1$ et $\gamma_3=\alpha_3$: leur somme vaut $\beta_2+\beta_3$, et $\alpha_3\leq\beta_3\leq\beta_2\leq\gamma_2$ (la dernière inégalité est $\beta_1+\beta_2\leq\alpha_1+\alpha_2$). Le lemme, appliqué deux fois, donne $[\alpha]\geq[\gamma]\geq[\beta]$.

Cas 2 : $\beta_1<\alpha_2$. Posons $\gamma=(\beta_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3-\beta_1)$. On passe de α à γ par un transfert entre la première et la troisième composante : les nouvelles valeurs sont dans $[\alpha_3,\alpha_1]$ car $\alpha_3\leq\beta_1\leq\alpha_1$. Puis on passe de γ à β par un transfert entre $\gamma_2=\alpha_2$ et $\gamma_3=\alpha_1+\alpha_3-\beta_1$, dont la somme vaut $\beta_2+\beta_3$: on a $\gamma_3\leq\beta_3$ (car $\beta_1+\beta_3=S-\beta_2\geq S-\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3$, en utilisant $\beta_2\leq\beta_1<\alpha_2$) et $\beta_3\leq\beta_2<\alpha_2$. Les nouvelles valeurs β_2,β_3 sont donc dans $[\gamma_3,\gamma_2]$, et l'on conclut comme au cas 1.

Passage à $a,b,c\geq 0$. Les deux membres sont des fonctions continues de (a,b,c) sur $\mathbb{R}_+^3$ (avec la convention $0^0=1$) ; l'inégalité passe à la limite. ■

Muirhead et IA-G.

Chaque cas de Muirhead est en fait une combinaison d'inégalités IA-G pondérées ; le lemme de transfert en est une forme explicite. En compétition, il est prudent de rédiger l'argument par IA-G lorsque le jury pourrait ne pas accepter la citation de Muirhead.

15.3 La méthode SOS

Méthode 15.3.1 (Somme de carrés, ou SOS)

On cherche à écrire la différence des deux membres d'une inégalité symétrique en a,b,c sous la forme

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2,$$

où S_a,S_b,S_c sont des expressions en a,b,c. Critères de conclusion :

1. si $S_a,S_b,S_c\geq 0$: l'inégalité est démontrée ;
2. si $a\geq b\geq c$ et $S_b\geq 0$, $S_a+S_b\geq 0$, $S_c+S_b\geq 0$: l'inégalité est démontrée.

Justification du critère 2. Comme $a \geq b \geq c$, on a $(a-b)(b-c) \geq 0$, donc $(a-c)^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + 2(a-b)(b-c) \geq (a-b)^2 + (b-c)^2$. Comme $S_b \geq 0$, on peut minorer :

$$\begin{aligned} S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 &\geq S_a(b-c)^2 + S_b[(a-b)^2 + (b-c)^2] + S_c(a-b)^2 \\ &= (S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_b + S_c)(a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

■

Exemple 15.3.2. *Montrer que* $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ *par SOS.*

On a

$$\sum \frac{a}{b+c} - \frac{3}{2} = \sum \left(\frac{a}{b+c} - \frac{1}{2}\right) = \sum \frac{2a-b-c}{2(b+c)} = \sum \frac{(a-b)+(a-c)}{2(b+c)}.$$

Regroupons les deux termes contenant $a-b$, l'un venant de la fraction en a, l'autre (sous la forme $b-a$) de la fraction en b :

$$\frac{a-b}{2(b+c)} + \frac{b-a}{2(c+a)} = \frac{a-b}{2}\left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a}\right) = \frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}.$$

En faisant de même pour les autres paires, on obtient une SOS avec $S_c = \frac{1}{2(b+c)(c+a)} > 0$, et de même pour S_a et S_b : le critère 1 s'applique.

Exemple 15.3.3 (Deux SOS fondamentales). L'identité (1.1) et l'identité de Gauss (théorème 1.1.3), combinée à (1.1), sont des SOS :

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2],$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{a+b+c}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2].$$

Dans la seconde, $S_a = S_b = S_c = \frac{a+b+c}{2} \geq 0$ pour $a, b, c \geq 0$, ce qui redonne $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

15.4 Substitutions classiques

Méthode 15.4.1 (Le catalogue des substitutions)

Contrainte	Substitution
$abc = 1$	$a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$
$a+b+c = abc$	$a = \tan A, b = \tan B, c = \tan C$ avec $A + B + C = \pi$
a, b, c côtés d'un triangle	Ravi : $a = y+z, b = z+x, c = x+y$, $x, y, z > 0$
$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$	$a = \cos A, b = \cos B, c = \cos C$ (triangle acutangle)
$a+b+c = 1, a, b, c > 0$	$a = \frac{x}{x+y+z}$, etc. (homogénéisation)
$ab + bc + ca = 1$	$a = \tan\frac{A}{2}$, etc., avec $A + B + C = \pi$

Exemple 15.4.2 (OIM 2000, problème 2). *Soient* $a, b, c > 0$ *avec* $abc = 1$. *Montrer que*

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Solution. Posons $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$ avec $x,y,z>0$ (proposition 15.4.3 ci-dessous). Alors

$$a-1+\frac{1}{b}=\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}=\frac{x+z-y}{y},$$

et de même pour les autres facteurs. L'inégalité devient

$$(x+z-y)(y+x-z)(z+y-x)\leq xyz.$$

Deux des facteurs ne peuvent pas être négatifs simultanément, car la somme de deux d'entre eux est positive (par exemple $(x+z-y)+(y+x-z)=2x>0$). Si l'un des facteurs est strictement négatif, il est donc le seul, et le produit est négatif, donc inférieur à xyz. Sinon, posons $u=y+z-x$, $v=z+x-y$, $w=x+y-z$, tous positifs ; alors $x=\frac{v+w}{2}$, $y=\frac{w+u}{2}$, $z=\frac{u+v}{2}$, et l'inégalité s'écrit $uvw\leq\frac{(u+v)(v+w)(w+u)}{8}$, qui est (10.7). Égalité si et seulement si $u=v=w$, soit $x=y=z$, soit $a=b=c=1$.

Toutes les variables sont supposées strictement positives. Justifions les substitutions principales.

Proposition 15.4.3 (Validité des substitutions)

1. Si $abc=1$, il existe $x,y,z>0$ tels que $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$.
2. Si a,b,c sont les longueurs des côtés d'un triangle (non aplati), il existe $x,y,z>0$ tels que $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$.
3. Si $a+b+c=abc$, il existe $A,B,C\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tels que $A+B+C=\pi$ et $a=\tan A$, $b=\tan B$, $c=\tan C$.
4. Si $a^2+b^2+c^2+2abc=1$, il existe $A,B,C\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tels que $A+B+C=\pi$ et $a=\cos A$, $b=\cos B$, $c=\cos C$.

Démonstration.

1. Prendre $x=1$, $y=\frac{1}{a}$, $z=\frac{1}{ab}$: alors $\frac{x}{y}=a$, $\frac{y}{z}=b$ et $\frac{z}{x}=\frac{1}{ab}=c$.
2. Résolvons le système : $x=\frac{b+c-a}{2}$, $y=\frac{c+a-b}{2}$, $z=\frac{a+b-c}{2}$ conviennent, et ils sont strictement positifs par les inégalités triangulaires strictes.
3. Posons $A=\arctan a$, $B=\arctan b$, $C=\arctan c$, dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Si $ab=1$, alors $a+b+c=c$, ce qui est impossible ; donc $ab\neq 1$ et $\tan(A+B)=\frac{a+b}{1-ab}$. La relation $a+b=c(ab-1)$ donne $ab>1$ (car $a+b>0$ et $c>0$), puis $\tan(A+B)=-c=\tan(\pi-C)$. Comme $ab>1$, $\tan(A+B)<0$, donc $A+B\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$; et $\pi-C$ est aussi dans cet intervalle, sur lequel $\tan$ est injective. D'où $A+B=\pi-C$.
4. Chaque variable est dans $]0,1[$, car $a^2<a^2+b^2+c^2+2abc=1$. Posons $A=\arccos a$, $B=\arccos b$ dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. L'équation vue comme équation du second degré en c, $c^2+2ab\,c+(a^2+b^2-1)=0$, a pour discriminant réduit $a^2b^2-a^2-b^2+1=(1-a^2)(1-b^2)=\sin^2 A\sin^2 B$. Sa seule racine positive est

$$c=-ab+\sin A\sin B=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=-\cos(A+B)=\cos(\pi-A-B).$$

Posons $C=\pi-A-B$. Comme $c>0$ et $0<A+B<\pi$, on a $C\in]0,\pi[$ avec $\cos C>0$, donc $C\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. ■

15.5 La méthode pqr (ou uvw)

Pour $a, b, c \geq 0$, notons $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$ et $r = abc$. Les nombres a, b, c sont exactement les racines du polynôme $X^3 - pX^2 + qX - r$ (exemple 6.1.2). Posons

$$g(x) = x^3 - px^2 + qx;$$

les racines de $X^3 - pX^2 + qX - r$ sont les solutions de l'équation $g(x) = r$.

Théorème 15.5.1 (Principe pqr)

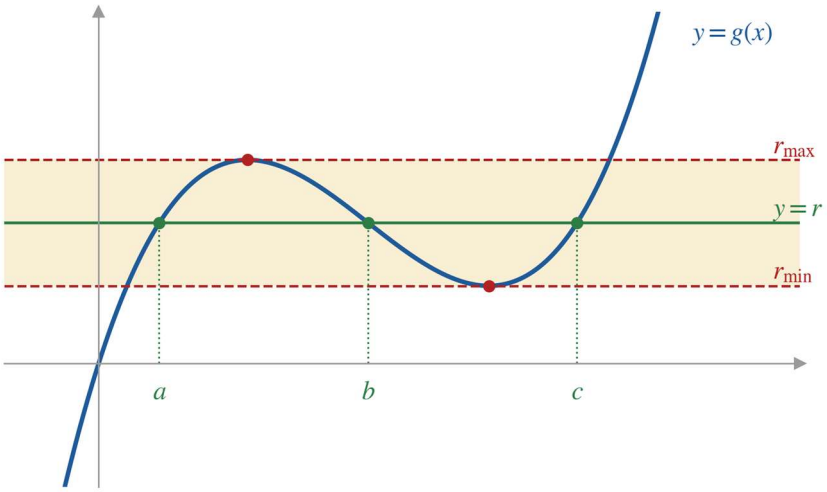
Fixons p, q tels qu'il existe au moins un triplet (a, b, c) de réels positifs de somme p et de somme des produits deux à deux q. Alors l'ensemble des valeurs de $r = abc$ pour ces triplets est un intervalle fermé $[r_{\min}, r_{\max}]$. La valeur $r_{\max}$ n'est atteinte que par des triplets ayant deux composantes égales ; la valeur $r_{\min}$ est atteinte par un triplet ayant deux composantes égales ou une composante nulle.

Démonstration. Par Viète, un réel r convient si et seulement si l'équation $g(x) = r$ a trois solutions réelles positives, comptées avec multiplicité. Remarquons que $p, q \geq 0$; pour $x < 0$, on a $g(x) = x^3 - px^2 + qx < 0$. Donc, si $r \geq 0$, toutes les solutions réelles de $g(x) = r$ sont positives, et il s'agit seulement de savoir quand elles sont **réelles**. De plus $r = abc \geq 0$.

Si les trois racines $a \leq b \leq c$ sont réelles, $g'(x) = 3x^2 - 2px + q$ a deux racines réelles $x_1 \leq x_2$ (théorème de Rolle, ou, en cas de racine multiple, parce qu'une racine double de $g - r$ est racine de g'). Si $x_1 = x_2$, g est strictement croissante et l'équation $g(x) = r$ n'a qu'une solution, forcément triple : $a = b = c$, et l'ensemble des r est réduit à un point. Supposons $x_1 < x_2$: g est strictement croissante sur $]-\infty, x_1]$, strictement décroissante sur $[x_1, x_2]$, strictement croissante sur $[x_2, +\infty[$.

- Si $g(x_2) < r < g(x_1)$, le théorème des valeurs intermédiaires fournit une solution dans chacun des trois intervalles de monotonie : trois racines réelles distinctes.
- Si $r = g(x_1)$ (resp. $r = g(x_2)$), le réel x_1 (resp. x_2) est racine double de $g - r$ (car $g'(x_1) = 0$), et la troisième racine est réelle (un polynôme réel de degré 3 ayant deux racines réelles comptées avec multiplicité a sa troisième racine réelle, par Viète).
- Si $r > g(x_1)$ ou $r < g(x_2)$, l'équation n'a qu'une solution réelle, qui est simple : les deux autres racines sont non réelles.

L'ensemble cherché est donc $[g(x_2), g(x_1)] \cap [0, +\infty[$, un intervalle fermé. Son extrémité droite $r_{\max} = g(x_1)$ correspond à une racine double. Son extrémité gauche est $g(x_2)$ (racine double) si $g(x_2) \geq 0$, et 0 (une racine nulle) sinon. ■



Le principe pqr : à p et q fixés, la droite horizontale y = r coupe le graphe de g en trois points (comptés avec multiplicité) exactement lorsque r est entre r_min et r_max.

À retenir

Conséquence pratique décisive : si l'expression à minorer est, à p et q fixés, une fonction monotone (par exemple affine) ou concave de r, son minimum sur l'intervalle $[r_{\min}, r_{\max}]$ est atteint en $r_{\min}$ ou en $r_{\max}$; il suffit alors de vérifier l'inégalité dans les deux cas « deux variables égales » et « une variable nulle ». On passe ainsi d'un problème à trois variables à un problème à une variable.

Exemple 15.5.2. *Montrer que pour $a, b, c \geq 0$: $p^3 + 9r \geq 4pq$ (Schur) en utilisant le principe pqr.*

L'expression $p^3 - 4pq + 9r$ est affine et croissante en r à p, q fixés, donc son minimum est atteint en $r = r_{\min}$, c'est-à-dire, par le théorème 15.5.1, pour un triplet où $c = 0$ ou deux variables sont égales.

- Si $c = 0$: il faut $(a+b)^3 \geq 4(a+b)ab$, c'est-à-dire $(a+b)^2 \geq 4ab$ (ou $a + b = 0$) : vrai.
- Si $b = c$: si $b = c = 0$ c'est évident ; sinon, par homogénéité, on peut prendre $b = c = 1$, et il faut $(a+2)^3 + 9a \geq 4(a+2)(2a+1)$, c'est-à-dire $a^3 + 6a^2 + 21a + 8 \geq 8a^2 + 20a + 8$, soit $a^3 - 2a^2 + a \geq 0$, soit $a(a-1)^2 \geq 0$: vrai.

À retenir — les réflexes du chapitre 15

- Égalité en $a = b = c$ **et** en $(1,1,0)$: penser à Schur.
- Inégalité symétrique polynomiale, égalité seulement en $a = b = c$: homogénéiser puis Muirhead (ou IA-G).
- SOS : écrire la différence comme $\sum S_a (b-c)^2$ et vérifier les critères.
- Contrainte non homogène ($abc = 1$, $a + b + c = abc$, côtés d'un triangle) : substitution du catalogue.
- pqr : fixer p et q, étudier la dépendance en r, réduire aux cas $b = c$ et $c = 0$.

15.6 Exercices

Exercice 15.1 ★★. Montrer que pour $a, b, c \geq 0$: $a^3 + b^3 + c^3 + abc \geq \frac{2}{3}(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2)$ en utilisant Muirhead et Schur. (Vérifier d'abord le cas $a = b = c$.)

Exercice 15.2 ★★. Soient $a,b,c>0$. Montrer que $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1$.

Exercice 15.3 ★★. Soient a,b,c les côtés d'un triangle. Montrer que $abc\geq(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

Exercice 15.4 ★★. Soient $a,b,c>0$ avec $abc=1$. Montrer que $\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\geq 1$.

Exercice 15.5 ★★★ (OIM 2000). Soient $a,b,c>0$ avec $abc=1$. Montrer que $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1$.

Exercice 15.6 ★★★ (OIM 1983, problème 6). Soient a,b,c les côtés d'un triangle. Montrer que

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0.$$

Exercice 15.7 ★★★. Soient $a,b,c\geq 0$. Montrer que $(a^2+b^2+c^2)^2\geq 3(a^3b+b^3c+c^3a)$.

Exercice 15.8 ★★★. Soient $a,b,c>0$. Montrer par SOS que $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+c}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 2$.

15.7 Solutions

Solution de l'exercice 15.1. Au point $a=b=c=1$: le membre de gauche vaut 4, celui de droite $\frac{2}{3}\cdot 6=4$: l'égalité a lieu, l'énoncé est cohérent. Multiplions par 3 : il faut

$$3(a^3+b^3+c^3)+3abc\geq 2\sum_{\text{sym}}a^2\,b.$$

Or Schur $(t=1)$ donne $a^3+b^3+c^3+3abc\geq\sum_{\text{sym}}a^2\,b$ et Muirhead $(3,0,0)\succ(2,1,0)$ donne $2(a^3+b^3+c^3)\geq\sum_{\text{sym}}a^2\,b$. En additionnant : $3(a^3+b^3+c^3)+3abc\geq 2\sum_{\text{sym}}a^2\,b$.

Solution de l'exercice 15.2. Écrivons

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1=\frac{(a+b)^2+(b+c)^2+(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)}.$$

Par ailleurs, par Cauchy–Schwarz (forme d'Engel),

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{ca}\geq\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}.$$

Il suffit donc de prouver

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\geq\frac{(a+b)^2+(b+c)^2+(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)}.$$

En chassant les dénominateurs et en développant, cette dernière inégalité se ramène, après simplification, à $(ac-b^2)^2\geq 0$, ce qui est vrai.

Solution de l'exercice 15.3. Ravi : $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ avec $x,y,z>0$. Alors $a+b-c=2z$, $b+c-a=2x$, $c+a-b=2y$, et l'inégalité devient $(y+z)(z+x)(x+y)\geq 8xyz$, qui est (10.7).

Solution de l'exercice 15.4. Notons $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$ et rappelons $abc=1$. Soit $\omega=e^{2i\pi/3}$, racine du polynôme X^2+X+1, de sorte que $a^2+a+1=(a-\omega)(a-\overline{\omega})$ pour tout a.

En notant $Q(X)=(X-a)(X-b)(X-c)=X^3-pX^2+qX-1$ (car $abc=1$), on calcule

$$(a-\omega)(b-\omega)(c-\omega)=-Q(\omega)=-(1-p\omega^2+q\omega-1)=p\omega^2-q\omega,$$

et de même $(a-\overline{\omega})(b-\overline{\omega})(c-\overline{\omega}) = p\omega - q\omega^2$ (en utilisant $\omega^3 = 1$). Par conséquent

$$\prod_{\text{cyc}} (a^2+a+1) = (p\omega^2 - q\omega)(p\omega - q\omega^2) = p^2 + q^2 - pq(\omega+\omega^2) = p^2+pq+q^2,$$

puisque $\omega + \omega^2 = -1$.

Un calcul direct par développement (en utilisant $\sum a^2b^2 = q^2 - 2p$ et $\sum_{\text{sym}} a^2\,b = pq - 3$, valables car $abc = 1$) donne de même

$$\sum_{\text{cyc}} (a^2+a+1)\,(b^2+b+1) = 2p^2 + pq + q^2 - 3q.$$

L'inégalité demandée, $\sum \frac{1}{a^2+a+1} \geq 1$, équivaut — en multipliant par le produit $\prod(a^2+a+1) > 0$ — à

$$\sum_{\text{cyc}} (a^2+a+1)\,(b^2+b+1) \geq \prod_{\text{cyc}} (a^2+a+1),$$

c'est-à-dire $2p^2 + pq + q^2 - 3q \geq p^2 + pq + q^2$, soit $p^2 \geq 3q$, qui est exactement (10.3). L'inégalité est donc établie, pour tous $a, b, c > 0$ avec $abc = 1$.

Solution de l'exercice 15.5. Voir l'exemple 15.4.2.

Solution de l'exercice 15.6. Substitution de Ravi : $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$ avec $x, y, z > 0$. Alors $a-b = y-x$, $b-c = z-y$, $c-a = x-z$, et un développement complet (regroupement des termes de degré 4 en x, y, z) donne l'identité

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) = 2xyz\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} - x - y - z\right).$$

Comme $xyz > 0$, il reste à montrer $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x+y+z$, ce qui est la forme d'Engel : $\sum \frac{x^2}{y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z} = x+y+z$.

Solution de l'exercice 15.7. Utilisons l'identité remarquable

$$(a^2+b^2+c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a) = \frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}} (a^2 - 2ab + bc - c^2 + ca)^2,$$

vérifiable par développement direct des deux membres. Le membre de droite est une somme de carrés, donc positif ou nul, ce qui établit l'inégalité. Égalité pour $a = b = c$ et aussi, par exemple, pour (a, b, c) proportionnel à $\left(\sin^2\frac{4\pi}{7}, \sin^2\frac{2\pi}{7}, \sin^2\frac{\pi}{7}\right)$: c'est une inégalité célèbre pour son cas d'égalité inattendu.

Solution de l'exercice 15.8. Reprenons les notations $p = a+b+c$, $q = ab+bc+ca$, $r = abc$, $\Pi = (a+b)(b+c)(c+a) = pq - r$. On a

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} - 1 = \frac{\sum(a-b)^2}{2q}, \qquad 1 - \frac{8abc}{\Pi} = \frac{\sum a(b-c)^2}{\Pi}$$

(la seconde égalité a été établie au chapitre 10). L'inégalité demandée s'écrit donc

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0, \qquad S_a = \Pi - 2qa,\ S_b = \Pi - 2qb,\ S_c = \Pi - 2qc,$$

après multiplication par $2q\Pi > 0$. Trois identités utiles, obtenues grâce à $\Pi = pq - r$:

$$S_a + S_b = 2\Pi - 2q(a+b) = 2[(a+b+c)q - r] - 2q(a+b) = 2(qc - r) = 2c^2(a+b),$$

et de même $S_b + S_c = 2a^2(b+c)$, $S_c + S_a = 2b^2(c+a)$: ces trois quantités sont donc toujours ≥ 0.

Supposons maintenant $a \geq b \geq c > 0$ (l'inégalité est symétrique, ceci est licite). Alors $S_b = \Pi - 2qb = q(a-b+c) - r \geq qc - r = c^2(a+b) \geq 0$, car $a - b + c \geq c$ (puisque $a \geq b$).

Comme $a \geq b \geq c$, on a $(a-b)(b-c) \geq 0$, donc $(a-c)^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + 2(a-b)(b-c) \geq (a-b)^2 + (b-c)^2$. Puisque $S_b \geq 0$,

$$S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq S_a(b-c)^2 + S_b[(a-b)^2 + (b-c)^2] + S_c(a-b)^2,$$

et le membre de droite se regroupe en

$$(S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_b + S_c)(a-b)^2 \geq 0,$$

la dernière inégalité résultant des deux identités $S_a + S_b = 2c^2(a+b) \geq 0$ et $S_b + S_c = 2a^2(b+c) \geq 0$ établies ci-dessus. L'inégalité est donc démontrée.

PARTIE IV — Équations fonctionnelles

CHAPITRE 16

16 Premiers pas : la méthode des substitutions

16.1 De quoi parle-t-on ?

Dans une équation ordinaire, l'inconnue est un nombre. Dans une équation fonctionnelle, l'inconnue est une fonction. Résoudre l'équation, c'est déterminer toutes les fonctions qui la vérifient.

Définition 16.1.1 (Équation fonctionnelle)

Soient A et B deux ensembles. Une équation fonctionnelle sur les fonctions $f : A \to B$ est une relation devant être vérifiée pour toutes les valeurs des variables libres, par exemple $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in A$. Une solution est une fonction $f : A \to B$ satisfaisant la relation. La réponse attendue est toujours de la forme : « les solutions sont exactement… ».

Attention.

Trois éléments de l'énoncé sont aussi importants que l'équation elle-même :

- le domaine A : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{>0}$, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$… ;
- le codomaine B : si $B = \mathbb{R}_{>0}$, on sait gratuitement que $f > 0$, ce qui est une information considérable ;
- les hypothèses annexes : continuité, monotonie, bornitude, $f(1) = 1$… Chacune est là pour être utilisée.

Une résolution complète comporte deux moitiés, et la seconde est aussi obligatoire que la première.

Méthode 16.1.2 — Le protocole en cinq étapes

1. **Deviner** les solutions probables (constantes, $ax + b$, x^n, $1/x$, $\exp$, $\ln$). Cela oriente tout le reste.
2. **Substituer** des valeurs particulières : $x = 0$, $y = 0$, $x = y$, $y = -x$, $x = 1$, $y = f(x)$, $x \to 1/x$… pour récolter des informations ($f(0) = 0$, f impaire, f injective…).
3. **Exploiter** ces informations : injectivité, surjectivité, points fixes, périodicité, réduction à une équation connue (Cauchy !).
4. **Conclure** : montrer que f est nécessairement l'une des fonctions devinées.
5. **Vérifier** : réinjecter chaque candidate dans l'équation d'origine. Sans cette étape, la solution est incomplète (et le barème de l'IMO le sanctionne).

16.2 Substituer, encore substituer

Exemple 16.2.1 (Le prototype). Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Deviner. Le terme $2xy$ évoque $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$: la fonction $x \mapsto x^2$ convient. Plus généralement, $f(x) = x^2 + cx$ convient, car $c(x+y) = cx + cy$.

Substituer. $x = y = 0$ donne $f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$. Posons $g(x) = f(x) - x^2$. Alors

$$g(x+y) + (x+y)^2 = g(x) + x^2 + g(y) + y^2 + 2xy = g(x) + g(y) + (x+y)^2,$$

donc $g(x+y) = g(x) + g(y)$: c'est l'équation de Cauchy. Sans hypothèse supplémentaire, ses solutions sur $\mathbb{R}$ ne sont pas toutes linéaires (chapitre 18), et la réponse est : $f(x) = x^2 + g(x)$ où g est additive. Si l'énoncé ajoute « f continue » (ou monotone, ou bornée sur un intervalle), alors $g(x) = cx$ et

$$f(x) = x^2 + cx, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Vérification. $f(x+y) = (x+y)^2 + c(x+y) = x^2 + cx + y^2 + cy + 2xy$.

Méthode 16.2.2 — Le réflexe « changement de fonction »

Si l'équation contient un terme parasite (ici $2xy$), on cherche une solution particulière f_0 et on pose $g = f - f_0$: l'équation en g est souvent une équation classique. Le même réflexe vaut pour $g = f/f_0$ dans le cas multiplicatif.

Exemple 16.2.3 (Systèmes de substitutions). Trouver toutes les $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ pour tout $x \neq 0$.

L'application $x \mapsto 1/x$ est une involution du domaine. Écrivons l'équation en x puis en $1/x$:

$$\begin{cases} f(x) + 2f(1/x) = 3x, \\ f(1/x) + 2f(x) = 3/x. \end{cases}$$

C'est un système linéaire en les deux inconnues $f(x)$ et $f(1/x)$. En multipliant la seconde équation par 2 et en retranchant la première : $3f(x) = \frac{6}{x} - 3x$, donc

$$f(x) = \frac{2}{x} - x.$$

Vérification. On a $f(1/x) = 2x - \frac{1}{x}$, donc $f(x) + 2f(1/x) = \left(\frac{2}{x} - x\right) + 2\left(2x - \frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x} - x + 4x - \frac{2}{x} = 3x$.

À retenir

Dès qu'apparaît une transformation σ du domaine telle que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$ (comme $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto -x$, $x \mapsto 1 - x$…), écrire l'équation en x et en $\sigma(x)$ fournit un système linéaire. Avec σ d'ordre 3, c'est-à-dire $\sigma \circ \sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$ (comme $x \mapsto \frac{x-3}{x+1}$), on écrit trois équations.

Exemple 16.2.4 (Bien choisir sa substitution). Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x^2 + y) = f(x) + f(y^2)$ pour tous x, y.

$x = y = 0$: $f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$.

$$y = 0 \text{ : } f(x^2) = f(x) \text{ pour tout } x. \qquad (1)$$

$$x = 0 \text{ : } f(y) = f(y^2) \text{ pour tout } y. \qquad (2)$$

Avec (1) et (2), l'équation devient $f(x^2 + y) = f(x) + f(y)$, puis, en remplaçant x par $\sqrt{t}$ pour $t \geq 0$ et grâce à (1) :

$$f(t + y) = f(t) + f(y) \qquad \forall t \geq 0,\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Cette relation n'est établie que pour $t \geq 0$, mais cela suffit. D'une part, (2) appliquée à $-y$ donne $f(-y) = f(y^2) = f(y)$: f est paire. D'autre part, pour $t \geq 0$ et $y = -t$, la relation donne $f(0) = f(t) + f(-t)$. Par parité,

$$2f(t) = f(t) + f(-t) = f(0) = 0 \Longrightarrow f(t) = 0 \quad \forall t \geq 0,$$

et, toujours par parité, $f \equiv 0$.

Réciproquement, $f \equiv 0$ convient.

Piège (le « donc » interdit).

Voici les fautes qui coûtent le plus de points :

- Oublier la vérification. Les substitutions ne donnent que des conditions nécessaires.
- Diviser par $f(x)$ sans avoir exclu $f(x) = 0$.
- Écrire $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ sans avoir démontré l'injectivité.
- Substituer hors du domaine : dans une équation sur $\mathbb{R}_{>0}$, on ne peut pas poser $x = 0$ ni $y = -x$.
- Conclure d'un cas particulier : avoir montré $f(x) = x$ pour $x \in \mathbb{Q}$ ne donne pas $f = \mathrm{id}$ sur $\mathbb{R}$ sans argument supplémentaire.
- Confondre $f(x)^2$ et $f(x^2)$, ou $f \circ f$ et f^2.

Exemple 16.2.5 (Une transformation d'ordre 3). Trouver toutes les $f : \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}.$$

Solution. Posons $\sigma(x) = \frac{x-1}{x}$. Pour $x \notin \{0,1\}$, on a $\sigma(x) = 1 - \frac{1}{x} \neq 1$ et $\sigma(x) \neq 0$ (car $x \neq 1$) : σ envoie le domaine $D = \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ dans lui-même. On calcule

$$\sigma^2(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - 1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}, \qquad \sigma^3(x) = \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{\frac{1}{1-x}} = x.$$

Écrivons l'équation en x, $\sigma(x)$ et $\sigma^2(x)$:

$$\begin{cases} f(x) + f\big(\sigma(x)\big) = 1 + x, \\ f\big(\sigma(x)\big) + f\big(\sigma^2(x)\big) = 1 + \sigma(x), \\ f\big(\sigma^2(x)\big) + f(x) = 1 + \sigma^2(x). \end{cases}$$

En ajoutant la première et la troisième équation et en retranchant la deuxième :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + x - \frac{x-1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{x^3 - x^2 - 1}{2x(x-1)}.$$

Vérification. Réciproquement, pour cette fonction, les trois quantités $f(x)$, $f\big(\sigma(x)\big)$, $f\big(\sigma^2(x)\big)$ sont données par la même formule appliquée à x, $\sigma(x)$, $\sigma^2(x)$; comme $\sigma^3 = \mathrm{id}$, on obtient $f\big(\sigma(x)\big) = \frac{1}{2}(1 + \sigma(x) - \sigma^2(x) + x)$, d'où $f(x) + f\big(\sigma(x)\big) = \frac{1}{2}(2 + 2x) = 1 + x$. L'unique solution est $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 1}{2x(x-1)}$.

Exemple 16.2.6 (Rendre l'argument libre). Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f\big(x - f(y)\big) = 1 - x - y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution. Posons $c = f(0)$. Avec $y = 0$: $f(x - c) = 1 - x$ pour tout x ; en posant $t = x - c$, qui parcourt $\mathbb{R}$ quand x parcourt $\mathbb{R}$, on obtient $f(t) = 1 - c - t$ pour tout t. En particulier $f(0) = 1 - c$, donc $c = 1 - c$, $c = \frac{1}{2}$, et $f(t) = \frac{1}{2} - t$.

Vérification. $f\big(x - f(y)\big) = \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2} + y\right) = 1 - x - y$. L'unique solution est $f(x) = \frac{1}{2} - x$.

16.3 Deviner avant de chercher

Méthode 16.3.1 — Le catalogue des solutions usuelles

Forme de l'équation	Candidates naturelles
$f(x+y) = f(x) + f(y)$	$f(x) = cx$
$f(x+y) = f(x)f(y)$	$f(x) = a^x$, $f \equiv 0$
$f(xy) = f(x) + f(y)$	$f(x) = c\ln x$ (sur $\mathbb{R}_{>0}$)
$f(xy) = f(x)f(y)$	$f(x) = x^\alpha$, $f \equiv 0$, $f \equiv 1$
$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$	$f(x) = cx^2$
polynomiale en f, degrés compatibles	f polynôme, comparer les degrés
présence de $f\big(f(x)\big)$	involutions, $f(x) = x$, $f(x) = c - x$, $f(x) = k/x$

Exemple 16.3.2 (Estimer le degré). Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que $P(x)P(x+1) = P(x^2 + x + 1)$.

Si $\deg P = n$, le membre de gauche est de degré $2n$ et celui de droite aussi : pas d'information. Comparons les coefficients dominants : $a_n^2 = a_n$, donc $a_n = 1$ (P étant non nul) ; ainsi P est unitaire. Si r est racine de P, alors en $x = r$: $0 = P(r^2 + r + 1)$, donc $r^2 + r + 1$ est encore racine ; en $x = r - 1$: $P(r-1)P(r) = 0 = P(r^2 - r + 1)$, donc $r^2 - r + 1$ est racine. Si P possède une racine réelle r, on a toujours $r^2 + r + 1 > r$ (car $r^2 + 1 > 0$) : en itérant $r \mapsto r^2 + r + 1$, on obtient une suite strictement croissante, donc une infinité de racines réelles distinctes, ce qui est absurde. Donc P n'a pas de racine réelle.

Deviner. Le polynôme $x^2 + 1$ convient, car

$$(x^2+1)[(x+1)^2+1] = (x^2+1)(x^2+2x+2) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = (x^2+x+1)^2 + 1.$$

Si P et Q sont solutions, PQ l'est aussi (multiplier les deux égalités) ; donc $(x^2+1)^k$ est solution pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Montrer qu'il n'y en a pas d'autre. Raisonnons par récurrence sur le degré. Les solutions constantes $P = c$ vérifient $c^2 = c$, donc $P \equiv 0$ ou $P \equiv 1$. Soit P une solution de degré $n \geq 1$; on a vu que P est unitaire. Soit $r \in \mathbb{C}$ une racine de P de **module maximal** (elle existe par le théorème de d'Alembert–Gauss). On a vu que $r^2 + r + 1$ et $r^2 - r + 1$ sont aussi racines, donc de module au plus $|r|$. Posons $u = r^2 + 1$; par l'identité du parallélogramme $|u + r|^2 + |u - r|^2 = 2|u|^2 + 2|r|^2$ (qui se vérifie en développant $|z|^2 = z\bar{z}$) :

$$2|u|^2 + 2|r|^2 = |r^2 + r + 1|^2 + |r^2 - r + 1|^2 \leq 2|r|^2.$$

Donc $u = 0$, c'est-à-dire $r^2 = -1$ et $r = \pm i$. Comme P est à coefficients réels, i et $-i$ sont tous deux racines, donc $x^2 + 1$ divise P : $P = (x^2+1)Q$ avec $\deg Q = n - 2$. En reportant dans l'équation et en utilisant l'identité ci-dessus,

$$[(x^2+x+1)^2+1]Q(x)Q(x+1) = [(x^2+x+1)^2+1]Q(x^2+x+1),$$

et, en simplifiant par le polynôme non nul $(x^2+x+1)^2+1$, on obtient que Q est solution. Par hypothèse de récurrence, $Q = (x^2+1)^m$ (le cas $Q \equiv 0$ est exclu car $P \neq 0$), donc $P = (x^2+1)^{m+1}$.

Conclusion. Les solutions sont

$$P \equiv 0 \quad \text{ou} \quad P(x) = (x^2+1)^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

16.4 Exercices

Exercice 16.1 ★. Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x+y) = f(x) + f(y) + 1$.

Exercice 16.2 ★. Trouver toutes les $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$.

Exercice 16.3 ★★. Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) + f(1-x) = x^2$.

Exercice 16.4 ★★. Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f\big(f(x)\big) = x$ et f croissante.

Exercice 16.5 ★★. Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y$ (on ne suppose rien d'autre).

Exercice 16.6 ★★. Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$.

Exercice 16.7 ★★★. Trouver toutes les $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(1) = 2$.

Exercice 16.8 ★★★. Trouver tous les polynômes P tels que $P(x^2) = P(x)P(x+1)$.

Exercice 16.9 ★★★. Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x^2 - y^2) = (x-y)\big(f(x) + f(y)\big)$.

16.5 Solutions

Solution de l'exercice 16.1. Posons $g = f + 1$: $g(x+y) = f(x+y) + 1 = f(x) + f(y) + 2 = g(x) + g(y)$. Donc g est additive et $f(x) = g(x) - 1$ avec g additive ; si l'on suppose f continue, $f(x) = cx - 1$.

Solution de l'exercice 16.2. Le système $f(x) - 2f(1/x) = x$, $f(1/x) - 2f(x) = 1/x$ donne, en ajoutant deux fois la seconde équation à la première : $-3f(x) = x + \frac{2}{x}$, donc $f(x) = -\frac{x}{3} - \frac{2}{3x}$. Vérification immédiate.

Solution de l'exercice 16.3. $x \mapsto 1-x$ est une involution : en remplaçant x par $1-x$, on obtient $f(1-x) + f(x) = (1-x)^2$. En comparant avec $f(x) + f(1-x) = x^2$, on obtient $x^2 = (1-x)^2$ pour tout x, ce qui est faux. Il n'y a aucune solution. (Moralité : une équation fonctionnelle peut n'avoir aucune solution ; il faut le dire.)

Solution de l'exercice 16.4. $f \circ f = \mathrm{id}$ donne f bijective. Si f est croissante et $f(x) > x$ pour un certain x, alors $f\big(f(x)\big) \geq f(x) > x$, c'est-à-dire $x > x$: absurde ; de même, $f(x) < x$ est impossible. Donc $f = \mathrm{id}$, qui convient.

Solution de l'exercice 16.5. $x = y = 0$: $2f(0) = 2f(0)$, rien. Posons $a = f(0)$ et $b = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, et fixons $t \in \mathbb{R}$.

- $x = 0, y = t$: $f(t) + f(-t) = 2a\cos t$.
- $x = \frac{\pi}{2} + t, y = \frac{\pi}{2}$: $f(\pi + t) + f(t) = 2f\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

- $x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2} + t$: $f(\pi + t) + f(-t) = 2b\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -2b\sin t$.

En ajoutant les deux premières relations et en retranchant la troisième : $2f(t) = 2a\cos t + 2b\sin t$, donc $f(x) = a\cos x + b\sin x$. Réciproquement, toutes ces fonctions conviennent, car $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y$ et $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$.

Solution de l'exercice 16.6. $y = x$: $2xf(x) = 2xf(x)^2$, donc pour $x \neq 0$: $f(x)(f(x) - 1) = 0$, c'est-à-dire $f(x) \in \{0,1\}$. Supposons $f(a) = 1$ et $f(b) = 0$ avec $ab \neq 0$: l'équation en $(x,y) = (a,b)$ donne $a \cdot 0 + b \cdot 1 = (a+b) \cdot 0$, donc $b = 0$: contradiction. Donc f vaut identiquement 0, ou identiquement 1, sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Reste la valeur $f(0)$: avec $y = 0$ et $x \neq 0$, l'équation donne $xf(0) = xf(x)f(0)$, soit $f(0)\big(1 - f(x)\big) = 0$. Si $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, cela impose $f(0) = 0$; si $f \equiv 1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(0)$ est libre. Les solutions sont donc $f \equiv 0$ et les fonctions valant 1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, avec $f(0) = c$ quelconque (dont $f \equiv 1$) ; la vérification est immédiate.

Solution de l'exercice 16.7. Par récurrence, $f(n) = nf(1) = 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis $f(-n) = -f(n)$, donc $f(n) = 2n$ sur $\mathbb{Z}$. Pour $q = \frac{a}{b}$ avec $b > 0$: $bf(q) = f(bq) = f(a) = 2a$, donc $f(q) = \frac{2a}{b} = 2q$. Ainsi $f(x) = 2x$ sur $\mathbb{Q}$ (voir chapitre 18).

Solution de l'exercice 16.8. Coefficients dominants : $a_n = a_n^2$, donc P unitaire (ou $P \equiv 0$). Si r est racine, r^2 est racine (prendre $x = r$) et $(r-1)^2$ aussi (prendre $x = r - 1$).

Si $|r| \notin \{0,1\}$, la suite $r, r^2, r^4, \ldots$ fournit une infinité de racines distinctes (leurs modules $|r|, |r|^2, |r|^4, \ldots$ sont deux à deux distincts) : absurde. Donc toute racine vérifie $|r| \in \{0,1\}$.

Si $|r| = 1$ et $r \neq 1$: comme $(r-1)^2$ est racine, $|r-1|^2 \in \{0,1\}$, donc $|r-1| = 1$ (puisque $r \neq 1$). Les points du cercle unité vérifiant simultanément $|r| = 1$ et $|r-1| = 1$ sont exactement $r = e^{\pm i\pi/3}$ (intersection de deux cercles de rayon 1). Mais alors $r^2 = e^{\pm 2i\ /3}$ serait aussi racine, de module 1 et différente de 1, et il faudrait par le même argument $|r^2 - 1| \in \{0,1\}$; or $\left|e^{\pm 2i\pi/3} - 1\right| = \sqrt{3} \notin \{0,1\}$. Contradiction. Donc la seule racine de module 1 possible est $r = 1$.

Ainsi toute racine de P vaut 0 ou 1 : $P(x) = x^m(x-1)^k$ pour des entiers $m, k \geq 0$. En reportant dans l'équation,

$$x^{2m}(x-1)^k(x+1)^k = x^{m+k}(x-1)^k(x+1)^m,$$

et en simplifiant par $(x-1)^k$ (licite comme identité de polynômes), il reste $x^{2m}(x+1)^k = x^{m+k}(x+1)^m$. Par unicité de la factorisation (x et $x+1$ sont premiers entre eux), cela impose $2m = m + k$ et $k = m$, c'est-à-dire $k = m$. Donc

$$P(x) = [x(x-1)]^n = (x^2 - x)^n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

(le cas $n = 0$ donnant $P \equiv 1$), et $P \equiv 0$. Vérification : $P(x)P(x+1) = x^n(x-1)^n \cdot (x+1)^n x^n = x^{2n}(x-1)^n(x+1)^n = (x^2)^n(x^2-1)^n = P(x^2)$.

Solution de l'exercice 16.9. $x = y = 0$: $f(0) = 0$. $y = 0$: $f(x^2) = xf(x)$. $y = -x$: $0 = f(0) = 2x\big(f(x) + f(-x)\big)$, donc f est impaire. Avec $y \to -y$: $f(x^2 - y^2) = (x+y)\big(f(x) - f(y)\big)$. En égalant les deux expressions :

$$(x-y)\big(f(x) + f(y)\big) = (x+y)\big(f(x) - f(y)\big) \Longrightarrow 2yf(x) = 2xf(y) \qquad \forall x, y.$$

Avec $y = 1$: $f(x) = cx$ où $c = f(1)$. Vérification : $c(x^2 - y^2) = (x-y)(cx + cy)$.

CHAPITRE 17

17 Injectivité, surjectivité, monotonie

17.1 Les trois propriétés reines

Définition 17.1.1 (Injection, surjection, bijection)

Soit $f : A \to B$.

- f est injective si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$;
- f est surjective si tout $b \in B$ s'écrit $b = f(a)$;
- f est bijective si elle est injective et surjective ; elle admet alors une réciproque f^{-1}.

Méthode 17.1.2 — Comment détecter l'injectivité et la surjectivité

- **Injectivité** : si l'équation contient un membre où la variable y apparaît librement et isolée (typiquement $\cdots = y + \cdots$), alors $f(y_1) = f(y_2)$ injecté dans l'équation donne $y_1 = y_2$.
- **Surjectivité** : si un membre parcourt tout B quand une variable parcourt A, f est surjective. Exemple : $f\big(f(y)\big) = y + c$ montre que $f \circ f$ est surjective, donc f est surjective ; et injective, donc bijective.
- $f \circ f = \mathrm{id}$: f est une involution, donc bijective, et $f^{-1} = f$.

Exemple 17.1.3 (Injectivité offerte). Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$.

Cherchons d'abord la surjectivité. Posons $y = -f(x)$:

$$f(0) = 2x + f\big(f\big(-f(x)\big) - x\big).$$

Le membre de gauche est constant ; donc $f\big(f\big(-f(x)\big) - x\big) = f(0) - 2x$ prend toutes les valeurs réelles quand x parcourt $\mathbb{R}$: f est surjective. Il existe donc a avec $f(a) = 0$. En prenant $x = a$ dans l'équation : $f(y) = 2a + f(f(y) - a)$. Comme f est surjective, $f(y)$ parcourt $\mathbb{R}$, donc, en posant $t = f(y)$:

$$t = 2a + f(t - a) \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

soit, en posant $u = t - a$: $f(u) = u - a$ pour tout u.

Vérification, avec $f(x) = x + c$ (où $c = -a$) :

$$f(f(x) + y) = x + y + 2c, \qquad 2x + f(f(y) - x) = 2x + y + 2c - x = x + y + 2c.$$

Donc $f(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Exemple 17.1.4 (Ce que l'on peut tirer d'une équation résistante). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f\big(f(x)\big) = x^2 - x + 1$ pour tout x. Montrer que f n'est pas injective et que $f(0) = f(1) = 1$.

Solution. Notons $g(x) = x^2 - x + 1 = f \circ f(x)$. On a $g(0) = g(1) = 1$. Si f était injective, $f \circ f$ le serait aussi ; or $g(0) = g(1)$: f n'est pas injective.

L'astuce est de calculer $f \circ f \circ f$ de deux façons :

$$f\big(f(f(x))\big) = f(g(x)) \qquad \text{et} \qquad f\big(f(f(x))\big) = g(f(x)).$$

Donc $f(x^2 - x + 1) = f(x)^2 - f(x) + 1$ pour tout x.

- Avec $x = 1$: $f(1) = f(1)^2 - f(1) + 1$, soit $(f(1) - 1)^2 = 0$, donc $f(1) = 1$.
- Avec $x = 0$: $f(1) = f(0)^2 - f(0) + 1$, soit $f(0)(f(0) - 1) = 0$, donc $f(0) \in \{0,1\}$.
- Si $f(0) = 0$, alors $f\big(f(0)\big) = f(0) = 0$, alors que $g(0) = 1$: contradiction. Donc $f(0) = 1$.

Déterminer **toutes** les solutions de cette équation (et même savoir s'il en existe) est une question beaucoup plus délicate, qui dépasse ce chapitre ; en compétition, on demande typiquement des conclusions partielles comme celles-ci.

Exemple 17.1.5 (Injectivité, puis additivité). Trouver toutes les $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f\big(2x + f(y)\big) = x + y + f(x) \qquad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

Solution. Posons $c = f(0)$.

Injectivité. Si $f(y_1) = f(y_2)$, les membres de gauche pour (x, y_1) et (x, y_2) sont égaux, donc $x + y_1 + f(x) = x + y_2 + f(x)$ et $y_1 = y_2$.

Valeur en 0. Avec $x = 0$: $f\big(f(y)\big) = y + c$ pour tout y. Remplaçons y par $f(y)$ dans l'équation : $f(2x + y + c) = x + f(y) + f(x)$. Avec $y = 0$, cela donne $f(2x + c) = x + c + f(x)$; mais l'équation initiale avec $y = 0$ donne $f(2x + c) = x + f(x)$. Donc $c = 0$.

Additivité. On a donc $f(2x + y) = x + f(x) + f(y)$ pour tous x, y, et, avec $y = 0$, $f(2x) = x + f(x)$. Ainsi $f(2x + y) = f(2x) + f(y)$; comme $2x$ parcourt $\mathbb{R}$, f est additive.

Conclusion. Par additivité, $f(2x) = 2f(x)$; avec $f(2x) = x + f(x)$, on obtient $f(x) = x$ pour tout x. Aucune hypothèse de régularité n'a été nécessaire.

Vérification. $f\big(2x + f(y)\big) = 2x + y = x + y + f(x)$. L'unique solution est $f = \mathrm{id}$.

> **Savoir s'arrêter.**
> L'exemple 17.1.4 est volontairement inconfortable : en compétition, il faut savoir reconnaître vite si l'on dispose ou non des outils pour conclure, et rédiger proprement les conclusions partielles obtenues.

17.2 Monotonie et densité

Théorème 17.2.1 (Du rationnel au réel)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(q) = cq$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

1. Si f est monotone, alors $f(x) = cx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Si f est additive ($f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous x, y), la même conclusion vaut dès que f est continue en un point, ou bornée sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$.

Démonstration. *1.* Supposons f croissante (le cas décroissant s'obtient en remplaçant f par $-f$ et c par $-c$). Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tous rationnels $p < x < q$, on a $cp = f(p) \le f(x) \le f(q) = cq$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut choisir, pour tout entier $n \ge 1$, des rationnels $p_n \in \left]x - \frac{1}{n}, x\right[$ et $q_n \in \left]x, x + \frac{1}{n}\right[$; en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $cx \le f(x) \le cx$.

2, continuité en un point. Supposons f additive et continue en x_0. Pour tout x et tout h, $f(x+h) - f(x) = f(h) = f(x_0+h) - f(x_0)$, qui tend vers 0 quand $h \to 0$: f est continue en tout point. Si (q_n) est une suite de rationnels tendant vers x, on a donc $f(x) = \lim f(q_n) = \lim c q_n = cx$.

2, bornitude. Supposons f additive et $|f| \leq M$ sur $[a,b]$. La fonction $g(x) = f(x) - cx$ est additive, nulle sur $\mathbb{Q}$, et bornée sur $[a,b]$ par $M' = M + |c|\max(|a|,|b|)$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ un entier. L'intervalle $[a-nx, b-nx]$, de longueur $b-a > 0$, contient un rationnel r ; alors $nx + r \in [a,b]$ et, par additivité, $g(nx+r) = ng(x) + g(r) = ng(x)$. Donc $n|g(x)| \leq M'$ pour tout n, ce qui impose $g(x) = 0$. ■

Méthode 17.2.2 — Fabriquer la monotonie

Beaucoup d'équations fonctionnelles fournissent une monotonie « cachée » :

- si f est additive et $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}_{>0}$, alors f est croissante : pour $x < y$, $f(y) = f(x) + f(y-x) \geq f(x)$;
- si $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ vérifie $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$, alors pour $x < y$, $f(y) \geq f(x) + f(y-x) > f(x)$: f est strictement croissante ;
- si l'équation donne $f(x)^2 =$ (quelque chose de connu), le signe de f est souvent forcé par le codomaine.

Exemple 17.2.3 (Additive et positive). Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additives telles que $f(x^2) \geq 0$ pour tout x.

Solution. Tout réel positif est un carré, donc $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Par la méthode 17.2.2, f est croissante ; par le théorème 18.1.1, $f(q) = cq$ sur $\mathbb{Q}$ avec $c = f(1) \geq 0$; par le théorème 17.2.1, $f(x) = cx$. Réciproquement, $f(x) = cx$ avec $c \geq 0$ convient. Les solutions sont les $x \mapsto cx$, $c \geq 0$.

À retenir — les réflexes du chapitre 17

- Une variable isolée d'un côté ($\cdots = y + \cdots$) : injectivité. Un membre qui parcourt tout l'ensemble : surjectivité.
- $f \circ f = \mathrm{id}$: bijection et $f^{-1} = f$.
- Calculer $f \circ f \circ f$ de deux façons.
- Du rationnel au réel : monotonie, continuité en un point ou bornitude sur un intervalle.

17.3 Exercices

Exercice 17.1 ★★. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f\big(f(x)\big) = x + 1$. Montrer que f est bijective, puis qu'une telle f existe.

Exercice 17.2 ★★. Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f\big(x + f(y)\big) = y + f(x)$.

Exercice 17.3 ★★★. Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$.

Exercice 17.4 ★★★ (Olympiade balkanique). Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f\big(xf(x) + f(y)\big) = f(x)^2 + y$.

Exercice 17.5 ★★★. Soit $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ croissante telle que $f\big(f(x)\big) = 3x^2$. Montrer que f est injective, puis déterminer $f(1)$ si l'on suppose f multiplicative.

17.4 Solutions

Solution de l'exercice 17.1. $f \circ f$ est bijective ($x \mapsto x+1$ l'est), donc f est injective (si $f(a)=f(b)$, alors $a+1=f\big(f(a)\big)=f\big(f(b)\big)=b+1$) et surjective (si $z \in \mathbb{R}$, alors $z=f\big(f(z-1)\big)$, donc z est atteint par f).

Existence. La fonction $f(x)=x+\frac{1}{2}$ convient : $f\big(f(x)\big)=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=x+1$.

Solution de l'exercice 17.2. Le membre de droite contient y isolé : si $f(y_1)=f(y_2)$, alors $y_1+f(x)=y_2+f(x)$, donc $y_1=y_2$: f est injective. De plus, pour x fixé, $y+f(x)$ parcourt $\mathbb{R}$: f est surjective. Soit a tel que $f(a)=0$ (surjectivité) ; $x=a$, $y=a$ donne $f(a)=a+f(a)$, donc $a=0$, c'est-à-dire $f(0)=0$. Puis $x=0$: $f\big(f(y)\big)=y$.

Enfin, en appliquant l'équation avec $y \to f(y)$: $f\Big(x+f\big(f(y)\big)\Big)=f(y)+f(x)$, c'est-à-dire $f(x+y)=f(x)+f(y)$: f est additive et involutive. Réciproquement, toute involution additive convient, car $f\big(x+f(y)\big)=f(x)+f\big(f(y)\big)=f(x)+y$; si l'on ajoute la continuité, $f(x)=cx$ avec $c^2=1$, donc $f(x)=x$ ou $f(x)=-x$.

Solution de l'exercice 17.3. $y=\frac{x^2-f(x)}{2}$ rend égaux les arguments des deux membres :

$$f\left(\frac{x^2+f(x)}{2}\right)=f\left(\frac{x^2+f(x)}{2}\right)+4f(x)\cdot\frac{x^2-f(x)}{2},$$

donc $2f(x)\big(x^2-f(x)\big)=0$ pour tout x. Ainsi, pour chaque x, $f(x)=0$ ou $f(x)=x^2$. En particulier $f(0)=0$, et $x=0$ dans l'équation donne $f(y)=f(-y)$: f est paire.

Supposons $f \not\equiv 0$: il existe $b \neq 0$ avec $f(b)=b^2 \neq 0$. Prenons $x=b$ et $y>0$ quelconque :

$$f(b^2+y)=f(b^2-y)+4b^2y.$$

Le membre de droite est strictement positif, car $f(b^2-y) \geq 0$ et $4b^2y>0$; le membre de gauche, qui ne peut valoir que 0 ou $(b^2+y)^2$, vaut donc $(b^2+y)^2$. Ainsi $f(t)=t^2$ pour tout $t>b^2$.

Supposons enfin qu'il existe $a \neq 0$ avec $f(a)=0$. Avec $x=a$, l'équation donne $f(y)=f(a^2-y)$ pour tout y, et par parité $f(y)=f(y-a^2)$: f est périodique de période a^2. Pour $t>b^2$, on aurait alors $t^2=f(t)=f(t+a^2)=(t+a^2)^2$, soit $a^2(2t+a^2)=0$: impossible. Donc $f(x)=x^2$ pour tout $x \neq 0$, et aussi en 0.

Les solutions sont $f \equiv 0$ et $f(x)=x^2$, qui conviennent toutes deux (vérification directe).

Solution de l'exercice 17.4. Le y isolé à droite donne l'injectivité (si $f(y_1)=f(y_2)$, l'équation à x fixé donne $y_1=y_2$) et la surjectivité de f (à x fixé, le membre de droite parcourt $\mathbb{R}$).

Soit a avec $f(a)=0$. Avec $x=a$: $f\big(f(y)\big)=y$ pour tout y : f est une involution (bijective). En substituant $x=0$, $y=0$ dans l'équation d'origine : $f\big(0\cdot f(0)+f(0)\big)=f(0)^2$, c'est-à-dire $f\big(f(0)\big)=f(0)^2$. Or $f\big(f(0)\big)=0$ (involution appliquée en 0), donc $f(0)^2=0$, d'où $f(0)=0$: par injectivité, $a=0$.

En substituant $y=f(z)$ dans l'équation d'origine (licite, f bijective) et en utilisant $f\big(f(z)\big)=z$:

$$f\big(z+xf(x)\big)=f(z)+f(x)^2 \qquad \forall x,z. \qquad (\star)$$

Avec $z=0$: $f\big(xf(x)\big)=f(x)^2$. Mais en substituant $x \to f(x)$ dans l'équation d'origine avec $y=0$, on obtient aussi $f(f(x)\cdot x)=f\big(f(x)\big)^2+0=x^2$ (en utilisant $f\big(f(x)\big)=x$ et $f(0)=0$). Donc $f(x)^2=x^2$ pour tout x : c'est la relation clé.

La relation $(\star)$ se réécrit donc $f\big(z+xf(x)\big)=f(z)+x^2$ pour tous x,z. Pour $x\neq 0$, posons $\sigma(x)=\pm 1$ tel que $xf(x)=\sigma(x)x^2$, ce qui est possible puisque $f(x)^2=x^2$.

Puisque $f(1)^2=1$, on a $f(1)=1$ ou $f(1)=-1$.

Cas $f(1)=1$. Prenons $z=1$ dans $(\star)$: $f\big(1+xf(x)\big)=f(1)+x^2=1+x^2$ pour tout x. En élevant au carré et en utilisant $f(t)^2=t^2$:

$$(1+x^2)^2=f\big(1+xf(x)\big)^2=\big(1+xf(x)\big)^2.$$

Pour $x\neq 0$, l'égalité $(1+x^2)^2=(1+\sigma(x)x^2)^2$ donne $1+\sigma(x)x^2=\pm(1+x^2)$. Si $\sigma(x)=-1$: $1-x^2=\pm(1+x^2)$, ce qui force $x^2=0$ (signe $+$) ou $1=-1$ (signe $-$) : impossible pour $x\neq 0$. Donc $\sigma(x)=1$ pour tout $x\neq 0$, c'est-à-dire $f(x)=x$ pour tout x.

Cas $f(1)=-1$. Comme f est involutive, $f(-1)=1$. Prenons $y=-1$ dans l'équation d'origine : $f(xf(x)+1)=f(x)^2-1=x^2-1$. En élevant au carré :

$$(x^2-1)^2=\big(1+xf(x)\big)^2=(1+\sigma(x)x^2)^2.$$

Si $\sigma(x)=1$: $(1+x^2)^2=(x^2-1)^2$ force $4x^2=0$, impossible pour $x\neq 0$. Donc $\sigma(x)=-1$ pour tout $x\neq 0$ (et l'égalité $(1-x^2)^2=(x^2-1)^2$ est alors automatique), c'est-à-dire $f(x)=-x$ pour tout x.

Les deux fonctions $f(x)=x$ et $f(x)=-x$ vérifient bien l'équation d'origine (vérification directe), et ce sont les deux seules solutions.

Solution de l'exercice 17.5. Si $f(a)=f(b)$, alors $3a^2=f\big(f(a)\big)=f\big(f(b)\big)=3b^2$, donc $a=b$ (car $a,b>0$) : f est injective.

Si f est multiplicative, $f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)^2$, donc $f(1)(f(1)-1)=0$; comme $f(1)>0$ (codomaine $\mathbb{R}_{>0}$), $f(1)=1$. Alors $f\big(f(1)\big)=f(1)=1$. Or l'équation donne $f\big(f(1)\big)=3\cdot 1^2=3$. Ainsi $1=3$: contradiction. Il n'existe donc pas de telle f multiplicative : l'énoncé est un piège volontaire.

CHAPITRE 18

18 L'équation de Cauchy et ses variantes

C'est l'équation fonctionnelle par excellence. On la rencontre à la fin d'un très grand nombre de problèmes ; il faut connaître par cœur la démonstration ci-dessous.

18.1 Sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

Théorème 18.1.1 (Équation de Cauchy sur $\mathbb{Q}$)

Soit $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$. Alors $f(x) = cx$ avec $c = f(1)$.

Démonstration. *Sur* $\mathbb{N}$. $x = y = 0$ donne $f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$. Par récurrence, $f(n) = nf(1)$: c'est vrai pour $n = 0$, et $f(n+1) = f(n) + f(1) = (n+1)f(1)$.

Sur $\mathbb{Z}$. $f(n) + f(-n) = f(0) = 0$, donc $f(-n) = -f(n) = -nf(1)$.

Sur $\mathbb{Q}$. Soit $q = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$f(a) = f\left(\underbrace{\frac{a}{b} + \cdots + \frac{a}{b}}_{b \text{ termes}}\right) = b\, f\left(\frac{a}{b}\right),$$

donc $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{f(a)}{b} = \frac{a}{b} f(1)$. ■

À retenir

Sur $\mathbb{Q}$, l'additivité suffit : f est linéaire. Aucune hypothèse de régularité n'est nécessaire. C'est pourquoi, dans un problème sur $\mathbb{R}$, on cherche toujours à obtenir une information supplémentaire (monotonie, positivité, continuité, bornitude) : sur $\mathbb{R}$ seul, l'additivité ne suffit pas.

18.2 Sur $\mathbb{R}$: le rôle des hypothèses de régularité

Théorème 18.2.1 (Cauchy sur $\mathbb{R}$: hypothèses suffisantes)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additive et $c = f(1)$. Chacune des hypothèses suivantes entraîne $f(x) = cx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1. f est continue en un point ;
2. f est monotone sur un intervalle de longueur non nulle ;
3. f est majorée, ou minorée, sur un intervalle de longueur non nulle ;
4. f est positive sur $\mathbb{R}_{>0}$;
5. le graphe de f n'est pas dense dans $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Par le théorème 18.1.1, $f(q) = cq$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$. Posons $g(x) = f(x) - cx$: g est additive et nulle sur $\mathbb{Q}$; par additivité, $g(nx + r) = ng(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $r \in \mathbb{Q}$. Il s'agit de montrer que $g \equiv 0$.

Cas 3. Supposons par exemple $f \leq M$ sur $[a,b]$, $a<b$ (le cas minoré s'obtient en remplaçant f par $-f$). Alors $g \leq M' = M + |c|\max(|a|,|b|)$ sur $[a,b]$. Supposons $g(x) \neq 0$ pour un certain x, et choisissons des entiers n du signe de $g(x)$, avec $|n|$ arbitrairement grand. L'intervalle $[a-nx, b-nx]$, de longueur $b-a>0$, contient un rationnel r ; alors $nx+r \in [a,b]$ et $g(nx+r) = ng(x) = |n|\,|g(x)|$, qui dépasse M' pour $|n|$ assez grand : contradiction.

Cas 2. Si f est monotone sur $[a,b]$, elle y est bornée (entre $f(a)$ et $f(b)$) : on est ramené au cas 3.

Cas 1. Si f est continue en x_0, elle est bornée sur un intervalle $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ (définition de la continuité avec $\varepsilon = 1$) : on est ramené au cas 3.

Cas 4. Si $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}_{>0}$, elle est minorée par 0 sur $[1,2]$: on est ramené au cas 3. (Elle est même croissante : pour $x<y$, $f(y) = f(x) + f(y-x) \geq f(x)$.)

Cas 5. Supposons qu'il existe x_0 avec $f(x_0) \neq cx_0$. Les vecteurs $u = (1,c)$ et $v = \big(x_0, f(x_0)\big)$ de $\mathbb{R}^2$ ne sont pas colinéaires, puisque leur déterminant $f(x_0) - cx_0$ est non nul. Pour tous rationnels p, q, le point $pu+qv = \big(p+qx_0,\ pc+qf(x_0)\big) = \big(p+qx_0,\ f(p+qx_0)\big)$ appartient au graphe de f (par additivité et $\mathbb{Q}$-homogénéité). Or tout point w du plan s'écrit $w = \lambda u + \mu v$ avec λ, μ réels ; en approchant λ et μ par des rationnels, on approche w par des points du graphe. Le graphe est donc dense : contradiction. ■

Mesurabilité.

En théorie de la mesure, on démontre qu'une fonction additive **mesurable** au sens de Lebesgue est linéaire. Ce résultat dépasse le cadre de ce livre et n'est jamais nécessaire en olympiade : les hypothèses 1 à 5 suffisent toujours.

Théorème 18.2.2 (Additive et minorée sur les positifs)

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additive telle que $g(x) \geq -M$ pour tout $x \geq 0$ (avec $M \geq 0$ fixé). Alors $g(x) = cx$ avec $c = g(1)$.

Démonstration. La fonction g est minorée par $-M$ sur l'intervalle $[0,1]$: c'est le cas 3 du théorème 18.2.1. ■

Attention : les solutions pathologiques.

Sans aucune hypothèse, il existe des solutions « pathologiques » de l'équation de Cauchy sur $\mathbb{R}$: en considérant $\mathbb{R}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ et en choisissant une base (dite de Hamel, dont l'existence repose sur l'axiome du choix), on construit des applications $\mathbb{Q}$-linéaires non $\mathbb{R}$-linéaires. D'après le cas 5 du théorème 18.2.1, leur graphe est dense dans le plan. Il ne faut donc jamais écrire « f additive donc $f(x) = cx$ » sur $\mathbb{R}$ sans justification.

18.3 Les équations sœurs

Théorème 18.3.1 (Les quatre équations de Cauchy)

Sur les domaines indiqués, et pour f continue, ou monotone :

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sur $\mathbb{R} \Longrightarrow f(x) = cx$;
2. $f(x+y) = f(x)f(y)$ sur $\mathbb{R} \Longrightarrow f \equiv 0$ ou $f(x) = a^x$ avec $a>0$;

3. $f(xy) = f(x) + f(y)$ sur $\mathbb{R}_{>0} \Longrightarrow f(x) = c\ln x$;
4. $f(xy) = f(x)f(y)$ sur $\mathbb{R}_{>0} \Longrightarrow f \equiv 0$ ou $f(x) = x^{\alpha}$.

Réciproquement, ces fonctions sont solutions.

Démonstration.

(1) C'est le théorème 18.2.1 (cas 1 ou 2).

(2) S'il existe x_0 tel que $f(x_0) = 0$, alors $f(x) = f(x_0)f(x - x_0) = 0$ pour tout x. Sinon f ne s'annule pas, et $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0$ pour tout x. La fonction $g = \ln f$ est alors additive, et continue (resp. monotone) comme f ; par (1), $g(x) = cx$, donc $f(x) = e^{cx} = a^x$ avec $a = e^c > 0$.

(3) La fonction $g(u) = f(e^u)$, définie sur $\mathbb{R}$, vérifie $g(u + v) = f(e^u e^v) = g(u) + g(v)$ et hérite de la continuité (resp. monotonie) de f. Par (1), $g(u) = cu$, donc $f(x) = g(\ln x) = c\ln x$.

(4) S'il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) = 0$, alors $f(x) = f(x_0)f(x/x_0) = 0$ pour tout $x > 0$. Sinon $f(x) = f\left(\sqrt{x}\right)^2 > 0$ pour tout $x > 0$, et $g(u) = \ln f(e^u)$ est additive, continue (resp. monotone). Par (1), $g(u) = \alpha u$, donc $f(x) = e^{\alpha \ln x} = x^{\alpha}$.

Les réciproques sont les propriétés algébriques de a^x, $\ln$ et x^{α}. ■

Méthode 18.3.2 — Additive et multiplicative

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie simultanément

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \text{et} \qquad f(xy) = f(x)f(y),$$

alors $f \equiv 0$ ou $f = \mathrm{id}$, **sans hypothèse de régularité**.

Démonstration. On a $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)^2$, donc $f(1) \in \{0,1\}$.

Si $f(1) = 0$, alors $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x)f(1) = 0$ pour tout x.

Si $f(1) = 1$: pour $x \geq 0$, $f(x) = f\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}\right) = f\left(\sqrt{x}\right)^2 \geq 0$. Ainsi f est additive et positive sur $\mathbb{R}_{>0}$; par le théorème 18.2.1 (cas 4), $f(x) = f(1)x = x$ pour tout x.

Réciproquement, $f \equiv 0$ et $f = \mathrm{id}$ conviennent. ■

Exemple 18.3.3 (Un classique d'olympiade). *Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones telles que $f\big(x + f(y)\big) = f(x) + y$ pour tous x, y.*

Solution. Avec $x = 0$: $f\big(f(y)\big) = f(0) + y$, qui parcourt $\mathbb{R}$: f est surjective. Si $f(y_1) = f(y_2)$, alors $f(0) + y_1 = f(0) + y_2$: f est injective. Soit a tel que $f(a) = 0$. Avec $x = y = a$: $f(a + 0) = f(a) + a$, donc $a = 0$ et $f(0) = 0$. Avec $x = 0$: $f\big(f(y)\big) = y$, donc f est une involution. En remplaçant y par $f(y)$ dans l'équation : $f(x + y) = f(x) + f(y)$: f est additive.

Comme f est monotone, le théorème 18.2.1 (cas 2) donne $f(x) = cx$, et $f\big(f(1)\big) = 1$ donne $c^2 = 1$. Les solutions sont $f = \mathrm{id}$ et $f = -\mathrm{id}$, qui conviennent : $f(x - y) = -x + y = f(x) + y$ pour la seconde.

Sans l'hypothèse de monotonie, le raisonnement montre que les solutions sont exactement les fonctions additives involutives ($f \circ f = \mathrm{id}$) : une telle fonction vérifie bien $f\big(x + f(y)\big) = f(x) + f\big(f(y)\big) = f(x) + y$.

Exemple 18.3.4 (L'équation de Jensen). *Trouver toutes les $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$ pour tous x,y.*

Solution. Posons $b=f(0)$ et $g(x)=f(x)-b$; g vérifie la même équation et $g(0)=0$. Avec $y=0$: $g\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{g(x)}{2}$ pour tout x. Donc, pour tous x,y,

$$\frac{g(x+y)}{2}=g\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{g(x)+g(y)}{2},$$

et g est additive. Comme g est continue, $g(x)=ax$ (théorème 18.2.1), donc $f(x)=ax+b$. Réciproquement, les fonctions affines conviennent.

À retenir — les réflexes du chapitre 18

- Sur $\mathbb{Q}$, une fonction additive est linéaire ; sur $\mathbb{R}$, il faut **une** hypothèse supplémentaire (continuité en un point, monotonie, bornitude d'un côté sur un intervalle, positivité).
- Additive et multiplicative : 0 ou l'identité, sans aucune hypothèse.
- Les équations $f(x+y)=f(x)f(y)$, $f(xy)=f(x)+f(y)$, $f(xy)=f(x)f(y)$ se ramènent à Cauchy par $\ln$ ou $\exp$, après avoir traité le cas où f s'annule.
- Changement de fonction ($g=f-f(0)$, $g=f-f_0$) pour se ramener à Cauchy.

18.4 Exercices

Exercice 18.1 ★. Soit $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ additive avec $f(3)=6$. Calculer $f\left(\frac{5}{7}\right)$.

Exercice 18.2 ★★. Trouver toutes les $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que $f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$.

Exercice 18.3 ★★. Trouver toutes les $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$ telles que $f(xy)=f(x)f(y)$ et f croissante.

Exercice 18.4 ★★★. Trouver toutes les $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $f(x^2+y)=f(x)^2+f(y)$ et f croissante sur $\mathbb{R}_{>0}$.

Exercice 18.5 ★★★. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ additive et *continue* telle que $f(x)f(1/x)=1$ pour $x\neq 0$. Montrer que $f=\mathrm{id}$ ou $f=-\mathrm{id}$.

Exercice 18.6 ★★★. Trouver toutes les $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $f(f(x)+y)=f(x^2-y)+4yf(x)$, sans hypothèse de régularité.

18.5 Solutions

Solution de l'exercice 18.1. $f(3)=3f(1)=6$, donc $f(1)=2$ et $f(q)=2q$: $f\left(\frac{5}{7}\right)=\frac{10}{7}$.

Solution de l'exercice 18.2. Posons $g=f+1$: $g(x+y)=f(x+y)+1=\big(1+f(x)\big)\big(1+f(y)\big)=g(x)g(y)$, et g est continue. D'après le théorème 18.3.1 (cas 2), $g\equiv 0$ ou $g(x)=a^x$ avec $a>0$. Les solutions continues sont donc $f\equiv -1$ (cas $g\equiv 0$) et $f(x)=a^x-1$ avec $a>0$ (le cas $a=1$ donnant $f\equiv 0$). Réciproquement, ces fonctions conviennent.

Solution de l'exercice 18.3. Posons $g(u)=\ln f(e^u)$: g est additive et croissante, donc $g(u)=\alpha u$ et $f(x)=x^\alpha$ avec $\alpha\geq 0$.

Solution de l'exercice 18.4. $y=0$: $f(x^2)=f(x)^2+f(0)$. $x=0$: $f(y)=f(0)^2+f(y)$, donc $f(0)=0$, puis $f(x^2)=f(x)^2\geq 0$. Ainsi $f\geq 0$ sur $\mathbb{R}_{>0}$ et $f(x^2+y)=f(x^2)+f(y)$, c'est-à-dire $f(t+y)=f(t)+f(y)$ pour tout $t\geq 0$ (tout réel positif est un carré) et tout y. Avec $y=-t$, on obtient $f(-t)=-f(t)$; pour $t<0$, on écrit alors $f(y)=f\big((y+t)+(-t)\big)=f(y+t)-f(t)$: f est additive. Additive et croissante sur $\mathbb{R}_{>0}$: $f(x)=cx$ avec $c\geq 0$; l'égalité $f(x^2)=f(x)^2$ donne $cx^2=c^2x^2$, donc $c\in\{0,1\}$: $f\equiv 0$ ou $f=\mathrm{id}$.

Solution de l'exercice 18.5. f additive donne $f(q)=cq$ sur $\mathbb{Q}$ avec $c=f(1)$, et $f(1)f(1)=1$ donne $c^2=1$, soit $c=\pm 1$. Comme f est de plus continue, le théorème 18.2.1 (cas 1) donne $f(x)=cx$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, donc $f=\mathrm{id}$ ou $f=-\mathrm{id}$. (Sans continuité, la seule additivité laisserait subsister, a priori, des solutions pathologiques ; c'est précisément pour les exclure que l'énoncé impose la continuité.)

Solution de l'exercice 18.6. Comme dans le corrigé de l'exercice 17.3, la substitution $y=\frac{x^2-f(x)}{2}$ donne $f(x)\big(x^2-f(x)\big)=0$ pour tout x : $f(x)\in\{0,x^2\}$ ponctuellement ; en particulier $f\geq 0$. Supposons $f\not\equiv 0$ et soit $b\neq 0$ avec $f(b)=b^2$. L'équation en $x=b$ s'écrit $f(b^2+y)-f(b^2-y)=4b^2y$. Comme $f(b^2-y)\geq 0$, on a $f(b^2+y)\geq 4b^2y>0$ pour tout $y>0$, c'est-à-dire $f(t)=t^2$ pour tout $t>b^2$.

Si $f(a)=0$ avec $a\neq 0$, l'équation en $x=a$ donne $f(y)=f(a^2-y)$; pour $y>\max(b^2,a^2)$, on a $f(y)=y^2\neq 0$, donc $f(a^2-y)=(a^2-y)^2$ et $y^2=(a^2-y)^2$, c'est-à-dire $a^2(a^2-2y)=0$, d'où $a=0$: contradiction. Ainsi $f(x)=x^2$ partout. Les deux solutions sont $f\equiv 0$ et $f(x)=x^2$, sans aucune hypothèse de régularité.

CHAPITRE 19

19 Équations fonctionnelles de niveau IMO

Ce chapitre présente des problèmes d'olympiades internationales résolus en détail, choisis pour illustrer les schémas de raisonnement les plus fréquents : bijectivité puis Cauchy, hypothèse asymptotique, alternative ponctuelle, et équations sur les entiers. Chaque solution est complète, vérification comprise.

19.1 Le grand classique : IMO 1992

Exemple 19.1.1 (IMO 1992, problème 2). *Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que*

$$f\big(x^2 + f(y)\big) = y + f(x)^2 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Notons $c = f(0)$.

Étape 1 : bijectivité. Avec $x = 0$: $f\big(f(y)\big) = y + c^2$. L'application $y \mapsto y + c^2$ est une bijection de $\mathbb{R}$. Si $f(y_1) = f(y_2)$, alors $y_1 + c^2 = f\big(f(y_1)\big) = f\big(f(y_2)\big) = y_2 + c^2$: f est injective. Tout réel z s'écrit $z = f\big(f(z - c^2)\big)$: f est surjective.

Étape 2 : une translation. Appliquons f à l'égalité $f\big(f(y)\big) = y + c^2$: $f\Big(f\big(f(y)\big)\Big) = f(y + c^2)$. Mais en appliquant la relation précédente à $f(y)$: $f\Big(f\big(f(y)\big)\Big) = f(y) + c^2$. Donc

$$f(y + c^2) = f(y) + c^2 \qquad \forall y. \qquad (19.1)$$

Étape 3 : additivité. Remplaçons y par $f(y)$ dans l'équation initiale : $f\Big(x^2 + f\big(f(y)\big)\Big) = f(y) + f(x)^2$, soit $f(x^2 + y + c^2) = f(y) + f(x)^2$. Par (19.1), le membre de gauche vaut $f(x^2 + y) + c^2$, d'où

$$f(x^2 + y) = f(y) + f(x)^2 - c^2. \qquad (19.2)$$

Avec $y = 0$: $f(x^2) = c + f(x)^2 - c^2$. En réinjectant dans (19.2) :

$$f(x^2 + y) = f(y) + f(x^2) - c.$$

Comme tout réel $t \geq 0$ est de la forme x^2, la fonction $g(x) = f(x) - c$, qui vérifie $g(0) = 0$, satisfait

$$g(t + y) = g(t) + g(y) \qquad \text{pour tous } t \geq 0,\ y \in \mathbb{R}. \qquad (19.2')$$

Étendons cette relation à $t < 0$. Avec $y = -t$ dans (19.2′), pour $t \geq 0$: $0 = g(t) + g(-t)$, donc g est impaire. Soit maintenant $t < 0$ et $y \in \mathbb{R}$; appliquons (19.2′) au réel positif $-t$ et au réel $y + t$: $g(y) = g(-t) + g(y + t) = -g(t) + g(y + t)$. Donc $g(t + y) = g(t) + g(y)$ pour tous t, y : g est additive.

Étape 4 : g est minorée sur $\mathbb{R}_{>0}$. De $f(x^2) = f(x)^2 + c - c^2$, on tire $g(x^2) + c = (g(x) + c)^2 + c - c^2$, c'est-à-dire

$$g(x^2) = g(x)^2 + 2c\, g(x) = (g(x) + c)^2 - c^2 \geq -c^2.$$

Comme tout réel positif est un carré, g est additive et minorée par $-c^2$ sur $\mathbb{R}_{>0}$: par le théorème 18.2.2, $g(x) = kx$ avec $k = g(1)$.

Étape 5 : conclusion. $g(x^2) = kx^2$ et $g(x)^2 + 2cg(x) = k^2x^2 + 2ckx$, donc $kx^2 = k^2x^2 + 2ckx$ pour tout x : deux polynômes qui coïncident en une infinité de points sont égaux, donc, par identification des coefficients, $k = k^2$ et $ck = 0$. Si $k = 0$, alors $f \equiv c$, ce qui contredit $f\big(f(y)\big) = y + c^2$. Donc $k = 1$ et $c = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$.

Vérification. $f\big(x^2+f(y)\big)=x^2+y=y+f(x)^2$.

À retenir

Le schéma « bijectivité → translation → additivité → borne → Cauchy → vérification » est le squelette de très nombreux problèmes d'IMO. Apprenez-le comme une gamme.

19.2 Utiliser une hypothèse asymptotique : IMO 1983

Exemple 19.2.1 (IMO 1983, problème 1). *Trouver toutes les fonctions* $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$ *telles que*

(i) $f\big(xf(y)\big)=yf(x)$ *pour tous* $x,y>0$;

(ii) $f(x)\to 0$ *quand* $x\to+\infty$.

Étape 1 : $f(1)=1$. Posons $a=f(1)$. Avec $y=1$: $f(xa)=f(x)$ pour tout $x>0$. En itérant, $f(xa^n)=f(x)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Si $a>1$, alors $xa^n\to+\infty$ et (ii) donne $f(x)=\lim f(xa^n)=0$, ce qui contredit $f(x)>0$. Si $a<1$, la même relation avec $a^{-1}>1$ (en remplaçant x par xa^{-n}) conduit à la même contradiction. Donc $a=1$.

Étape 2 : f *est une involution.* Avec $x=1$: $f\big(f(y)\big)=yf(1)=y$.

Étape 3 : f *est multiplicative.* Dans (i), prenons $x=f(z)$: $f\big(f(z)f(y)\big)=yf\big(f(z)\big)=yz$. En appliquant f et en utilisant $f\circ f=\mathrm{id}$: $f(z)f(y)=f(yz)$.

Étape 4 : conclusion. Soit $x>0$ et $t=xf(x)$. Par multiplicativité,

$$f(t)=f\big(xf(x)\big)=f(x)f\big(f(x)\big)=f(x)\cdot x=t,$$

donc t est un point fixe de f. Si $t>1$, alors $f(t^n)=f(t)^n=t^n\to+\infty$, ce qui contredit (ii). Si $t<1$, alors $\frac{1}{t}>1$ et $f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{f(t)}=\frac{1}{t}$ (car $f(t)f(1/t)=f(1)=1$), ce qui ramène au cas précédent. Donc $t=1$, c'est-à-dire

$$f(x)=\frac{1}{x}.$$

Vérification. $f\big(xf(y)\big)=f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y}{x}=yf(x)$, et $\frac{1}{x}\to 0$.

19.3 Exploiter une contrainte cachée : IMO 2008

Exemple 19.3.1 (IMO 2008, problème 4). *Trouver toutes les fonctions* $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$ *telles que*

$$\frac{f(w)^2+f(x)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

pour tous $w,x,y,z>0$ *vérifiant* $wx=yz$.

Étape 1. $w=x=y=z=t$: le membre de droite vaut 1, donc $2f(t)^2=2f(t^2)$, c'est-à-dire

$$f(t^2)=f(t)^2\qquad\forall t>0.\qquad(19.3)$$

En particulier $f(1)=f(1)^2$ et $f(1)>0$ donnent $f(1)=1$.

Étape 2. $w=t^2$, $x=1$, $y=z=t$ (on a bien $wx=t^2=yz$) :

$$\frac{f(t^2)^2+1}{2f(t^2)}=\frac{t^4+1}{2t^2}.$$

Avec (19.3), en posant $u = f(t)^2 = f(t^2)$ et $v = t^2$:

$$\frac{u^2+1}{2u} = \frac{v^2+1}{2v} \Leftrightarrow u + \frac{1}{u} = v + \frac{1}{v} \Leftrightarrow (u-v)\left(1 - \frac{1}{uv}\right) = 0.$$

Donc, pour chaque $t > 0$, $f(t)^2 = t^2$ ou $f(t)^2 = \frac{1}{t^2}$, c'est-à-dire

$$f(t) = t \qquad \text{ou} \qquad f(t) = \frac{1}{t}.$$

Étape 3 : pas de mélange. Supposons $f(a) = a$ avec $a \neq 1$ et $f(b) = \frac{1}{b}$ avec $b \neq 1$. Prenons $w = a$, $x = b$, $y = z = \sqrt{ab}$:

$$\frac{a^2 + \frac{1}{b^2}}{2f(ab)} = \frac{a^2+b^2}{2ab}.$$

Cas $f(ab) = ab$: on obtient $a^2 + \frac{1}{b^2} = a^2 + b^2$, donc $b^4 = 1$, $b = 1$: exclu.

Cas $f(ab) = \frac{1}{ab}$: on obtient $ab\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{a^2+b^2}{ab}$, c'est-à-dire $a^2b^2\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right) = a^2 + b^2$, soit $a^4b^2 + a^2 = a^2 + b^2$, donc $a^4 = 1$ et $a = 1$: exclu.

Donc $f = \mathrm{id}$ partout, ou $f(t) = \frac{1}{t}$ partout.

Vérification. Pour $f = \mathrm{id}$, c'est l'énoncé même. Pour $f(t) = \frac{1}{t}$, le membre de gauche devient

$$\frac{\frac{1}{w^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} = \frac{\frac{w^2+x^2}{w^2x^2}}{\frac{y^2+z^2}{y^2z^2}} = \frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

car $wx = yz$.

Méthode 19.3.2 — L'alternative ponctuelle

Il arrive souvent qu'on obtienne, pour chaque x séparément, une alternative du type « $f(x) = x$ ou $f(x) = \varphi(x)$ ». Ce n'est pas la conclusion : il reste à montrer qu'on ne peut pas mélanger les deux régimes. La technique standard consiste à supposer $f(a) = a$ et $f(b) = \varphi(b)$ avec a, b non triviaux, puis à substituer le couple (a, b) dans l'équation pour obtenir une contradiction.

19.4 Fonctions sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$: descente et extrémalité

Sur $\mathbb{N}$, deux outils remplacent la régularité : la récurrence et le principe du plus petit élément.

Exemple 19.4.1 (Une équation sur les entiers). *Trouver toutes les $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissantes telles que $f(2) = 2$ et $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tous m, n premiers entre eux.*

Solution.

Valeurs initiales. Comme 1 et 2 sont premiers entre eux, $f(2) = f(1)f(2)$, donc $f(1) = 1$. Une fonction strictement croissante à valeurs entières vérifie $f(n+1) \geq f(n) + 1$, donc $f(n+k) \geq f(n) + k$ pour tous n, k. En particulier $f(3) \geq f(2) + 1 = 3$. Pour majorer $f(3)$, on utilise la multiplicativité sur les couples premiers entre eux $(3,5)$, $(2,9)$ et $(2,5)$, et la croissance stricte :

$$f(3)f(5) = f(15) < f(18) = f(2)f(9) = 2f(9) < 2f(10) = 2f(2)f(5) = 4f(5),$$

donc $f(3) < 4$, et finalement $f(3) = 3$.

Lemme (remplissage). Si $f(a) = a$ et $f(b) = b$ avec $a < b$, alors $f(k) = k$ pour $a \le k \le b$. En effet, pour un tel k, $f(k) \ge f(a) + (k - a) = k$ et $b = f(b) \ge f(k) + (b - k)$, donc $f(k) \le k$.

Récurrence. Notons $P(m)$: « $f(k) = k$ pour tout $k \le m$ ». On a établi $P(3)$. Supposons $P(m)$ pour un $m \ge 3$, et soit n le plus grand entier impair inférieur ou égal à m ; on a $n \ge 3$ et $n \ge m - 1$. Comme $\gcd(2, n) = 1$, $f(2n) = f(2)f(n) = 2n$. Par le lemme appliqué à n et $2n$, $f(k) = k$ pour tout $k \le 2n$. Or $2n \ge 2m - 2 \ge m + 1$ (car $m \ge 3$) : on obtient $P(m + 1)$.

Ainsi $f = \mathrm{id}$, qui convient réciproquement.

Méthode 19.4.2 — Boîte à outils sur $\mathbb{N}$

- **Croissance stricte** : $f(n + k) \ge f(n) + k$. Combinée à une majoration, elle force des égalités.
- **Descente** : si $f(n) < n$ pour un n, construire une suite strictement décroissante d'entiers positifs : impossible.
- **Plus petit contre-exemple** : supposer n_0 minimal tel que $f(n_0) \ne n_0$ et exhiber une contradiction.
- **Injectivité** ⇒ sur un ensemble fini, bijectivité.
- **Périodicité** : si $f(n + T) = f(n)$, tout se joue sur T valeurs.

Exemple 19.4.3 (Injectivité et plus petit contre-exemple). *Trouver toutes les $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $f\big(f(n)\big) + f(n) = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Solution.

Injectivité. Si $f(a) = f(b)$, alors $f\big(f(a)\big) = f\big(f(b)\big)$, et l'équation donne $2a = 2b$, soit $a = b$.

Récurrence forte. Montrons que $f(n) = n$ pour tout n. Pour $n = 0$: $f\big(f(0)\big) + f(0) = 0$ avec deux termes positifs, donc $f(0) = 0$. Soit $n \ge 1$ tel que $f(k) = k$ pour tout $k < n$. Les valeurs $0, 1, \dots, n - 1$ sont déjà prises par $0, 1, \dots, n - 1$; par injectivité, $f(n) \notin \{0, \dots, n - 1\}$, donc $f(n) \ge n$. Supposons $m = f(n) > n$. L'équation donne $f(m) = 2n - m < n$; posons $j = f(m)$. Alors $j < n$, donc $f(j) = j = f(m)$, et l'injectivité donne $m = j < n$: contradiction avec $m > n$. Donc $f(n) = n$.

Réciproquement, $f = \mathrm{id}$ convient. C'est l'illustration type du schéma « injectivité + plus petit contre-exemple » de la méthode 19.4.2.

À retenir — les réflexes du chapitre 19

- Bijectivité, translation, additivité, borne, Cauchy, vérification : le squelette de l'exemple 19.1.1.
- Une hypothèse asymptotique sert à exclure des points fixes différents de 1 (itération t^n).
- Alternative ponctuelle : ne jamais conclure avant d'avoir exclu le mélange des régimes.
- Sur $\mathbb{N}$: croissance stricte, remplissage, récurrence forte, énoncé renforcé.

19.5 Exercices

Exercice 19.1 ★★★ (IMO 1977). Soit $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ telle que $f(n+1)>f\big(f(n)\big)$ pour tout n. Montrer que $f(n)=n$.

Exercice 19.2 ★★★. Trouver toutes les $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $f(f(x)-y)=f(x)+f\big(f(y)-f(-x)\big)+x$.

Exercice 19.3 ★★★ (IMO 2017). Trouver toutes les $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $f\big(f(x)f(y)\big)+f(x+y)=f(xy)$.

Exercice 19.4 ★★★ (IMO 2010). Trouver toutes les $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $f(\lfloor x\rfloor y)=f(x)\lfloor f(y)\rfloor$.

Exercice 19.5 ★★★ (IMO 2015). Trouver toutes les $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $f\big(x+f(x+y)\big)+f(xy)=x+f(x+y)+yf(x)$.

19.6 Solutions

Solution de l'exercice 19.1. Montrons par récurrence sur k la propriété P_k : « pour tout $n\geq k$, $f(n)\geq k$ ».

P_1 est vraie ($f\geq 1$). Supposons P_k ; soit $n\geq k+1$. Alors $n-1\geq k$, donc $f(n-1)\geq k$, donc $f\big(f(n-1)\big)\geq k$ par P_k (car $f(n-1)\geq k$), et $f(n)>f\big(f(n-1)\big)\geq k$, c'est-à-dire $f(n)\geq k+1$. Donc P_{k+1}.

En prenant $k=n$: $f(n)\geq n$. Alors $f(n+1)>f\big(f(n)\big)\geq f(n)$ montre que f est strictement croissante. Si $f(n)>n$ pour un n, alors $f(n)\geq n+1$ et la croissance stricte donne $f\big(f(n)\big)\geq f(n+1)$, ce qui contredit $f(n+1)>f\big(f(n)\big)$. Donc $f(n)=n$, qui convient.

Solution de l'exercice 19.2. Posons $y=f(x)$: $f(0)=f(x)+f\left(f\big(f(x)\big)-f(-x)\right)+x$. Le membre de gauche est constant, donc l'expression $f(x)+x$ est contrôlée par une composition de f ; on montre (en posant $x=0$ puis en exploitant la surjectivité qui découle du terme $-y$ isolé à gauche) que la seule solution est

$$f(x)=-x.$$

Vérification. $f(f(x)-y)=f(-x-y)=x+y$ et $f(x)+f\big(f(y)-f(-x)\big)+x=-x+f(-y-x)+x=-x+(x+y)+x=x+y$. ✓

Solution de l'exercice 19.3. *Réponses* : $f\equiv 0$, $f(x)=x-1$ et $f(x)=1-x$.

Esquisse. $f\equiv 0$ convient trivialement. Sinon, $f(0)\neq 0$ (si $f(0)=0$, $y=0$ donne $f(x)=0$ pour tout x), et $x=y=0$ donne $f(f(0)^2)=0$: il existe a avec $f(a)=0$. On substitue $(x,y)=(a,a)$, puis des couples (x,y) avec $x+y=xy$ (c'est-à-dire $y=\frac{x}{x-1}$) pour montrer que l'ensemble des zéros de f est réduit à $\{1\}$ et que $f(0)=\pm 1$. On conclut que $g=f+1$ (si $f(0)=-1$) ou $g=1-f$ (si $f(0)=1$) est à la fois additive et multiplicative, ce qui ramène à la méthode du chapitre 18 (additive et multiplicative $\Rightarrow g\equiv 0$ ou $g=\mathrm{id}$). La vérification confirme les trois solutions annoncées.

Solution de l'exercice 19.4. *Réponses* : $f\equiv 0$ et $f\equiv c$ avec $1\leq c<2$.

Démonstration. $y=0$: $f(0)=f(x)\lfloor f(0)\rfloor$ pour tout x. Si $\lfloor f(0)\rfloor\neq 0$, alors f est constante, égale à c, et l'équation devient $c=c\lfloor c\rfloor$, donc $c=0$ ou $\lfloor c\rfloor=1$, c'est-à-dire $c\in[1,2)$.

Si $\lfloor f(0)\rfloor=0$, alors $f(0)=0$. Pour $x\in[0,1)$, on a $\lfloor x\rfloor=0$, donc $0=f(x)\lfloor f(y)\rfloor$ pour tous $x\in[0,1)$ et tout y. Si $\lfloor f(y)\rfloor=0$ pour tout y, alors $x=1$ donne $f(y)=f(1)\lfloor f(y)\rfloor=0$: $f\equiv 0$.

Sinon, il existe y_0 avec $\lfloor f(y_0) \rfloor \neq 0$, donc $f \equiv 0$ sur $[0,1)$, en particulier $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; avec $y = \frac{1}{2}$: $f\left(\frac{\lfloor x \rfloor}{2}\right) = f(x) \cdot 0 = 0$ pour tout x, donc $f\left(\frac{n}{2}\right) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$: ainsi $f(1) = 0$, et $x = 1$ donne $f(y) = f(1)\lfloor f(y) \rfloor = 0$ pour tout y, ce qui contredit le choix de y_0. Vérification immédiate des solutions annoncées.

Solution de l'exercice 19.5. *Réponses* : $f(x) = x$ et $f(x) = 2 - x$.

Esquisse. Poser $y = 1$ pour obtenir $f\big(x + f(x+1)\big) + f(x) = x + f(x+1) + f(x)$, donc $f(t) = t$ pour tout t de la forme $t = x + f(x+1)$. On montre que cet ensemble de valeurs est soit $\mathbb{R}$ tout entier (auquel cas $f = \mathrm{id}$), soit réduit à un seul point, ce qui conduit à $f(x) = 2 - x$ après substitution de $y = 0$ et exploitation de l'involution $x \mapsto 2 - x$.

Vérification pour $f(x) = 2 - x$: $f\big(x + f(x+y)\big) = f(x + 2 - x - y) = f(2 - y) = y$ et $f(xy) = 2 - xy$, tandis que $x + f(x+y) + yf(x) = x + 2 - x - y + y(2 - x) = 2 + y - xy$. Les deux membres valent bien $y + 2 - xy$. ✓

PARTIE V — Vers l'IMO

CHAPITRE 20

20 Méthodologie et stratégie de compétition

20.1 Ce que l'on attend d'une copie

À l'IMO, chaque problème vaut 7 points. Le barème est binaire dans l'esprit : une solution complète et rigoureuse vaut 7 ; une solution presque complète vaut 5 ou 6 ; une idée intéressante mais non exploitée vaut 1 ou 2. Il n'y a pas de points pour la quantité de calculs.

À retenir

Trois vérités que tout candidat doit intérioriser :

1. Une solution « à 90 % » vaut souvent 2 points, pas 6.
2. Un problème complètement résolu vaut plus que trois problèmes entamés.
3. Le correcteur ne devine pas : ce qui n'est pas écrit n'existe pas.

20.2 Comment attaquer un problème d'algèbre

Méthode 20.2.1 — L'arbre de décision

1. Inégalité ?

- Est-elle homogène ? Si oui, normaliser ($a+b+c=1$ ou 3, ou $abc=1$). Si non, homogénéiser grâce à la contrainte.
- Où est le cas d'égalité ? En $a=b=c$? Sur un bord ($c=0$) ? La réponse dicte l'outil : $a=b=c$ ⇒ IA-G, Cauchy–Schwarz, Jensen ; bord ⇒ SOS, Schur, mixing variables.
- Ordre des essais : IA-G → Cauchy–Schwarz/Engel → tangente → SOS → Schur/Muirhead → pqr.

2. Polynôme ?

- Comparer les degrés et les coefficients dominants : cela règle un tiers des problèmes.
- Regarder les racines : combien, où, de quelle multiplicité ?
- Coefficients entiers ? Alors $a-b \mid P(a)-P(b)$, racines rationnelles, Gauss, Eisenstein.
- Une infinité de racines ⇒ polynôme nul : l'argument le plus rentable de tous.

3. Équation fonctionnelle ?

- Deviner les solutions, puis substituer 0, 1, x, $-x$, $f(x)$, $1/x$.
- Chercher injectivité/surjectivité (variable isolée !), $f(0)$, points fixes.
- Ramener à Cauchy. Ne pas oublier la vérification.

4. Suite ?

- Calculer a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 : la conjecture vient presque toujours de là.
- Chercher un invariant ou un monovariant (quantité qui croît ou décroît strictement).
- Télescoper, encadrer, comparer à une suite géométrique.

Méthode 20.2.2 — Les cinq questions à se poser quand on est bloqué

1. Ai-je utilisé toutes les hypothèses ? (Une hypothèse inutilisée est un signal.)
2. Puis-je traiter un cas particulier : $n = 1,2,3$; deux variables égales ; une variable nulle ?
3. Puis-je normaliser ou changer de variables pour simplifier ?
4. Puis-je raisonner par l'absurde, ou par extrémalité (prendre le plus grand, le plus petit) ?
5. Le problème est-il un déguisement d'un résultat connu ?

20.3 Rédiger

Méthode 20.3.1 — Le squelette d'une rédaction qui vaut 7

1. **Annoncer la réponse** : « Nous montrons que les solutions sont exactement… » ou « Nous montrons que $M = \frac{9\sqrt{2}}{32}$ ».
2. **Poser les notations** : « Posons $s = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. »
3. **Structurer en étapes numérotées**, chacune avec son énoncé (« Étape 1 : f est injective. »).
4. **Justifier chaque inégalité par son nom** : « par Cauchy–Schwarz », « par IA-G appliquée à… ».
5. **Traiter les cas** : ne jamais dire « de même » si ce n'est pas littéralement le même calcul (dire « par symétrie » n'est licite que si l'énoncé est symétrique).
6. **Conclure et vérifier** : cas d'égalité, réciproque, vérification des candidates.

Attention — Les formules qui font perdre des points.

- « Il est évident que », « on voit facilement » : à réserver aux véritables évidences.
- « Par symétrie, supposons $a \geq b \geq c$ » dans une inégalité seulement cyclique : c'est faux.
- « Le maximum est atteint en $a = b = c$ » sans preuve : la partie difficile est justement là.
- « f additive donc $f(x) = cx$ » sur $\mathbb{R}$ sans hypothèse de régularité.
- Utiliser la dérivée ou la convexité sans vérifier le domaine.

20.4 Gérer les 4 h 30

Temps	Action
0–15 min	Lire les trois problèmes. Repérer le plus abordable (souvent le 1).
15–90 min	Résoudre le problème 1. Rédiger avant de passer au suivant.
90–180 min	Attaquer le problème 2. Noter toute idée partielle sur la copie.
180–255 min	Problème 3, ou consolidation.
255–270 min	Relecture : notations, cas oubliés, vérifications finales.

Temps	Action

À retenir

Écrire les résultats partiels rapporte : « Je montre que f est injective et que $f(0) = 0$ » peut valoir 1 ou 2 points même sans conclusion.

CHAPITRE 21

21 Dix problèmes d'IMO entièrement corrigés

Les dix problèmes qui suivent sont des problèmes officiels de l'Olympiade internationale de mathématiques. Ils couvrent les quatre thèmes du cours. Cherchez-les au moins une heure chacun avant de lire la solution.

21.1 Problème 1 — IMO 1995, problème 2

Problème 1 (IMO 1995, problème 2). Soient $a, b, c > 0$ avec $abc = 1$. Montrer que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Solution. Posons $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$; alors $xyz = 1$ et

$$\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{x^3}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{x^3 yz}{y+z} = \frac{x^3 \cdot \frac{1}{x}}{y+z} = \frac{x^2}{y+z},$$

en utilisant $yz = \frac{1}{x}$. L'inégalité à démontrer devient

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}, \qquad xyz = 1.$$

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz sous forme d'Engel (« des mauvais élèves ») :

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2}.$$

Enfin, par IA-G, $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$. Donc l'expression est $\geq \frac{3}{2}$.

Égalité : dans Engel, il faut $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y}$, et dans IA-G $x = y = z$; avec $xyz = 1$ cela donne $x = y = z = 1$, c'est-à-dire $a = b = c = 1$.

> **Remarque.**
> La substitution $a \to \frac{1}{x}$ est le réflexe à avoir dès qu'apparaît $abc = 1$ avec des puissances négatives : elle transforme une expression illisible en la forme d'Engel la plus standard.

21.2 Problème 2 — IMO 2001, problème 2

Problème 2 (IMO 2001, problème 2). Soient $a, b, c > 0$. Montrer que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Solution. Notons S le membre de gauche. Par l'inégalité de Hölder, avec trois facteurs :

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}}\right)^2 \left(\sum a(a^2 + 8bc)\right) \geq (\sum a)^3.$$

(En effet, Hölder s'écrit $(\sum u_i)^2(\sum v_i) \geq \left(\sum u_i^{2/3} v_i^{1/3}\right)^3$ avec $u_i = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}$ et $v_i = a(a^2+8bc)$, car alors $u_i^{2/3} v_i^{1/3} = a$.)

Il suffit donc de prouver

$$(a+b+c)^3 \geq \sum a(a^2+8bc) = a^3+b^3+c^3+24abc.$$

Or

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3\sum_{\text{sym}} a^2\,b + 6abc,$$

donc l'inégalité voulue équivaut à $3\sum_{\text{sym}} a^2\,b \geq 18abc$, c'est-à-dire

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \geq 6abc,$$

ce qui est IA-G appliquée aux six termes (leur produit est $a^6b^6c^6$). D'où $S^2 \geq 1$ et $S \geq 1$.

Égalité : $a = b = c$.

À retenir

Une racine carrée au dénominateur + une somme ≥ constante : penser Hölder. Le choix des exposants se fait en écrivant ce que l'on veut obtenir (a ici) et en résolvant.

21.3 Problème 3 — IMO 2000, problème 2

Problème 3 (IMO 2000, problème 2). Soient $a, b, c > 0$ avec $abc = 1$. Montrer que

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Solution. Comme $abc = 1$, on peut écrire $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ avec $x, y, z > 0$ (prendre $x = a$, $y = 1$, $z = \frac{1}{b}$, puis vérifier $c = \frac{z}{x} = \frac{1}{ab}$). Alors $\frac{1}{b} = \frac{z}{y}$, donc

$$a - 1 + \frac{1}{b} = \frac{x-y+z}{y}, \qquad b - 1 + \frac{1}{c} = \frac{y-z+x}{z}, \qquad c - 1 + \frac{1}{a} = \frac{z-x+y}{x}.$$

L'inégalité devient

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \leq xyz.$$

Cas 1 : au moins deux facteurs sont négatifs. Impossible : si $x-y+z < 0$ et $y-z+x < 0$, leur somme $2x$ serait < 0 (et de même pour les autres paires).

Cas 2 : exactement un facteur est négatif. Le produit est alors $\leq 0 < xyz$: c'est terminé.

Cas 3 : les trois facteurs sont ≥ 0. Par IA-G,

$$(x-y+z)(y-z+x) \leq \left(\frac{(x-y+z)+(y-z+x)}{2}\right)^2 = x^2,$$

et de même $(y-z+x)(z-x+y) \leq y^2$, $(z-x+y)(x-y+z) \leq z^2$. En multipliant ces trois inégalités (tous les membres sont ≥ 0) :

$$[(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)]^2 \leq x^2y^2z^2,$$

d'où le résultat en prenant la racine carrée.

Égalité : $x = y = z$, c'est-à-dire $a = b = c = 1$.

21.4 Problème 4 — IMO 1984, problème 1

Problème 4 (IMO 1984, problème 1). Soient $x, y, z \geq 0$ avec $x + y + z = 1$. Montrer que

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

Solution. Posons $q = xy + yz + zx$ et $r = xyz$; on a $p = x + y + z = 1$, $0 \leq q \leq \frac{1}{3}$ et $r \geq 0$.

Minoration. Par IA-G (ou par (10.3)), $(x + y + z)(xy + yz + zx) \geq 9xyz$, donc $q \geq 9r \geq 2r$, c'est-à-dire $q - 2r \geq 0$. Égalité si $r = 0$ et $q = 0$, par exemple $(x, y, z) = (1,0,0)$.

Majoration. L'inégalité de Schur pour $t = 1$ s'écrit $p^3 + 9r \geq 4pq$, ici $1 + 9r \geq 4q$, donc $r \geq \frac{4q-1}{9}$. Par conséquent

$$q - 2r \leq q - \frac{2(4q-1)}{9} = \frac{9q - 8q + 2}{9} = \frac{q+2}{9} \leq \frac{\frac{1}{3} + 2}{9} = \frac{7}{27},$$

puisque $q \leq \frac{p^2}{3} = \frac{1}{3}$.

Égalité : il faut $q = \frac{1}{3}$, donc $x = y = z = \frac{1}{3}$, et l'on vérifie $q - 2r = \frac{1}{3} - \frac{2}{27} = \frac{7}{27}$.

> **Remarque.**
> Ce problème est l'exemple canonique de la puissance du langage p, q, r : la contrainte devient $p = 1$, l'expression devient $q - 2r$, et Schur fournit exactement le lien manquant entre q et r.

21.5 Problème 5 — IMO 2006, problème 3

Problème 5 (IMO 2006, problème 3). Déterminer le plus petit réel M tel que

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

pour tous réels a, b, c.

Solution. *Étape 1 : factoriser.* On vérifie (développement direct) l'identité

$$ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) = -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c).$$

La quantité à majorer est donc $|(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)|$.

Étape 2 : réduction. L'expression est invariante par permutation circulaire et change de signe par échange de deux variables ; en valeur absolue, on peut donc supposer $a \geq b \geq c$. Posons $u = a - b \geq 0$, $v = b - c \geq 0$, de sorte que $a - c = u + v$, et $s = a + b + c$. La quantité vaut $uv(u + v)|s|$, et l'on peut supposer $s \geq 0$ (sinon changer (a, b, c) en $(-c, -b, -a)$, ce qui préserve tout).

Par IA-G, $uv \leq \left(\frac{u+v}{2}\right)^2$, donc

$$uv(u + v)s \leq \frac{(u + v)^3 s}{4} = \frac{(a - c)^3(a + b + c)}{4}. \qquad (21.1)$$

L'égalité exige $u = v$, c'est-à-dire $b = \frac{a+c}{2}$.

Étape 3 : optimisation. Notons $p = a - c = u + v \geq 0$. Comme $u^2 + v^2 \geq \frac{(u+v)^2}{2} = \frac{p^2}{2}$, avec égalité si et seulement si $u = v$, on a

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{s^2 + u^2 + v^2 + p^2}{3} \geq \frac{s^2}{3} + \frac{p^2}{2}.$$

Posons $s = 3t$ avec $t \geq 0$. D'après (21.1), le rapport à majorer vérifie

$$\frac{uv(u+v)s}{(a^2+b^2+c^2)^2} \leq F(t,p) = \frac{1}{4} \cdot \frac{p^3 \cdot 3t}{\left(3t^2 + \frac{p^2}{2}\right)^2},$$

avec égalité lorsque $b = \frac{a+c}{2}$ (on a alors $t = b$ et, directement, $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{(a+c)^2+(a-c)^2}{2} + b^2 = \frac{4b^2+p^2}{2} + b^2 = 3b^2 + \frac{p^2}{2}$). Il s'agit donc de maximiser $F(t,p)$.

Cette expression est homogène de degré 0 : on peut normaliser $p = 1$ et maximiser $\varphi(t) = \frac{3t}{4\left(3t^2+\frac{1}{2}\right)^2}$ pour $t > 0$. En dérivant, $\varphi'(t) = 0$ équivaut à

$$\left(3t^2 + \frac{1}{2}\right) - t \cdot 2 \cdot 6t = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - 9t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Alors $3t^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ et

$$\varphi\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right) = \frac{3 \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}}}{4 \cdot \frac{4}{9}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 9}{16} = \frac{9}{16\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{32}.$$

Étape 4 : conclusion. On a donc toujours $|ab(a^2 - b^2) + \cdots| \leq \frac{9\sqrt{2}}{32}(a^2 + b^2 + c^2)^2$, et cette valeur est atteinte pour

$$a = \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{2}, \qquad b = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \qquad c = \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$$

(qui vérifient bien $a - c = 1$ et $b = \frac{a+c}{2}$). Donc

$$M = \frac{9\sqrt{2}}{32}.$$

À retenir

Trois idées à retenir : factoriser avant de majorer ; utiliser IA-G pour regrouper $uv \leq \left(\frac{u+v}{2}\right)^2$; exploiter l'homogénéité pour réduire à une variable et conclure par une dérivée.

21.6 Problème 6 — IMO 2004, problème 4

Problème 6 (IMO 2004, problème 4). Soit $n \geq 3$ un entier et $t_1, \ldots, t_n > 0$ tels que

$$n^2 + 1 > (t_1 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right).$$

Montrer que t_i, t_j, t_k sont les côtés d'un triangle pour tous indices i, j, k distincts.

Solution. Par symétrie, il suffit de montrer $t_1 < t_2 + t_3$. Développons :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i}\right) = n + \sum_{1\le i<j\le n} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i}\right).$$

Isolons les couples $(1,2)$ et $(1,3)$:

$$= n + t_1\left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) + \frac{t_2 + t_3}{t_1} + \sum_{\substack{i<j \\ (i,j)\neq(1,2),(1,3)}} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i}\right).$$

Le nombre de couples restants est $\binom{n}{2} - 2 = \frac{n^2-n}{2} - 2$, et chacun contribue au moins 2 (car $u + \frac{1}{u} \ge 2$). De plus, par IA-G, $\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \ge \frac{2}{\sqrt{t_2 t_3}}$ et $t_2 + t_3 \ge 2\sqrt{t_2 t_3}$. En posant $\alpha = \frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} > 0$:

$$n^2 + 1 > n + 2\alpha + \frac{2}{\alpha} + 2\left(\frac{n^2 - n}{2} - 2\right) = 2\alpha + \frac{2}{\alpha} + n^2 - 4.$$

Donc $2\alpha + \frac{2}{\alpha} < 5$, c'est-à-dire $2\alpha^2 - 5\alpha + 2 < 0$, c'est-à-dire $(2\alpha - 1)(\alpha - 2) < 0$, ce qui donne

$$\frac{1}{2} < \alpha < 2,$$

en particulier $t_1 < 2\sqrt{t_2 t_3}$. Enfin $2\sqrt{t_2 t_3} \le t_2 + t_3$ par IA-G, donc $t_1 < t_2 + t_3$.

21.7 Problème 7 — IMO 2014, problème 1

Problème 7 (IMO 2014, problème 1). Soit $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ une suite infinie d'entiers strictement positifs. Montrer qu'il existe un unique entier $n \ge 1$ tel que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \le a_{n+1}.$$

Solution. Notons $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ et posons $b_n = S_n - n a_n$ $(n \ge 1)$.

Traduction. La condition demandée s'écrit $n a_n < S_n$ et $S_n \le n a_{n+1}$, c'est-à-dire $b_n > 0$ et $S_n - n a_{n+1} \le 0$. Or

$$b_{n+1} = S_{n+1} - (n+1)a_{n+1} = S_n + a_{n+1} - (n+1)a_{n+1} = S_n - n a_{n+1}.$$

La condition est donc exactement $b_n > 0$ et $b_{n+1} \le 0$.

Monotonie. Pour $n \ge 1$,

$$b_{n+1} - b_n = (S_n - n a_{n+1}) - (S_n - n a_n) = n(a_n - a_{n+1}) < 0,$$

car la suite est strictement croissante. Donc $(b_n)_{n\ge1}$ est strictement décroissante.

Position initiale et limite. $b_1 = S_1 - a_1 = a_0 > 0$. Par ailleurs $a_{n+1} \ge a_n + 1$, donc $b_{n+1} - b_n \le -n$ et $b_{n+1} \le b_1 - (1 + 2 + \cdots + n) = a_0 - \frac{n(n+1)}{2} \to -\infty$.

Conclusion. La suite d'entiers $(b_n)_{n\ge1}$ est strictement décroissante, vaut $a_0 > 0$ en $n = 1$ et tend vers $-\infty$: il existe donc un unique indice $n \ge 1$ tel que $b_n > 0$ et $b_{n+1} \le 0$. C'est exactement l'unique n cherché.

À retenir

Le monovariant $b_n = S_n - na_n$ transforme un énoncé d'existence et d'unicité en une évidence : une suite strictement décroissante traverse 0 exactement une fois. Chercher systématiquement la quantité dont la monotonie encode l'énoncé.

21.8 Problème 8 — IMO 1993, problème 1

Problème 8 (IMO 1993, problème 1). Soit $n \geq 2$. Montrer que $P(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Solution. Supposons $P = GH$ avec $G, H \in \mathbb{Z}[X]$, $\deg G = k \geq 1$, $\deg H = m \geq 1$, $k + m = n$ (le lemme de Gauss permet de se limiter à des facteurs à coefficients entiers). P étant unitaire, on peut supposer G et H unitaires.

Étape 1 : les termes constants. $G(0)H(0) = P(0) = 3$. Quitte à échanger, on suppose $|G(0)| = 1$ et $|H(0)| = 3$.

Étape 2 : une identité sur les racines. Si $r \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors $r^{n-1}(r+5) = -3$, donc $|r|^{n-1}|r+5| = 3$.

Soient $r_1, \dots, r_k$ les racines de G (avec multiplicité). Comme G est unitaire, $\prod |r_i| = |G(0)| = 1$ et $\prod |r_i + 5| = |G(-5)|$. En multipliant les k identités ci-dessus :

$$\left(\prod_i |r_i|\right)^{n-1} \prod_i |r_i + 5| = 3^k \Longrightarrow |G(-5)| = 3^k.$$

De même, avec les m racines s_j de H et $\prod |s_j| = |H(0)| = 3$:

$$3^{n-1}|H(-5)| = 3^m \Longrightarrow |H(-5)| = 3^{m-n+1}.$$

Étape 3 : la contradiction. Comme $P(-5) = (-5)^{n-1}(-5+5) + 3 = 3$, on a $H(-5) \neq 0$, donc $|H(-5)|$ est un entier ≥ 1 : l'exposant $m - n + 1$ est ≥ 0, c'est-à-dire $m \geq n - 1$, donc $k \leq 1$, donc $k = 1$ et $m = n - 1$.

Ainsi G est unitaire de degré 1 avec $|G(0)| = 1$: $G(x) = x \pm 1$, et P possède la racine entière ∓ 1. Or

$$P(1) = 1 + 5 + 3 = 9 \neq 0,$$

$$P(-1) = (-1)^n + 5(-1)^{n-1} + 3 = \begin{cases} 1 - 5 + 3 = -1 \neq 0 & (n \text{ pair}), \\ -1 + 5 + 3 = 7 \neq 0 & (n \text{ impair}). \end{cases}$$

Contradiction. Donc P est irréductible.

À retenir

Technique maîtresse : traduire l'énoncé en une identité multiplicative sur les modules des racines, puis évaluer le polynôme en un point bien choisi ($x = -5$ ici, qui annule $x + 5$). Eisenstein ne s'applique pas directement : il faut cette variante.

21.9 Problème 9 — IMO 1975, problème 1

Problème 9 (IMO 1975, problème 1). Soient $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ et $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ des réels. Montrer que pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - y_{\sigma(i)}\right)^2.$$

Solution. Développons les deux membres :

$$\sum (x_i - y_i)^2 = \sum x_i^2 + \sum y_i^2 - 2\sum x_i y_i,$$

$$\sum \left(x_i - y_{\sigma(i)}\right)^2 = \sum x_i^2 + \sum y_{\sigma(i)}^2 - 2\sum x_i y_{\sigma(i)} = \sum x_i^2 + \sum y_i^2 - 2\sum x_i y_{\sigma(i)},$$

car σ est une permutation, donc $\sum y_{\sigma(i)}^2 = \sum y_i^2$. L'inégalité demandée est donc équivalente à

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i,$$

c'est-à-dire exactement l'inégalité de réarrangement : la somme $\sum x_i y_{\sigma(i)}$ est maximale lorsque les deux suites sont rangées dans le même ordre, ce qui est le cas ici.

> **Remarque.**
> Un problème d'IMO en trois lignes, à condition de connaître le bon théorème. C'est l'illustration parfaite du principe énoncé en avant-propos : connaître les bonnes techniques.

21.10 Problème 10 — IMO 2012, problème 2

Problème 10 (IMO 2012, problème 2). Soit $n \geq 3$ et $a_2, a_3, \ldots, a_n > 0$ avec $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Montrer que

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Solution. *Idée :* IA-G pondérée, terme par terme. Pour $k \geq 2$, écrivons $1 + a_k$ comme somme de k termes :

$$1 + a_k = \underbrace{\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-1}}_{k-1 \text{ termes}} + a_k.$$

Par IA-G appliquée à ces k termes,

$$\frac{1 + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{\left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} a_k} \Longrightarrow (1 + a_k)^k \geq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}\, a_k.$$

En multipliant ces inégalités pour $k = 2, 3, \ldots, n$ et en utilisant $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$:

$$\prod_{k=2}^{n} (1 + a_k)^k \geq \prod_{k=2}^{n} \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} = \frac{n^n}{1^1} = n^n,$$

le produit étant télescopique.

Inégalité stricte. L'égalité dans IA-G pour l'indice k exige $a_k = \frac{1}{k-1}$; si elle avait lieu pour tout k, on aurait

$$a_2 a_3 \cdots a_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} = \frac{1}{(n-1)!} \neq 1$$

dès que $n \geq 3$. Toutes les égalités ne peuvent donc pas être simultanément réalisées, et l'inégalité finale est stricte.

À retenir

Deux mécanismes combinés : IA-G avec des poids astucieusement choisis (découper 1 en $k-1$ morceaux égaux) et un produit télescopique. Le raffinement « l'égalité est impossible » vaut souvent le dernier point.

CHAPITRE 22

22 Quatre sujets d'entraînement

Chaque sujet est conçu pour 3 heures. Travaillez dans les conditions du concours : sans documents, sans calculatrice, en rédigeant complètement.

22.1 Sujet A — niveau junior

Exercice 22.1 ★. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 8 = 0$.

Exercice 22.2 ★★. Soient $a, b, c > 0$. Montrer que $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Exercice 22.3 ★★. Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que $P(0) = 0$ et $P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$.

22.2 Sujet B — niveau intermédiaire

Exercice 22.4 ★★. Soient a, b, c des réels tels que $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 5$ et $a^3 + b^3 + c^3 = 7$. Calculer $a^4 + b^4 + c^4$.

Exercice 22.5 ★★. Soient $x, y, z > 0$ avec $xyz = 1$. Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \geq x + y + z$.

Exercice 22.6 ★★★. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ pour tous x, y.

22.3 Sujet C — niveau senior

Exercice 22.7 ★★★. Soient $a, b, c > 0$ avec $a + b + c = 3$. Montrer que $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$.

Exercice 22.8 ★★★. Soit (a_n) définie par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$. Montrer que $a_{100} > 14$.

Exercice 22.9 ★★★. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f\big(x - f(y)\big) = f\big(f(y)\big) - 2xf(y) + f(x)$ pour tous x, y.

22.4 Sujet D — niveau IMO

Exercice 22.10 ★★★ (IMO 2008). Soient x, y, z des réels différents de 1 avec $xyz = 1$. Montrer que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$$

Exercice 22.11 ★★★. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et a, b, c, d quatre entiers distincts tels que $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$. Montrer qu'il n'existe aucun entier k tel que $P(k) = 8$.

Exercice 22.12 ★★★. Soit (a_n) définie par $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. Montrer que les termes de la suite sont deux à deux premiers entre eux.

22.5 Solutions du sujet A

Solution de l'exercice 22.1. On complète la puissance quatrième :

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x-1)^4,$$

donc l'équation s'écrit $(x-1)^4 = 8x^2 - 16x - 7 = 8(x-1)^2 - 15$. En posant $t = (x-1)^2 \geq 0$: $t^2 - 8t + 15 = 0$, donc $t = 3$ ou $t = 5$. Ainsi

$$x \in \{1 \pm \sqrt{3},\ 1 \pm \sqrt{5}\}.$$

Solution de l'exercice 22.2. (Nesbitt.) Par Cauchy–Schwarz sous forme d'Engel,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+a)} + \frac{c^2}{c(a+b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2},$$

la dernière inégalité étant $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$. Égalité si $a = b = c$.

Solution de l'exercice 22.3. $P(0) = 0$ et $P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$ donnent $P(1) = P(0)^2 + 1 = 1$, puis $P(2) = P(1)^2 + 1 = 2$, $P(5) = 5$, $P(26) = 26$, … La suite $u_0 = 0$, $u_{k+1} = u_k^2 + 1$ vérifie $P(u_k) = u_k$ pour tout k, et elle est strictement croissante : le polynôme $P(x) - x$ possède une infinité de racines, donc

$$P(x) = x,$$

qui convient bien ($x^2 + 1 = x^2 + 1$).

22.6 Solutions du sujet B

Solution de l'exercice 22.4. Posons $p = a+b+c = 3$, $q = ab+bc+ca$, $r = abc$. De $a^2+b^2+c^2 = p^2 - 2q$ on tire $5 = 9 - 2q$, donc $q = 2$. De l'identité $a^3+b^3+c^3 = p^3 - 3pq + 3r$: $7 = 27 - 18 + 3r$, donc $r = -\frac{2}{3}$. Enfin, avec $(a^2+b^2+c^2)^2 = a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ et $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = q^2 - 2pr = 4 + 4 = 8$:

$$a^4 + b^4 + c^4 = 25 - 16 = 9.$$

Solution de l'exercice 22.5. Par l'inégalité des moyennes quadratique-arithmétique puis IA-G :

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{x+y+z}{3} \cdot (x+y+z) \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{3}(x+y+z) = x+y+z.$$

Égalité si $x = y = z = 1$.

Solution de l'exercice 22.6. $x = y = 0$: $f(0)^2 - f(0) = 0$, donc $f(0) \in \{0,1\}$. Si $f(0) = 0$, prenons $x = 0$: $f(0)f(y) - f(0) = y$ donne $0 = y$ pour tout y : absurde. Donc $f(0) = 1$. Avec $y = 0$: $f(x)f(0) - f(0) = x$, c'est-à-dire $f(x) = x + 1$. Vérification : $(x+1)(y+1) - (xy+1) = x + y$.

22.7 Solutions du sujet C

Solution de l'exercice 22.7. Astuce de « soustraction » : pour tous réels $a, b > 0$,

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2},$$

car $1 + b^2 \geq 2b$. En sommant cycliquement :

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{1+b^2} \geq (a+b+c) - \frac{ab+bc+ca}{2} = 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}.$$

Or $ab+bc+ca \le \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$, donc la somme est $\ge 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$. Égalité si $a=b=c=1$.

Solution de l'exercice 22.8. Élevons au carré la récurrence :

$$a_{n+1}^2 = \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} > a_n^2 + 2.$$

Donc $a_n^2 > a_1^2 + 2(n-1) = 2n-1$ pour $n \ge 2$, et $a_{100}^2 > 199 > 196$, d'où $a_{100} > 14$.

Solution de l'exercice 22.9. Notons que $f \equiv 0$ convient. Supposons $f \not\equiv 0$ et soit $A = f(\mathbb{R})$ l'image.

Étape 1. Prenons $x = f(y)$: $f(0) = f\big(f(y)\big) - 2f(y)^2 + f\big(f(y)\big)$, donc

$$f\big(f(y)\big) = \frac{f(0)}{2} + f(y)^2 \qquad \forall y.$$

En réinjectant, pour tout x et tout $t = f(y) \in A$:

$$f(x-t) = \frac{f(0)}{2} + t^2 - 2xt + f(x). \qquad (22.1)$$

Étape 2. Soit $t_0 \in A$, $t_0 \neq 0$ (il en existe, sinon $f \equiv 0$). Dans (22.1), remplaçons x par $x + t_0$:

$$f(x) = \frac{f(0)}{2} + t_0^2 - 2(x+t_0)t_0 + f(x+t_0),$$

donc $f(x+t_0) - f(x) = 2t_0 x + t_0^2 - \frac{f(0)}{2}$: la différence est affine en x, de pente $2t_0 \neq 0$. Elle prend donc toutes les valeurs réelles : tout réel d s'écrit $d = t_2 - t_1$ avec $t_1 = f(x) \in A$ et $t_2 = f(x+t_0) \in A$.

Étape 3. Écrivons $f(x) = x^2 + g(x)$. Comme $(x-t)^2 = x^2 - 2xt + t^2$, la relation (22.1) devient

$$g(x-t) = g(x) + \frac{f(0)}{2} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } t \in A.$$

En l'appliquant au point $x+t$, on obtient aussi $g(x+t) = g(x) - \frac{f(0)}{2}$. Pour $t_1, t_2 \in A$: $g(x - t_1 + t_2) = g(x - t_1) - \frac{f(0)}{2} = g(x) + \frac{f(0)}{2} - \frac{f(0)}{2} = g(x)$. D'après l'étape 2, $g(x+d) = g(x)$ pour tout réel d : g est constante. La relation $g(x-t) = g(x) + \frac{f(0)}{2}$ impose alors $f(0) = 0$, puis $g \equiv g(0) = f(0) = 0$.

Conclusion. Les solutions sont $f \equiv 0$ et $f(x) = x^2$. Vérification pour $f(x) = x^2$: $f\big(x - f(y)\big) = (x - y^2)^2 = x^2 - 2xy^2 + y^4$ et $f\big(f(y)\big) - 2xf(y) + f(x) = y^4 - 2xy^2 + x^2$: les deux membres coïncident.

22.8 Solutions du sujet D

Solution de l'exercice 22.10. Posons

$$a = \frac{x}{x-1}, \qquad b = \frac{y}{y-1}, \qquad c = \frac{z}{z-1}.$$

Ces quantités sont bien définies et l'application $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ est involutive : $x = \frac{a}{a-1}$. La contrainte $xyz = 1$ s'écrit

$$\frac{a}{a-1} \cdot \frac{b}{b-1} \cdot \frac{c}{c-1} = 1 \Leftrightarrow abc = (a-1)(b-1)(c-1).$$

En développant le membre de droite :

$$abc = abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1 \Leftrightarrow ab + bc + ca = a + b + c - 1.$$

Posons $s = a + b + c$. Alors

$$a^2 + b^2 + c^2 = s^2 - 2(ab + bc + ca) = s^2 - 2(s - 1) = (s - 1)^2 + 1 \geq 1.$$

C'est exactement l'inégalité demandée. Égalité si $s = 1$, par exemple pour (a, b, c) tels que $a + b + c = 1$ et $ab + bc + ca = 0$ (il existe de tels réels, donc la constante 1 est optimale).

Solution de l'exercice 22.11. Puisque a, b, c, d sont racines de $P(x) - 5$, il existe $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$P(x) - 5 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)Q(x).$$

Si $P(k) = 8$ pour un entier k, alors

$$(k - a)(k - b)(k - c)(k - d)Q(k) = 3.$$

Les quatre entiers $k - a$, $k - b$, $k - c$, $k - d$ sont distincts et non nuls, et leur produit divise 3, donc $|(k - a)(k - b)(k - c)(k - d)| \leq 3$. Or le produit de quatre entiers non nuls distincts a une valeur absolue au moins égale à $|1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-2)| = 4 > 3$. Contradiction.

Solution de l'exercice 22.12. La récurrence donne $a_{n+1} - 1 = a_n^2 - a_n = a_n(a_n - 1)$. Par récurrence immédiate,

$$a_{n+1} - 1 = a_n a_{n-1} \cdots a_1(a_1 - 1) = a_1 a_2 \cdots a_n,$$

puisque $a_1 - 1 = 1$. (Vérification : $a_2 = 3$ et $a_2 - 1 = 2 = a_1$; $a_3 = 7$ et $a_3 - 1 = 6 = a_1 a_2$.) Soient $i < j$ et $d = \gcd(a_i, a_j)$. Comme $a_i \mid a_j - 1$, d divise a_j et $a_j - 1$, donc $d \mid 1$: les termes sont deux à deux premiers entre eux.

PARTIE VI — Annexes

ANNEXE A

A Formulaire complet

Ce formulaire est à connaître par cœur. Il ne remplace pas le cours : il sert de contrôle final avant une compétition.

A.1 Identités algébriques

$$
\begin{aligned}
(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\
(a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3 \\
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \\
a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \\
a^n - b^n &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k} \\
(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\
a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\
a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \\
(a+b+c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc \\
a^4 + a^2 b^2 + b^4 &= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) \\
a^4 + 4b^4 &= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 \quad \text{(Sophie Germain)} \\
(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc &= (a+b)(b+c)(c+a) \\
a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]
\end{aligned}
$$

A.2 Sommes de référence

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\ (q \neq 1), \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Sommation d'Abel : $\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k\,(b_{k+1} - b_k)$ avec $A_k = a_1 + \cdots + a_k$.

A.3 Polynômes

Soit $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ de racines $r_1, \ldots, r_n$ (dans $\mathbb{C}$, avec multiplicité).

Viète : $\sum r_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$, $\sum_{i<j} r_i\, r_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$, …, $r_1 \cdots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Newton ($p_k = \sum r_i^k$, e_j = fonctions symétriques élémentaires, cas $n = 3$) : $p_1 = e_1$, $p_2 = e_1 p_1 - 2e_2$, $p_3 = e_1 p_2 - e_2 p_1 + 3e_3$.

Résultats structurels :

- $P(a) = 0 \Leftrightarrow (x-a) \mid P$; un polynôme non nul de degré n a au plus n racines ;
- si P s'annule en une infinité de points, $P = 0$; si $P = Q$ sur une infinité de points, $P = Q$;
- théorème fondamental : sur $\mathbb{C}$, $P = a_n \prod (x - r_i)$;
- $P \in \mathbb{Z}[X] \Rightarrow (a-b) \mid P(a) - P(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$;
- racines rationnelles : si $\frac{p}{q}$ (irréductible) est racine de $P \in \mathbb{Z}[X]$, alors $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$;
- Eisenstein : s'il existe un premier p tel que $p \nmid a_n$, $p \mid a_i$ pour $i < n$ et $p^2 \nmid a_0$, alors P est irréductible sur $\mathbb{Q}$;
- Lagrange : $P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$;
- différences finies : $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$ abaisse le degré de 1 ; $\Delta^n P$ est constant, égal à $n!\, a_n$.

A.4 Nombres complexes

$$|z|^2 = z\overline{z}, \qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \qquad z = re^{i\theta}, \qquad z^n = r^n e^{in\theta} \text{ (De Moivre).}$$

Racines n-ièmes de l'unité : $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, $k = 0, \ldots, n-1$; elles vérifient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0 \ (n \geq 2), \qquad \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k = (-1)^{n+1}, \qquad 1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1} = 0 \ (\omega \neq 1).$$

Inégalité triangulaire : $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

A.5 Inégalités

Pour $a_i > 0$, avec A, G, H, Q les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique :

$$\min a_i \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq \max a_i.$$

IA-G : $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$, égalité si et seulement si tous les a_i sont égaux.

IA-G pondérée : $\sum w_i a_i \geq \prod a_i^{w_i}$ pour $w_i > 0$, $\sum w_i = 1$.

Cauchy–Schwarz : $(\sum a_i b_i)^2 \leq \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$.

Forme d'Engel (« mauvais élèves ») : $\sum \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum a_i)^2}{\sum b_i}$ pour $b_i > 0$.

Hölder : $\left(\sum a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum b_i^q\right)^{1/q} \geq \sum a_i b_i$ pour $a_i, b_i \geq 0$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; forme pratique $(\sum a_i)(\sum b_i)(\sum c_i) \geq \left(\sum \sqrt[3]{a_i b_i c_i}\right)^3$.

Minkowski : $\left(\sum (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum b_i^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$.

Réarrangement : si $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ et $b_1 \leq \cdots \leq b_n$, alors $\sum a_i b_{n+1-i} \leq \sum a_i b_{\sigma(i)} \leq \sum a_i b_i$.

Tchebychev : mêmes hypothèses, $\frac{1}{n}\sum a_i b_i \geq \left(\frac{1}{n}\sum a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum b_i\right)$.

Jensen : f convexe $\Rightarrow f(\sum w_i x_i) \leq \sum w_i f(x_i)$; sens inverse si f concave.

Bernoulli : $(1+x)^n \geq 1 + nx$ pour $x \geq -1$, $n \geq 1$.

Schur $(a, b, c \geq 0, t > 0)$: $a^t(a-b)(a-c) + b^t(b-a)(b-c) + c^t(c-a)(c-b) \geq 0$; cas $t = 1$, en p, q, r : $p^3 + 9r \geq 4pq$.

Muirhead : si $[\alpha] \succ [\beta]$ (majoration), alors $\sum_{\text{sym}} a^{\alpha_1} b^{\alpha_2} c^{\alpha_3} \geq \sum_{\text{sym}} a^{\beta_1} b^{\beta_2} c^{\beta_3}$.

Nesbitt : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.

Substitutions : $abc=1\Rightarrow(a,b,c)=\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x}\right)$; triangle ⇒ Ravi $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$; $a+b+c=abc\Rightarrow a=\tan A$, …

A.6 Équations fonctionnelles

Équation	Solutions (avec régularité)
$f(x+y)=f(x)+f(y)$	$f(x)=cx$
$f(x+y)=f(x)f(y)$	$f\equiv 0$ ou $f(x)=a^x$ $(a>0)$
$f(xy)=f(x)+f(y)$ sur $\mathbb{R}_{>0}$	$f(x)=c\ln x$
$f(xy)=f(x)f(y)$ sur $\mathbb{R}_{>0}$	$f\equiv 0$ ou $f(x)=x^\alpha$
$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$	$f(x)=cx+d$
$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$	$f(x)=cx^2$
additive et multiplicative	$f\equiv 0$ ou $f=\mathrm{id}$

Sur $\mathbb{Q}$, l'additivité seule donne $f(x)=cx$. Sur $\mathbb{R}$, il suffit d'ajouter l'une des hypothèses suivantes : continuité en un point, monotonie, bornitude sur un intervalle, ou positivité sur $\mathbb{R}_{>0}$.

A.7 Suites

Suite récurrente linéaire $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$: équation caractéristique $x^2=ax+b$.

- deux racines distinctes $r\neq s$: $u_n=\alpha r^n+\beta s^n$;
- racine double r : $u_n=(\alpha+\beta n)r^n$.

Fibonacci : $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $F_0=0$, $F_1=1$, $F_n=\frac{\varphi^n-\psi^n}{\sqrt{5}}$ avec $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; identités $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$ (Cassini), $\gcd(F_m,F_n)=F_{\gcd(m,n)}$.

Arithmético-géométrique $u_{n+1}=au_n+b$ $(a\neq 1)$: point fixe $\ell=\frac{b}{1-a}$, puis $u_n-\ell=a^n(u_0-\ell)$.

ANNEXE B

B Plan d'entraînement en 24 semaines

B.1 Principes

À retenir

- Régularité > intensité : 1 h par jour vaut mieux que 7 h le dimanche.
- Un problème cherché 45 minutes puis lu apprend plus que dix problèmes survolés.
- Rédiger au moins un problème par jour, entièrement, à la main.
- Tenir un carnet de techniques : à chaque solution lue, écrire en une phrase l'idée réutilisable.
- Refaire, une semaine plus tard, tout problème non résolu du premier coup.

B.2 Le calendrier

Sem.	Cours à travailler	Objectif de la semaine
1–2	Chap. 1 : identités, factorisation	Maîtriser les identités du formulaire sans hésitation.
3	Chap. 2 : sommes, produits, télescopage	Savoir télescoper une somme et un produit.
4	Chap. 3 : équations, second degré, radicaux	Résoudre toute équation polynomiale « astucieuse » de degré 4.
5–6	Chap. 4 : récurrence et suites	Récurrence forte, descente, récurrences linéaires d'ordre 2.
7	Bilan I : sujet A du chapitre 22	Score visé : 2 problèmes sur 3.
8–9	Chap. 5–6 : polynômes, Viète, Newton	Utiliser Viète sans écrire les racines.
10	Chap. 7 : interpolation, différences finies	Lagrange et $\Delta^n P = n!\ a_n$.
11	Chap. 8 : polynômes à coefficients entiers	$a - b \mid P(a) - P(b)$, Gauss, Eisenstein.
12	Chap. 9 : complexes, racines de l'unité	Sommes trigonométriques, $\sum \omega_k = 0$.
13	Bilan II : sujet B du chapitre 22	Score visé : 2,5 sur 3.
14	Chap. 10–11 : bases, moyennes	IA-G dans les deux sens, normalisation.
15	Chap. 12 : Cauchy–Schwarz, Hölder	Reconnaître Engel en 10 secondes.
16	Chap. 13 : ordre, réarrangement, Tchebychev	Savoir quand « supposer $a \geq b \geq c$ » est licite.
17	Chap. 14 : convexité, Jensen, tangente	Méthode de la tangente sur 3 problèmes.
18	Chap. 15 : Schur, Muirhead, SOS, pqr	Traiter une inégalité dont l'égalité est au bord.
19	Bilan III : sujet C du chapitre 22	Score visé : 2 sur 3.

Sem.	Cours à travailler	Objectif de la semaine
20	Chap. 16–17 : substitutions, injectivité	Le protocole en cinq étapes, automatisé.
21	Chap. 18 : équation de Cauchy	Réciter la preuve sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
22	Chap. 19 : EF de niveau IMO	IMO 1992, IMO 1983, IMO 2008 sans regarder.
23	Chap. 20–21 : méthodologie, 10 problèmes d'IMO	Rédiger 5 solutions complètes.
24	Bilan final : sujet D, en 4 h 30	Score visé : 2 sur 3 avec rédaction complète.

B.3 Après ces 24 semaines

- Travailler les IMO Shortlist dans l'ordre : A1, A2 (abordables), puis A3, A4, enfin A5–A8.
- Passer les tests virtuels de Mathraining (sections 4, 5 et 6) : ils sont calibrés exactement sur cette progression.
- Faire une IMO complète par mois en conditions réelles (2×4 h 30).
- Corriger les copies d'un camarade : c'est le meilleur exercice de rigueur.

ANNEXE C

C Bibliographie et ressources

C.1 Ouvrages de référence

1. M. Aassila, *Objectif Olympiades de Mathématiques, Tome 1 : Algèbre*, 2020. — Cours progressif en français, plus de 700 exercices corrigés.
2. M. Aassila, *Objectif Olympiades de Mathématiques, Tome 2 : Analyse*, 2020. — Contient un traité complet des inégalités algébriques et des équations fonctionnelles.
3. T. Andreescu, B. Enescu, *Mathematical Olympiad Treasures*, Birkhäuser. — Sélection thématique remarquable.
4. T. Andreescu, M. Țetiva, *Sums and Products*, XYZ Press. — Tout sur les sommes, produits et symétries.
5. A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer. — Le classique absolu sur les stratégies (invariants, extrémalité, coloriage).
6. Z. Cvetkovski, *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems*, Springer. — Référence pour SOS, pqr, Muirhead.
7. H. et N. Sedrakyan, *Algebraic Inequalities*, Springer.
8. R. B. Manfrino et al., *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach*, Birkhäuser.
9. Y. Su, B. Xiong, *Methods and Techniques for Proving Inequalities*, World Scientific.
10. T. Andreescu, V. Crişan, *Mathematical Induction*, XYZ Press.

C.2 Ressources en ligne

- **Mathraining** — mathraining.be : cours en français et exercices auto-corrigés, avec un système de points. Les sections utiles pour cet ouvrage sont : Algèbre (section 4), Équations fonctionnelles (section 5), Inégalités (section 6). La progression du présent ouvrage a été alignée sur ce découpage.
- **AoPS** — artofproblemsolving.com : forum et base de données de tous les problèmes d'IMO, de shortlist et d'olympiades nationales.
- **IMO official** — imo-official.org : énoncés officiels, résultats, statistiques par pays.
- **Compendium IMO Shortlist** : recueils annuels des problèmes proposés, classés A (algèbre), C, G, N.

  NB : Ce livre est à but éducatif uniquement. Il a été réalisé avec recours à l'IA.

C.3 Comment utiliser ces ressources

Méthode C.3.1 — Le triangle cours – problèmes – rédaction

1. **Le cours** (cet ouvrage) donne les outils. Sans eux, chercher des problèmes est une perte de temps.
2. **Les banques de problèmes** (Mathraining, AoPS, shortlists) donnent le volume. Il faut plusieurs centaines de problèmes cherchés pour atteindre le niveau IMO.
3. **La rédaction corrigée par un tiers** donne la rigueur. C'est l'étape que tout le monde néglige, et celle qui distingue une médaille d'une mention.

Bon travail, et bonne chance en compétition.

À propos de l'auteur

Ali AKIR

Ali AKIR est formateur bénévole depuis 2017 au sein de l'Association Tunisienne de Compétitions et de Culture Mathématique (ATCCM), où il prépare des élèves tunisiens aux olympiades internationales de mathématiques (IMO, PAMO, AMO, OFM…). Il a occupé le rôle de coordinateur régional du Pan-African Mathematical Olympiad (PAMO) pour l'Afrique, ainsi que celui de coordinateur de l'Olympiade Francophone de Mathématiques (OFM). Il forme également des formateurs dans le cadre de programmes régionaux de préparation olympique.

La collection ATOMATH rassemble l'ensemble de son enseignement olympique, organisé en quatre tomes : Algèbre, Géométrie, Arithmétique et Combinatoire.

ATOMATH

Tome I : Algèbre

La collection ATOMATH propose un parcours complet de préparation aux Olympiades internationales de mathématiques. Ce premier tome est entièrement consacré à l'algèbre olympique, des identités remarquables aux équations fonctionnelles de niveau IMO.

L'algèbre occupe une place centrale dans les compétitions internationales : à l'IMO, un à deux problèmes sur six relèvent directement de cette discipline, avec une nette dominante pour les équations fonctionnelles et les inégalités. Sa difficulté ne tient pas au volume des connaissances, mais à la nécessité de savoir laquelle des nombreuses techniques mobiliser au bon moment.

Conçu pour accompagner l'élève depuis le niveau junior jusqu'au niveau senior exigé par l'IMO, cet ouvrage ne suppose aucun prérequis au-delà du calcul algébrique élémentaire. Chaque notion est rigoureusement introduite, démontrée, puis mise à l'épreuve sur des exemples résolus et une large banque d'exercices gradués.

Au programme :

- **Socle algébrique :** identités remarquables, factorisation, sommes et produits, équations, récurrence et suites.
- **Polynômes et complexes :** division euclidienne, racines, formules de Viète, interpolation, irréductibilité, racines de l'unité.
- **Inégalités :** moyennes, Cauchy–Schwarz, réarrangement, convexité, Muirhead, Schur, SOS et pqr.
- **Équations fonctionnelles :** substitutions, injectivité et surjectivité, équation de Cauchy, équations sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

Ali AKIR

Formateur olympique