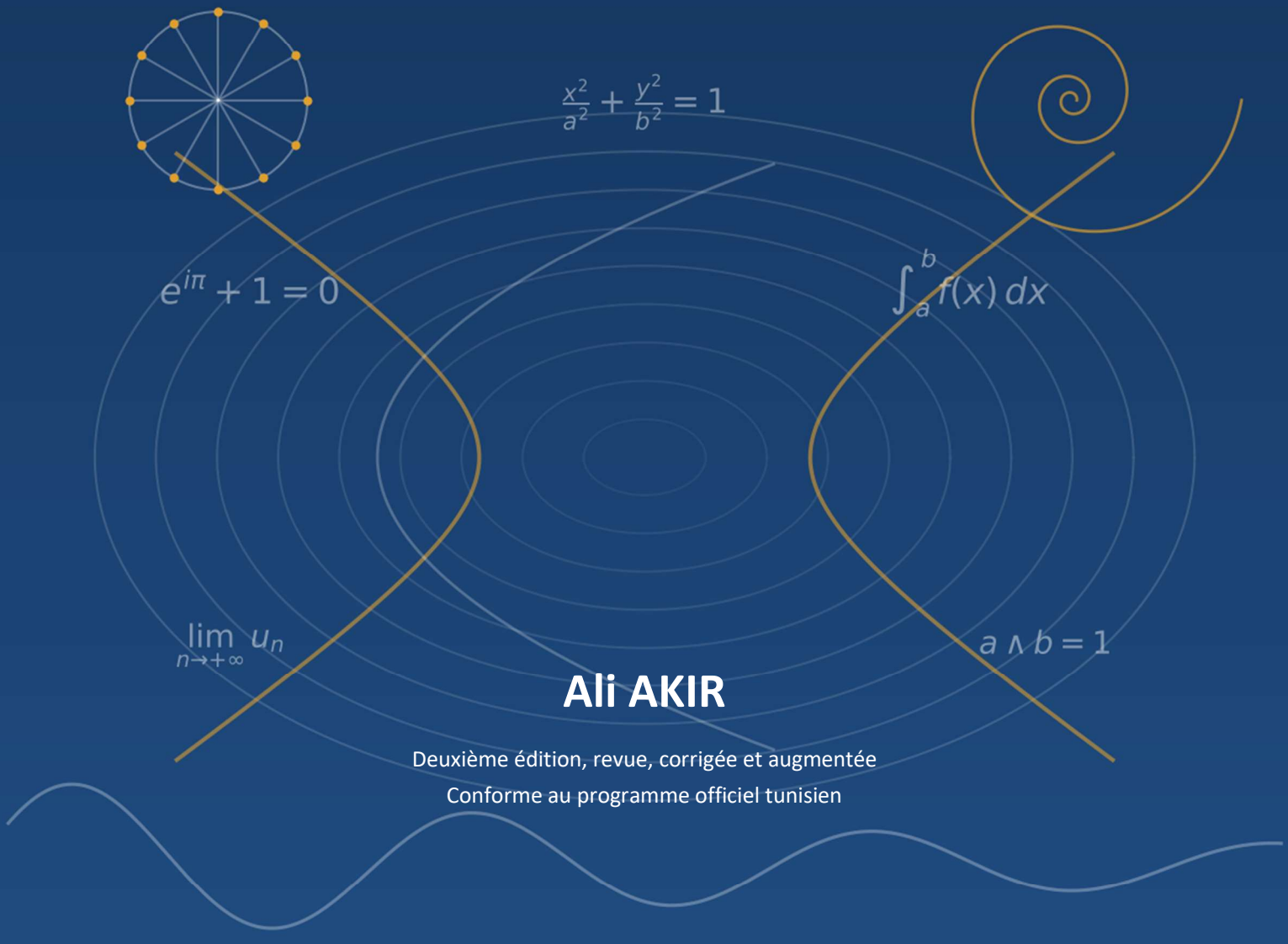
ATOMATH

BAC · SECTION MATHÉMATIQUES

MATHÉMATIQUES

4e année de l'enseignement secondaire

Cours · Exercices · Corrigés détaillés



Ali AKIR

Deuxième édition, revue, corrigée et augmentée

Conforme au programme officiel tunisien

Mathématiques

4e année secondaire — section Mathématiques

Cours, exercices et corrigés détaillés

Analyse · Nombres complexes · Géométrie · Arithmétique · Probabilités · Statistiques

17 chapitres — plus de 300 exercices entièrement corrigés — plus d'une centaine de figures

Conforme aux manuels officiels de 4e année, section Mathématiques (Tome 1 : Analyse ; Tome 2 : Géométrie, Arithmétique, Probabilités et Statistiques)

Ali AKIR

Deuxième edition 2026

Première édition : *Cours et 283 exercices*, Bac Maths 2009/2010

Sommaire

Introduction 5

Chapitre 1 — Continuité et limites 6
Cours 6
Exercices 12
Corrigés détaillés 16

Chapitre 2 — Suites réelles 29
Cours 29
Exercices 33
Corrigés détaillés 40

Chapitre 3 — Dérivabilité 54
Cours 54
Exercices 58
Corrigés détaillés 61

Chapitre 4 — Fonctions réciproques 68
Cours 68
Exercices 70
Corrigés détaillés 76

Chapitre 5 — Primitives 90
Cours 90
Exercices 92
Corrigés détaillés 96

Chapitre 6 — Intégrales 102
Cours 102
Exercices 104
Corrigés détaillés 110

Chapitre 7 — Fonction logarithme népérien 122
Cours 122
Exercices 124
Corrigés détaillés 127

Chapitre 8 — Fonction exponentielle 134
Cours 134
Exercices 136
Corrigés détaillés 141

Chapitre 9 — Équations différentielles 150
Cours 150
Exercices 151
Corrigés détaillés 157

Chapitre 10 — Nombres complexes 164
Cours 164
Exercices 167
Corrigés détaillés 173

Chapitre 11 — Isométries du plan, déplacements et antidéplacements 184
Cours 184
Exercices 187
Corrigés détaillés 192

Chapitre 12 — Similitudes du plan 204
Cours 204
Exercices 207
Corrigés détaillés 212

Chapitre 13 — Coniques 224
Cours 224
Exercices 227
Corrigés détaillés 231

Chapitre 14 — Arithmétique 244
Cours 244
Exercices 246
Corrigés détaillés 253

Chapitre 15 — Géométrie dans l'espace 262
Cours 262
Exercices 264
Corrigés détaillés 266

Chapitre 16 — Probabilités 271
Cours 271
Exercices 273
Corrigés détaillés 279

Chapitre 17 — Statistiques 287
Cours 287
Exercices 288
Corrigés détaillés 293

Formulaire 298

Introduction

Avant-propos

Ce livre s'adresse aux élèves de 4e année de l'enseignement secondaire, section Mathématiques, ainsi qu'à leurs professeurs. Il couvre l'ensemble du programme officiel tunisien.

Cette deuxième édition reprend intégralement le plan et les énoncés de la première (*Cours et 283 exercices*, 2009/2010), mais elle a été entièrement réécrite :

– **les cours** ont été alignés sur les définitions, les notations et les théorèmes des manuels officiels, et enrichis d'encadrés de méthode et de mises en garde ;

– **chaque exercice est désormais corrigé en détail**, avec des démonstrations complètes et rédigées comme on l'attend le jour de l'examen ;

– **les énoncés ont été relus** : les coquilles et les quelques énoncés inexacts de la première édition ont été corrigés, et chaque modification est signalée dans le corrigé par une « Remarque sur l'énoncé » (la liste complète figure en annexe) ;

– **plus d'une centaine de figures** (courbes, figures géométriques, arbres, nuages de points) ont été redessinées ;

– **un formulaire** rassemble en fin d'ouvrage les résultats à connaître par cœur ;

– **des exercices de synthèse « type bac »** ont été ajoutés dans les chapitres qui en comptaient peu (dérivabilité, primitives, logarithme, exponentielle, géométrie dans l'espace, statistiques).

Organisation d'un chapitre

Chaque chapitre s'ouvre sur un bandeau et sur la liste des **objectifs** : ce que l'élève doit savoir faire à la fin du chapitre. Viennent ensuite trois parties.

1. **Le cours** : définitions, théorèmes et propriétés du programme, regroupés dans des encadrés de couleur, avec des exemples et des méthodes.
2. **Les exercices** : les énoncés, classés du plus direct au plus complet ; les problèmes de synthèse et les sujets d'examen sont signalés.
3. **Les corrigés détaillés** : une solution complète de chaque exercice, illustrée par une figure lorsque cela aide à la compréhension.

Légende des encadrés

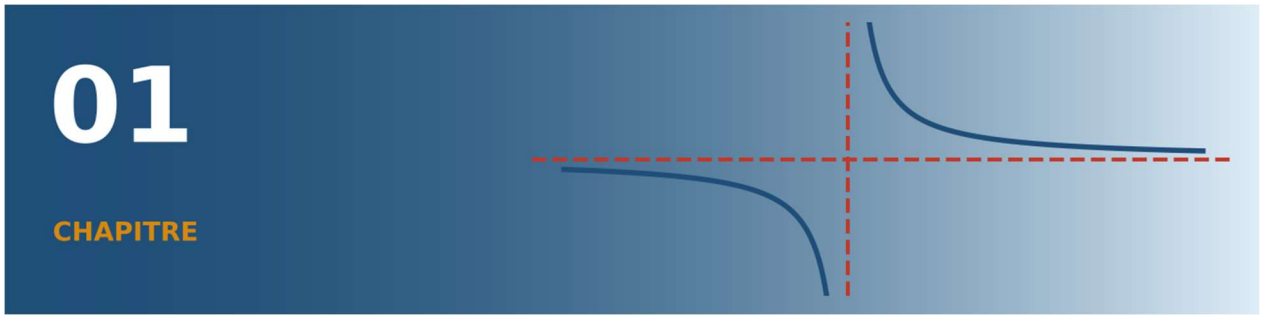
Encadré bleu — Définition. Les définitions et le vocabulaire du programme.

Encadré rouge — Théorème. Les théorèmes et propriétés à connaître parfaitement.

Encadré vert — Méthode. Les savoir-faire : comment rédiger, comment s'y prendre.

Encadré orange — Attention. Les erreurs fréquentes et les pièges classiques.

Chapitre 1 — Continuité et limites



Cours • 24 exercices • Corrigés détaillés

Ce que vous devez savoir faire à la fin du chapitre
– Justifier la continuité d'une fonction en un réel ou sur un intervalle, prolonger une fonction par continuité.
– Lever une indétermination et calculer la limite d'une fonction, en particulier d'une fonction composée.
– Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement.
– Reconnaître et interpréter graphiquement une branche infinie.
– Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour établir l'existence, puis l'unicité, d'une solution d'une équation $f(x) = k$.
– Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue.

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $\mathcal{C}_f$ désigne la courbe représentative d'une fonction f. Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 1, chapitre 1).

Cours

I. Continuité

1. Continuité en un réel, sur un intervalle

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
La fonction f est **continue en** a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Elle est **continue à droite** (respectivement **à gauche**) en a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ (respectivement $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$).
La fonction f est continue en a si, et seulement si, elle est continue à droite et à gauche en a.

Définition. Une fonction est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout réel de I.
Une fonction est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b. On définit de même la continuité sur $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$.

Théorème (fonctions usuelles).
– Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
– Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition.

– Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$; la fonction $x \mapsto \tan x$ est continue en tout réel de son ensemble de définition.
– La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Théorème (opérations). Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
– Si f est continue en a, alors les fonctions αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $|f|$ et f^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues en a.
– Si f et g sont continues en a, alors $f + g$ et $f \times g$ sont continues en a.
– Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en a.
– Si f est continue en a et $f(a) > 0$, alors $\sqrt{f}$ est continue en a.

2. Prolongement par continuité

Théorème. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I. Si f admet une limite finie ℓ en a, alors la fonction g définie sur I par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue en a. On dit que g est le **prolongement par continuité** de f en a.

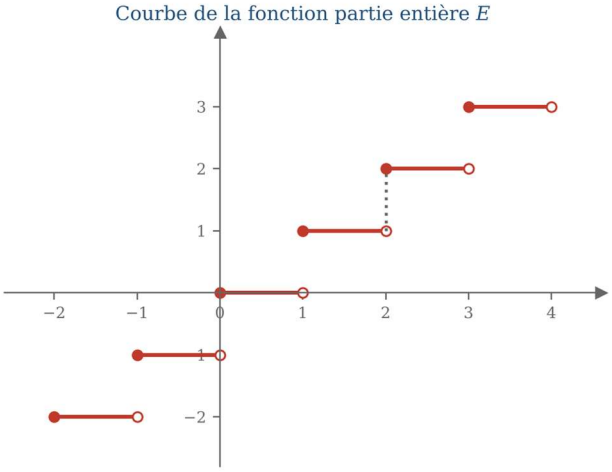
Exemple. La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 par la fonction g telle que $g(x) = \frac{\sin}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

3. Un exemple à connaître : la fonction partie entière

Pour tout réel x, on note $E(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. Ainsi $E(2{,}2) = 2$, $E(-2{,}2) = -3$ et, pour tout réel x,

$$E(x) \leq x < E(x) + 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x - 1 < E(x) \leq x.$$

Courbe de la fonction partie entière E



La fonction partie entière est constante sur chaque intervalle $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$.

Étudions la continuité de E en 2. Pour $x \in [1{,}2[$, $E(x) = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 2^-} E(x) = 1$. Pour $x \in [2{,}3[$, $E(x) = 2$, donc $\lim\limits_{x \to 2^+} E(x) = 2 = E(2)$. La fonction E est continue à droite en 2, mais elle n'est pas continue à gauche en 2 : E **n'est pas continue en** 2.

Plus généralement, E est continue sur chaque intervalle $[n, n+1[$ $(n \in \mathbb{Z})$ et discontinue en tout entier relatif.

II. Limites : rappels et compléments

1. Limites à l'infini des fonctions polynômes et rationnelles

Théorème.
– La limite à l'infini d'une fonction polynôme est celle de son terme de plus haut degré.
– La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est celle du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3-2x^4+x-1}{x^2+5x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^4}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^2) = -\infty$.

Attention. Ce théorème ne s'applique **qu'à l'infini**. En un réel a, on calcule directement, on factorise par $(x-a)$ ou l'on étudie le signe du dénominateur.

2. Limites trigonométriques usuelles

À retenir.

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

Pour tout réel a non nul :

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(ax)}{x} = a, \qquad \lim_{x\to0} \frac{\tan(ax)}{x} = a, \qquad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2}.$$

Exemple. Pour x voisin de 0 et non nul,

$$\frac{1-\cos x}{x\sin x} = \frac{1-\cos x}{x^2} \times \frac{x}{\sin x}, \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x\sin x} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

3. Formes indéterminées

Les quatre formes indéterminées sont « $+\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ ».

Méthode — lever une indétermination.
– Fonction rationnelle en a (forme $\frac{0}{0}$) : factoriser numérateur et dénominateur par $(x-a)$.
– Présence de radicaux : multiplier par l'**expression conjuguée**, ou factoriser le terme dominant sous le radical en se souvenant que $\sqrt{x^2} = |x|$.
– Expressions trigonométriques : se ramener aux limites usuelles, au besoin par un changement de variable ($h = x - a$).
– Fonction bornée multipliée par une fonction de limite nulle, partie entière : penser aux théorèmes de comparaison (paragraphe IV).

III. Continuité et limite d'une fonction composée

Définition. Soit u une fonction définie sur un ensemble I et v une fonction définie sur un ensemble J tel que $u(I) \subset J$. La fonction **composée** de u et v, notée $v \circ u$, est définie sur I par $v \circ u(x) = v\big(u(x)\big)$.

Théorème (continuité). Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a et v une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $u(a)$. Si u est continue en a et v est continue en $u(a)$, alors $v \circ u$ est continue en a.
Corollaire. La composée de deux fonctions continues est continue.

Théorème (limite, admis). Soit u et v deux fonctions, et a, b, c finis ou infinis.

$$\text{Si } \lim_{x\to a} u(x) = b \text{ et } \lim_{y\to b} v(y) = c, \text{ alors } \lim_{x\to a} v\circ u(x) = c.$$

Exemple. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1+\pi x}{2x}\right)$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\pi x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi x}{2x} = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}} \sin y = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ car la fonction sinus est continue en $\frac{\pi}{2}$. Par composition, la limite cherchée vaut 1.

IV. Limites et ordre

Théorème (comparaison et encadrement). Soit f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle I, sauf peut-être en un réel a de I, et ℓ, ℓ' deux réels.

– Si $u(x) \le v(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim\limits_a u = \ell$ et $\lim\limits_a v = \ell'$, alors $\ell \le \ell'$.

– Si $u(x) \le f(x) \le v(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim\limits_a u = \lim\limits_a v = \ell$, alors $\lim\limits_a f = \ell$.

– Si $f(x) \ge u(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim\limits_a u = +\infty$, alors $\lim\limits_a f = +\infty$.

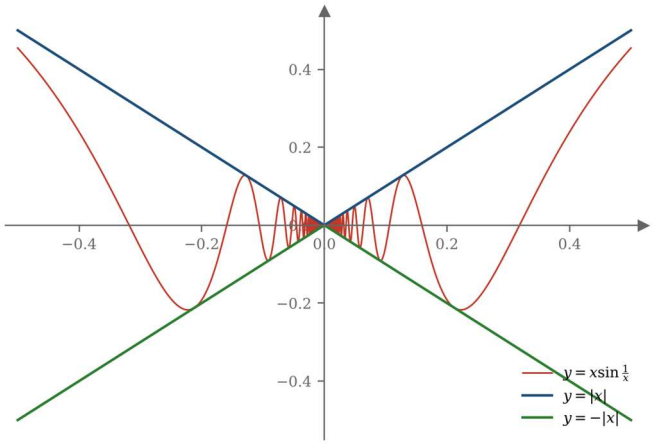
– Si $f(x) \le u(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim\limits_a u = -\infty$, alors $\lim\limits_a f = -\infty$.

Ces résultats restent valables pour les limites à l'infini, à droite ou à gauche en a.

Conséquence très utilisée. Si $|f(x) - \ell| \le u(x)$ au voisinage de a et si $\lim\limits_a u = 0$, alors $\lim\limits_a f = \ell$.

En effet, $\ell - u(x) \le f(x) \le \ell + u(x)$ et les deux fonctions encadrantes tendent vers ℓ.

Exemple 1. Pour tout réel $x \neq 0$, $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$ et $\lim\limits_{x\to0} |x| = 0$, donc $\lim\limits_{x\to0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.



La courbe de $x \mapsto x\sin\frac{1}{x}$ est comprise entre celles de $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto -|x|$.

Exemple 2. Soit $f(x) = x^2(2 + \cos x)$. Pour tout réel x, $2 + \cos x \ge 1$, donc $f(x) \ge x^2$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

V. Branches infinies

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe. Les résultats suivants sont énoncés en $+\infty$; ils sont analogues en $-\infty$.

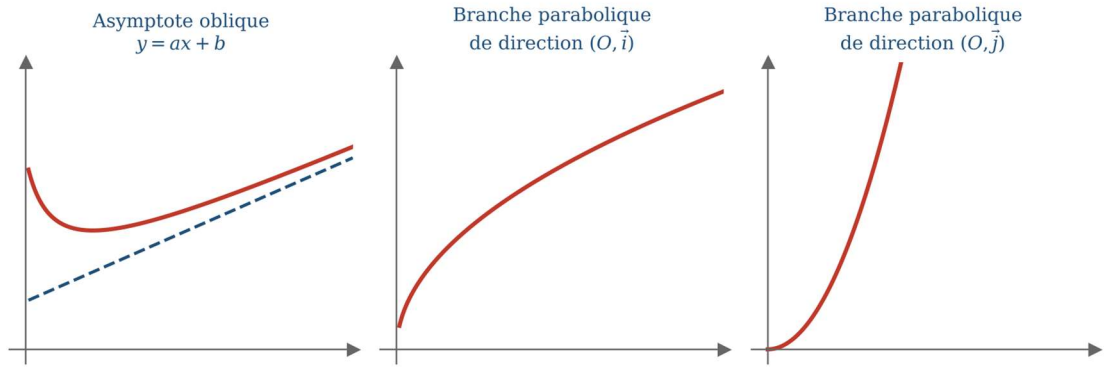
Asymptotes parallèles aux axes.

– Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ (éventuellement à droite ou à gauche seulement), la droite d'équation $x = a$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$.

– Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ (b réel), la droite d'équation $y = b$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, on étudie $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Résultat	Étape suivante	Conclusion pour $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$	—	branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	—	branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{i})$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a, a \neq 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b, b$ réel	la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a, a \neq 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$	branche parabolique de direction celle de la droite $y = ax$



Les principales branches infinies.

Position relative. La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à une asymptote Δ: $y = ax + b$ est donnée par le signe de $f(x) - (ax + b)$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ lorsque cette différence est positive.

VI. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux réels de I tels que $a < b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède **au moins une** solution dans $[a, b]$.

Corollaire 1. Si f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans $]a, b[$.
Corollaire 2 (unicité). Si f est continue et **strictement monotone** sur un intervalle I et si $a < b$ sont deux réels de I, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans $[a, b]$.
Corollaire 3 (signe). Si f est continue sur un intervalle I et ne s'annule en aucun réel de I, alors f garde un signe constant sur I.

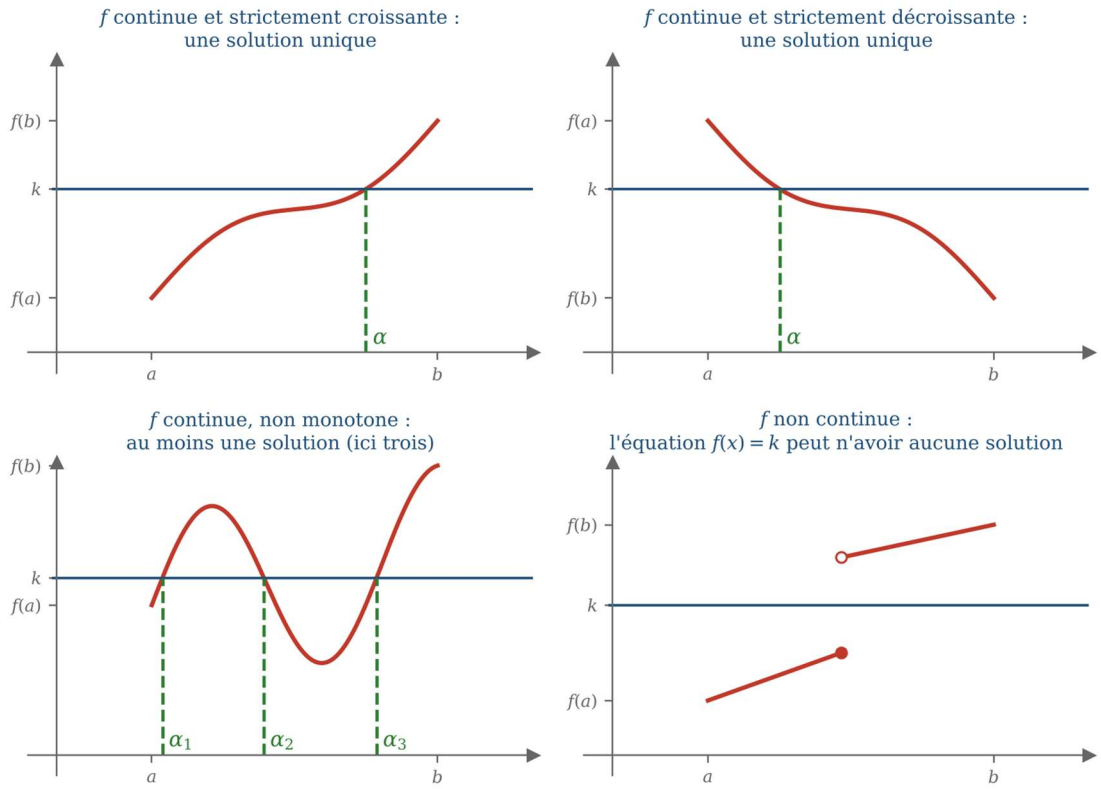


Illustration du théorème des valeurs intermédiaires et de ses limites.

Exemple. Soit $f(x) = x^3 + x - 3$ sur $I = [1,2]$. La fonction f est continue sur I (polynôme) et strictement croissante sur I car $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. De plus $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 7 > 0$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1,2[$.

Méthode — rédiger une question « montrer que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution α dans I ».

1. Justifier que f est **continue** sur I.
2. Justifier que f est **strictement monotone** sur I (signe de la dérivée, ou opérations).
3. Vérifier que k est **compris entre** les valeurs (ou les limites) de f aux bornes de I, c'est-à-dire que $k \in f(I)$.
4. Conclure. Un encadrement de α s'obtient ensuite par balayage ou par **dichotomie**.

VII. Image d'un intervalle. Fonctions monotones

Théorème. L'image d'un intervalle fermé borné $[a, b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[m, M]$; m est le minimum de f sur $[a, b]$ et M son maximum.

Théorème (limite d'une fonction monotone, admis). Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a, b[$ (b fini ou infini).
– Si f est croissante et majorée, alors f possède une limite finie en b.
– Si f est croissante et non majorée, alors f tend vers $+\infty$ en b.
– Si f est décroissante et minorée, alors f possède une limite finie en b.
– Si f est décroissante et non minorée, alors f tend vers $-\infty$ en b.

Théorème (admis). L'image d'un intervalle I par une fonction continue et strictement monotone sur I est un intervalle de même nature.

Intervalle I	f strictement croissante	f strictement décroissante
$[a,b]$	$f(I)=[f(a),f(b)]$	$f(I)=[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$f(I)=\left[f(a),\lim\limits_{b^-}f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{b^-}f,f(a)\right]$
$]a,b]$	$f(I)=\left]\lim\limits_{a^+}f,f(b)\right]$	$f(I)=\left[f(b),\lim\limits_{a^+}f\right[$
$]a,b[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{a^+}f,\lim\limits_{b^-}f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{b^-}f,\lim\limits_{a^+}f\right[$

Dans ce tableau, a et b peuvent être infinis lorsqu'ils sont exclus.

Erreurs fréquentes.
– Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sans avoir justifié la **continuité**.
– Conclure à l'unicité sans la **stricte** monotonie.
– Écrire $\sqrt{x^2}=x$: on a $\sqrt{x^2}=|x|$, donc $\sqrt{x^2}=-x$ lorsque $x<0$.
– Utiliser la règle du terme de plus haut degré ailleurs qu'à l'infini.

Exercices

Les exercices 1 à 9 portent sur le calcul de limites et les branches infinies, les exercices 10 à 13 sur la continuité, les exercices 14 à 17 sur des limites plus délicates, les exercices 18 à 22 sur le théorème des valeurs intermédiaires ; les exercices 23 et 24 sont des exercices d'approfondissement.

Exercice 1

Calculer, quand elles existent, les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x^2+3x}{1+x-x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to1}\frac{2-x+x^2}{1+x-2x^2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x}}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-2x\right)$ **e)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$ **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-3x+1\right)$ **h)** $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$ **i)** $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$

j) $\lim\limits_{x\to a}\frac{ax^n-xa^n}{x-a}$, où $(a,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}^*$

k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}\left[\frac{1}{1-x}-(1+x+x^2+\cdots+x^n)\right]$, où $n\in\mathbb{N}^*$

l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{2\pi x-1}{3x-2}\right)$ **n)** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ **o)** $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}}$

p) $\lim\limits_{x\to0^+}x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2\right)$ **q)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{4+\sin x}-2}{x}$

Exercice 2

Calculer, quand elles existent, les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\cos 2x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x}{4\sin^2 x-3}$ **c)** $\lim\limits_{x\to\pi} \left(\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{\tan x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos}}$ **e)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan x-1)\left(1-\tan\frac{x}{2}\right)$ **f)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x+\cos^2 x}{\sin x+\cos^2 x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\tan x$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{2(1-\cos\ )}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to a} (a^2-x^2)\tan\frac{\pi x}{2a}$, où $a\in\mathbb{R}^*$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[2,+\infty[$ par $f(x)=\frac{3x+\text{si}}{x-1}$.

Montrer que, pour tout $x\geq 2$, $|f(x)-3|\leq\frac{4}{x-1}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 4

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2-\cos}$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $\frac{1}{3}\leq f(x)\leq 1$.
2. En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x(2-\cos\ )}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{2-\cos}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2(2-\cos\ )}$.

Exercice 5

Soit la fonction $f: x\mapsto 3x+2\sin x$.

1.
   a) Montrer que, pour tout réel x, $3x-2\leq f(x)\leq 3x+2$.
   b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{x}{f(x)}$ si $x\neq 0$ et $g(0)=\frac{1}{5}$.
   a) Vérifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis montrer que g est continue en 0.
   b) Montrer que, pour tout $x\in\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$, $\frac{x}{3x+2}\leq g(x)\leq\frac{x}{3x-2}$.
   c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 6

Soit φ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(x)=\frac{\sqrt{x}+\cos x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. Montrer que, pour tout $x>1$, $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2+1}}\leq\varphi(x)\leq\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2+1}}$.
2. En déduire la limite de φ en $+\infty$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ par $f(x)=\frac{-x+\text{co}}{2x+1}$.

1. Démontrer que, pour tout $x>-\frac{1}{2}$, $\frac{-x-1}{2x+1}\leq f(x)\leq\frac{-x+1}{2x+1}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Calculer $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

Exercice 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto 1 + \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$ et l'on désigne par $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Étudier suivant n : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{m\sqrt{x^2+3} - 2m|x|}{x^2-1} & \text{si } |x| \neq 1 \\ 2x^3 + px + 1 & \text{si } |x| = 1 \end{cases}$$

Déterminer les réels m et p pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - |x|} - ax & \text{si } x \in]-\infty,-1] \cup \{0\} \cup [1,+\infty[\\ \dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} & \text{si } x \in]-1,0[\cup]0,1[\end{cases}$$

où a est un réel.

1. Étudier la continuité de f en 0.
2. Étudier suivant a la continuité de f en 1 et en -1.
3. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles f est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 12

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^3-7x^2+x+5}$ si $x \neq 1$ et $f(1) = a$, où a est un réel.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Déterminer le réel a pour que f soit continue en 1.

Exercice 13

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}-1}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Peut-on parler de limite de f en 0 ? Justifier.
3. Déterminer le domaine de continuité D_c de f.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 14

Calculer, quand elles existent, les limites suivantes (E désigne la fonction partie entière).

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,E\left(\frac{1}{x}\right)$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{E\left(\frac{1}{x}\right)-x}{E\left(\frac{1}{x}\right)+x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{E\left(\frac{x}{2010}\right)}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xE(x)+3}{x^2+\sin x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{2-\sin}$ **g)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\sin x}{x^2-1}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} x\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ **i)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\cos^2\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}+3}{x+\sqrt{x}}$

Exercice 15

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant. Les fonctions f et g sont définies au voisinage du réel a, sauf peut-être en a.

1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ et si $f(x)>g(x)$ pour tout x, alors $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=+\infty$.
2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ et si $g(x)<0$ pour tout x, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=-\infty$.
3. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, alors soit $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=+\infty$, soit $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.

Exercice 16

On admet que la fonction $f: x\mapsto\frac{\sin x-}{x^3}$ possède une limite réelle ℓ en 0.

1. En transformant convenablement $f(2x)$, trouver la valeur de ℓ.
2. Utiliser le résultat précédent pour déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\frac{x^2}{2}}{x^4}$.

Exercice 17

Calculer $\lim\limits_{x\to 4}\frac{16\sqrt{x-\sqrt{x}}-3\sqrt{2}\,x-4\sqrt{2}}{16(x-4)^2}$.

Exercice 18

1. Démontrer que l'équation $x^3+x-3=0$ admet une unique solution α dans $]1,2[$.
2. Donner une valeur approchée par défaut de α à 10^{-1} près.

Exercice 19

Démontrer que l'équation $x^4+x^3-x+1=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 20

1. Montrer que l'équation $x^3-5x^2+4x+7=0$ admet au moins une solution réelle.
2. Plus généralement, montrer que toute équation polynomiale de degré impair admet au moins une solution réelle.
3. Qu'en est-il si le degré est pair ?

Exercice 21

1. Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ une fonction continue. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.

2. Plus généralement, soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f([a,b]) \subset [a,b]$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a,b]$.
3. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et α, β deux réels strictement positifs. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha+\beta) f(c)$.

Exercice 22

Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $[a,b]$ pour laquelle il existe un réel $k \in]0,1[$ tel que, pour tous réels distincts x et y de $[a,b]$, $|f(x) - f(y)| < k|x-y|$.

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution et une seule dans $[a,b]$.

Exercice 23

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 et telles que, pour tout réel x, $f(2x) = f(x)$.

Exercice 24

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 et telles que, pour tout réel x, $f(2x) = f(x)\cos x$.

Corrigés détaillés

Corrigé de l'exercice 1

a) À l'infini, la limite d'une fonction rationnelle est celle du quotient des termes de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - x^2 + 3x}{1 + x - x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{-x^2} = 1.$$

b) Le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers 0 : il faut étudier le signe du dénominateur. On a $1 + x - 2x^2 = (1-x)(2x+1)$. Au voisinage de 1, $2x + 1 > 0$, donc $1 + x - 2x^2$ a le signe de $1 - x$. Par suite

$$\lim_{x\to1^-} \frac{2 - x + x^2}{1 + x - 2x^2} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to1^+} \frac{2 - x + x^2}{1 + x - 2x^2} = -\infty.$$

Les limites à gauche et à droite sont différentes : **la limite en 1 n'existe pas**.

c) Forme « $\frac{0}{0}$ ». Pour $x > 0$ et $x \neq 1$, on multiplie par l'expression conjuguée :

$$\frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{3x}}{x-1} = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{3x}\right)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{3x}\right)} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{3x}}.$$

Donc la limite vaut $\frac{-1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

d) Pour $x > 0$, $\sqrt{x^2+3x} = x\sqrt{1+\frac{3}{x}}$, donc $\sqrt{x^2+3x} - 2x = x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}} - 2\right)$.

Or $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{3}{x}} - 2\right) = -1$, donc la limite vaut $-\infty$.

e) Forme « $+\infty - \infty$ » qui ne se lève pas par factorisation (on obtiendrait $x \times 0$). Pour $x > 0$:

$$\sqrt{x^2+3x}-x=\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{3x}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right)}=\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}.$$

La limite vaut $\frac{3}{2}$.

f) Lorsque $x\to-\infty$, $\sqrt{x^2+3x}\to+\infty$ et $-x\to+\infty$: il n'y a pas d'indétermination et la limite vaut $+\infty$.

g) Pour $x>0$, $\sqrt{x^2+3x}-3x+1=x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}-3+\frac{1}{x}\right)$; le second facteur tend vers -2, donc la limite vaut $-\infty$.

h) Pour $x\geq-6$, $x\neq3$: $\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}=\frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{x+6-9}=\sqrt{x+6}+3$. La limite vaut 6.

i) Pour $x\geq-2$, $x\neq2$, on utilise les deux expressions conjuguées :

$$\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}=\frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3}\times\frac{\sqrt{x+2}+2}{x-2}=\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+7}+3}.$$

La limite vaut $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

j) On écrit $ax^n-xa^n=a(x^n-a^n)-a^n(x-a)$ et l'on utilise l'identité $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-1})$. Pour $x\neq a$:

$$\frac{ax^n-xa^n}{x-a}=a(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-1})-a^n.$$

La somme entre parenthèses comporte n termes qui tendent tous vers a^{n-1} lorsque $x\to a$. La limite vaut donc $a\times na^{n-1}-a^n=(n-1)a^n$.

k) Pour $x\neq1$, $1+x+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (somme de termes d'une suite géométrique). Donc

$$\frac{1}{1-x}-(1+x+\cdots+x^n)=\frac{x^{n+1}}{1-x}\qquad\text{et}\qquad\frac{1}{x^n}\times\frac{x^{n+1}}{1-x}=\frac{x}{1-x}.$$

La limite vaut $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=-1$.

l) Pour $|x|>1$: $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\frac{2x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}$.

Si $x\to+\infty$, $|x|=x$ et la limite vaut $\frac{2}{2}=1$. Si $x\to-\infty$, $|x|=-x$ et la limite vaut -1.

m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\pi x-1}{3x-2}=\frac{2\pi}{3}$ et la fonction cosinus est continue en $\frac{2\pi}{3}$; par composition, la limite vaut $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

n) Posons $t=\sqrt{x}$; lorsque $x\to0^+$, $t\to0$ et $\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=-\frac{1-\cos t}{t^2}$. Par composition, la limite vaut $-\frac{1}{2}$.

o) L'expression est définie pour $x>3$. On sépare :

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x-3}\sqrt{x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}}.$$

Or $\sqrt{x}-\sqrt{3}=\frac{x-3}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$, donc le premier terme est égal à $\frac{\sqrt{x-3}}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})\sqrt{x+3}}$ et tend vers 0. La limite vaut $\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

p) L'expression est définie lorsque $4+\frac{1}{x}\geq 0$, c'est-à-dire pour $x>0$ ou $x\leq -\frac{1}{4}$: au voisinage de 0, seule la limite à droite a un sens. Pour $x>0$, $x\sqrt{4+\frac{1}{x}}=\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}\right)}=\sqrt{4x^2+x}$, donc l'expression vaut $\sqrt{4x^2+x}-2x$ et la limite est 0.

q) Pour x voisin de 0, $x\neq 0$: $\frac{\sqrt{4+\sin x}-2}{x}=\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\sqrt{4+\sin x}+2}$. La limite vaut $1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

Corrigé de l'exercice 2

a) On a $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$ et $1-\tan x=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}$. Pour x voisin de $\frac{\pi}{4}$, $x\neq\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{1-\tan x}{\cos 2x}=\frac{1}{\cos x(\cos x+\sin x)}\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\to}\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}}=1.$$

b) $4\sin^2 x-3=4(1-\cos^2 x)-3=1-4\cos^2 x=(1-2\cos x)(1+2\cos x)$. Donc, pour x voisin de $\frac{\pi}{3}$, $x\neq\frac{\pi}{3}$:

$$\frac{2\cos x-1}{4\sin^2 x-3}=\frac{-1}{1+2\cos x}\underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\to}-\frac{1}{2}.$$

c) Pour x voisin de π, $x\neq\pi$: $\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{\tan x}=\frac{1}{\sin x\cos x}-\frac{\cos x}{\sin}=\frac{1-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$. La limite vaut $\tan\pi=0$.

d) On a $1-\cos 3x=2\sin^2\frac{3x}{2}$ et $\sin 3x=2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$. Donc

$$\frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 3x}}=\frac{2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{3x}{2}\right|}=\sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}\times\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\left|\sin\frac{3x}{2}\right|}.$$

Pour x voisin de 0, $\sin\frac{3x}{2}$ a le signe de x. La limite à droite vaut donc $\sqrt{2}$ et la limite à gauche $-\sqrt{2}$: **la limite en** 0 **n'existe pas**.

e) Posons $t=\tan\frac{x}{2}$; lorsque $x\to\frac{\pi}{2}$, $t\to 1$, et $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$. Alors

$$(\tan x-1)\left(1-\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{t^2+2t-1}{(1-t)(1+t)}\times(1-t)=\frac{t^2+2t-1}{1+t}\underset{t\to 1}{\to}\frac{2}{2}=1.$$

f) Posons $s=\sin x$; $\cos^2 x=1-s^2$. Le numérateur vaut $2-s-s^2=(1-s)(2+s)$ et le dénominateur $s-s^2=s(1-s)$. Pour x voisin de $\frac{\pi}{2}$, $x\neq\frac{\pi}{2}$, le quotient vaut $\frac{2+\sin x}{\sin x}$, de limite 3.

g) Notons $c=\cos\frac{x}{2}$ et $s=\sin\frac{x}{2}$. On a $\cos x=c^2-s^2=(c-s)(c+s)$, donc

$$\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\tan x=\frac{(c-s)\sin x}{(c-s)(c+s)}=\frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\to}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

h) Comme $\sin^2 x=(1-\cos x)(1+\cos x)$, pour x voisin de 0, $x\neq 0$:

$$\frac{1}{2(1-\cos x)}-\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{(1+\cos x)-2}{2(1-\cos x)(1+\cos x)}=\frac{-1}{2(1+\cos x)}\underset{x\to 0}{\to}-\frac{1}{4}.$$

i) Posons $h=a-x$, de sorte que $h\to 0$. Alors $a^2-x^2=h(2a-h)$ et

$$\tan\frac{\pi x}{2a} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi h}{2a}\right) = \frac{\cos\frac{\pi h}{2a}}{\sin\frac{\pi h}{2a}}.$$

Donc $(a^2 - x^2)\tan\frac{\pi x}{2a} = (2a - h)\cos\frac{\pi h}{2a} \times \frac{h}{\sin\frac{\pi h}{2a}}$. Or $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin\frac{\pi h}{2a}}{h} = \frac{\pi}{2a}$. La limite vaut $2a \times 1 \times \frac{2a}{\pi} = \frac{4a^2}{\pi}$.

Corrigé de l'exercice 3

Pour tout $x \geq 2$: $f(x) - 3 = \frac{3x+\sin x-3(x-1)}{x-1} = \frac{3+\sin}{x-1}$.

Comme $-1 \leq \sin x \leq 1$, on a $2 \leq 3 + \sin x \leq 4$, et $x - 1 > 0$. Donc $|f(x) - 3| = \frac{3+\sin}{x-1} \leq \frac{4}{x-1}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x-1} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

Corrigé de l'exercice 4

1. Pour tout réel x, $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $1 \leq 2 - \cos x \leq 3$. La fonction inverse étant décroissante sur $]0, +\infty[$, on obtient $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$.

2. • Pour $x > 0$, en divisant par x : $\frac{1}{3x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$. Les deux fonctions encadrantes tendent vers 0 en $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x(2-\cos\ )} = 0$.

• Pour tout réel x, $(x^2 + 1)f(x) \geq \frac{x^2+1}{3}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{3} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{2-\cos} = +\infty$.

• Pour $x \neq 0$, $\frac{f(x)}{x^2} \geq \frac{1}{3x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3x^2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2(2-\cos x)} = +\infty$.

Corrigé de l'exercice 5

1. a) Pour tout réel x, $-2 \leq 2\sin x \leq 2$; en ajoutant $3x$: $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x + 2$.

b) $f(x) \leq 3x + 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x + 2) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. De même $f(x) \geq 3x - 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x - 2) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) *g est bien définie.* La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3 + 2\cos x \geq 1 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = 0$, on a $f(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0$.

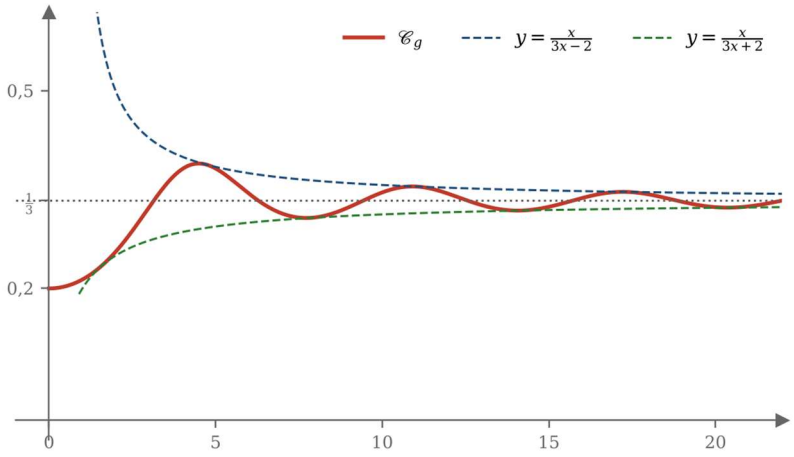
Continuité en 0. Pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{x}{3x+2\sin x} = \frac{1}{3+2\frac{\sin x}{x}}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, on a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{5} = g(0)$: g est continue en 0.

b) Soit $x > \frac{2}{3}$. Alors $3x - 2 > 0$ et, d'après 1. a), $0 < 3x - 2 \leq f(x) \leq 3x + 2$. En passant aux inverses puis en multipliant par $x > 0$:

$$\frac{x}{3x+2} \leq \frac{x}{f(x)} \leq \frac{x}{3x-2}.$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{3x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{3x-2} = \frac{1}{3}$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{3}$.

Interprétation. La droite d'équation $y = \frac{1}{3}$ est une asymptote à la courbe de g au voisinage de $+\infty$.



Exercice 5 : la courbe de g, encadrée par deux courbes de même limite $\frac{1}{3}$.

Corrigé de l'exercice 6

1. Pour tout réel x, $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $\sqrt{x}-1 \leq \sqrt{x}+\cos x \leq \sqrt{x}+1$. On divise par $\sqrt{x^2+1} > 0$ pour obtenir l'encadrement demandé (il est en fait valable pour tout $x \geq 0$).

2. Pour $x > 0$: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$ et que la fonction racine carrée est continue en 0, cette quantité tend vers 0. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$. Les deux fonctions encadrantes tendent donc vers 0 et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

Corrigé de l'exercice 7

1. Pour tout réel x, $-x-1 \leq -x+\cos x \leq -x+1$. Pour $x > -\frac{1}{2}$, $2x+1 > 0$; en divisant, on obtient $\frac{-x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{-x+1}{2x+1}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x-1}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x+1}{2x+1} = -\frac{1}{2}$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

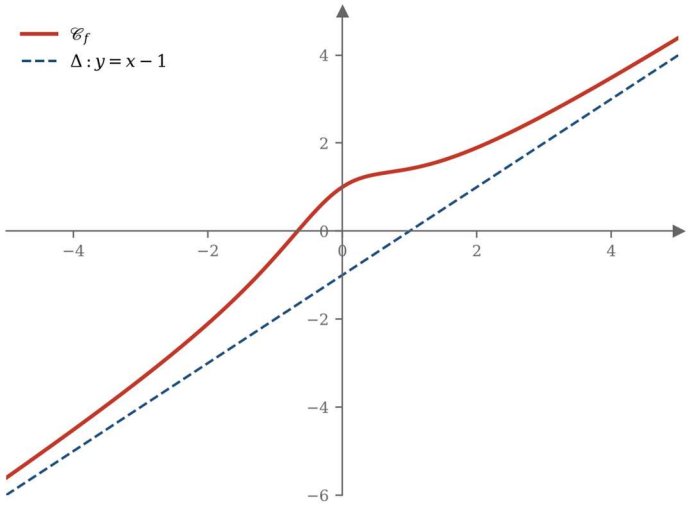
Corrigé de l'exercice 8

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Pour $x \neq 0$, $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x\sqrt{x^2+1}}$, donc $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

On complète l'étude : $f(x) - x = -1 + \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$ tend vers -1 lorsque $|x| \to +\infty$.

Interprétation. La droite $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$. De plus $f(x) - (x-1) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} > 0$: la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de Δ.



Exercice 8 : la courbe $\mathcal{C}_f$ et son asymptote oblique Δ.

Corrigé de l'exercice 9

Pour $x > 0$, $\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$, donc

$$f_n(x) = 1 + \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \qquad \text{et} \qquad \frac{f_n(x)}{x} = \frac{1}{x} + \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

Cas $n = 1$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1 + 1 = 2$ (et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = 0$). La droite $y = 2$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_1$ au voisinage de $+\infty$.

Cas $n = 2$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = 1$. On étudie alors $f_2(x) - x$:

$$f_2(x) - x = 1 + \frac{x\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}.$$

Pour $x > 0$, $0 < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} \leq \frac{x}{x\times x} = \frac{1}{x}$, donc cette fraction tend vers 0 et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f_2(x) - x) = 1$. La droite $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_2$ au voisinage de $+\infty$ (et $\mathcal{C}_2$ est en dessous de cette droite pour $x > 0$).

Cas $n \geq 3$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$ car $n - 2 \geq 1$. La courbe $\mathcal{C}_n$ admet une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

Corrigé de l'exercice 10

Continuité en dehors de 1 et −1. Sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$, f est le quotient de fonctions continues ($x \mapsto \sqrt{x^2+3}$ est continue comme composée, $x \mapsto |x|$ est continue) dont le dénominateur ne s'annule pas : f y est continue quels que soient m et p.

Limite en 1 et en −1. Pour $|x| \neq 1$, on multiplie par l'expression conjuguée, en remarquant que $|x|^2 = x^2$:

$$f(x) = \frac{m(x^2+3-4x^2)}{(x^2-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2|x|\right)} = \frac{-3m(x^2-1)}{(x^2-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2|x|\right)} = \frac{-3m}{\sqrt{x^2+3}+2|x|}.$$

Donc $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\frac{3m}{4}$.

Conditions. $f(1) = 3 + p$ et $f(-1) = -1 - p$. La fonction f est continue en 1 et en -1 si, et seulement si,

$$3 + p = -\frac{3m}{4} \qquad \text{et} \qquad -1 - p = -\frac{3m}{4}.$$

Par différence, $3 + p = -1 - p$, soit $p = -2$; alors $-\frac{3m}{4} = 1$, soit $m = -\frac{4}{3}$.

Conclusion. f est continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $m = -\frac{4}{3}$ et $p = -2$.

Corrigé de l'exercice 11

1. $f(0) = \sqrt{0} - 0 = 0$. Pour $x \in]-1,0[\cup]0,1[$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} = \frac{-x^2}{x\left(\sqrt{1-x^2} + 1\right)} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2} + 1}.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$: f est continue en 0, pour tout réel a.

2. *En 1.* $f(1) = -a$. À droite, pour $x \geq 1$, $f(x) = \sqrt{x^2 - x} - ax$, donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -a = f(1)$. À gauche, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{\sqrt{0}-1}{1} = -1$. Ainsi f est continue en 1 si, et seulement si, $a = 1$.

En -1. $f(-1) = \sqrt{1-1} + a = a$. À gauche, pour $x \leq -1$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - ax$, donc $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = a = f(-1)$. À droite, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \frac{0-1}{-1} = 1$. Ainsi f est continue en -1 si, et seulement si, $a = 1$.

3. Sur $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$, $x^2 - |x| > 0$ et f est continue (composée et somme de fonctions continues). Sur $]-1,0[$ et $]0,1[$, f est continue comme quotient de fonctions continues. D'après 1. et 2., f est continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $a = 1$.

Corrigé de l'exercice 12

1. $\sqrt{x^2+3}$ existe pour tout réel x. Posons $P(x) = x^3 - 7x^2 + x + 5$. On a $P(1) = 0$, donc $P(x) = (x-1)(x^2 - 6x - 5)$ (vérification : $x^3 - 6x^2 - 5x - x^2 + 6x + 5 = x^3 - 7x^2 + x + 5$). Le trinôme $x^2 - 6x - 5$ a pour discriminant $\Delta = 56$ et pour racines $3 - \sqrt{14}$ et $3 + \sqrt{14}$. Comme $f(1) = a$ est donné,

$$D_f = \mathbb{R}\backslash\left\{3 - \sqrt{14},\ 3 + \sqrt{14}\right\}.$$

2. Pour $x \in D_f$, $x \neq 1$:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3 - 4}{(x-1)(x^2 - 6x - 5)\left(\sqrt{x^2+3} + 2\right)} = \frac{x+1}{(x^2 - 6x - 5)\left(\sqrt{x^2+3} + 2\right)}.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{2}{(-10)\times 4} = -\frac{1}{20}$. La fonction f est continue en 1 si, et seulement si, $a = -\frac{1}{20}$.

Corrigé de l'exercice 13

1. $f(x)$ existe si, et seulement si, $x \geq 0$, $x - \sqrt{x} \geq 0$ et $x \neq 1$. Or $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right) \geq 0$ équivaut à $x = 0$ ou $\sqrt{x} \geq 1$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $x \geq 1$. Donc

$$D_f = \{0\} \cup]1,+\infty[.$$

2. Non. La fonction f est définie en 0 ($f(0) = -1$), mais elle n'est définie en aucun autre réel de l'intervalle $]-1,1[$: 0 est un point isolé de D_f. On ne peut donc pas faire tendre x vers 0 en restant dans $D_f\backslash\{0\}$, et la notion de limite en 0 n'a pas de sens pour f.

3. Sur $]1,+\infty[$, les fonctions $x \mapsto x-\sqrt{x}$ (positive) puis $x \mapsto \sqrt{x-\sqrt{x}}$ sont continues, et f est le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Compte tenu de la question 2, $D_c =]1,+\infty[$.

4. *Limite en* 1^+. Pour $x>1$, $x-\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right) = \frac{\sqrt{x}\,(x-1)}{\sqrt{x}+1}$, donc $\sqrt{x-\sqrt{x}} = \sqrt{x-1}\times k(x)$ avec $k(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}}$. Alors

$$f(x) = \frac{(x-1)-\sqrt{x-1}\,k(x)}{(x-1)^2} = \frac{\sqrt{x-1}-k(x)}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

Lorsque $x \to 1^+$: le numérateur tend vers $0-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ et le dénominateur tend vers 0 par valeurs positives. Donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$.

Limite en $+\infty$. Pour $x>1$, on factorise par x au numérateur et par x^2 au dénominateur :

$$f(x) = \frac{x\left(1-\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}}-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{x}\times\frac{1-\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}}-\frac{1}{x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}.$$

Le second facteur tend vers 1 et $\frac{1}{x}$ vers 0, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Corrigé de l'exercice 14

On utilise l'encadrement $t-1 < E(t) \leq t$, valable pour tout réel t.

a) Pour $x \neq 0$, $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|$ et $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$: la limite vaut 0.

b) Pour $x>0$, $E\left(\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x}-1$, donc $\sqrt{x}\,E\left(\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$. Or $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) = +\infty$: par comparaison, la limite vaut $+\infty$.

c) Notons $e(x) = E\left(\frac{1}{x}\right)$. Pour $0<x<1$, $e(x) \geq 1$; pour $x<0$, $e(x) \leq \frac{1}{x} < 0$. Dans les deux cas $e(x) \neq 0$, $e(x)+x \neq 0$ et l'on peut écrire

$$\frac{e(x)-x}{e(x)+x} = \frac{1-\frac{x}{e(x)}}{1+\frac{x}{e(x)}}.$$

De l'encadrement $\frac{1}{x}-1 < e(x) \leq \frac{1}{x}$, on déduit $\lim\limits_{x\to 0^+} e(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} e(x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e(x)} = 0$. La limite vaut 1.

d) Pour $x>0$: $\frac{x}{2010}-1 < E\left(\frac{x}{2010}\right) \leq \frac{x}{2010}$, d'où $\frac{1}{2010}-\frac{1}{x} < \frac{E\left(\frac{x}{2010}\right)}{x} \leq \frac{1}{2010}$. Par encadrement, la limite vaut $\frac{1}{2010}$.

e) Pour $x>1$: $x^2-x+3 < xE(x)+3 \leq x^2+3$ et $x^2+\sin x > 0$. Donc

$$\frac{x^2-x+3}{x^2+\sin x} < \frac{xE(x)+3}{x^2+\sin x} \leq \frac{x^2+3}{x^2+\sin x}.$$

Comme $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^2} = 0$; en divisant numérateurs et dénominateurs par x^2, on voit que les deux fonctions encadrantes tendent vers 1. La limite vaut 1.

f) Pour $x > 1$: $x + \sin x \geq x - 1 > 0$ et $0 < 2 - \sin x \leq 3$, donc $\frac{x+\sin x}{2-\sin} \geq \frac{x-1}{3}$. Par comparaison, la limite vaut $+\infty$.

g) Pour $x > 1$: $\frac{(x+1)\sin x}{x^2-1} = \frac{\sin x}{x-1}$ et $\left|\frac{\sin x}{x-1}\right| \leq \frac{1}{x-1}$. La limite vaut 0.

h) $x\left(\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = x\sin\frac{1}{x} - \frac{x}{\sin x}$. D'après a), le premier terme tend vers 0 ; le second tend vers 1. La limite vaut -1.

i) Pour $x > 0$: $2\cos^2\frac{1}{x} \geq 0$ et $-\sin\frac{1}{x} \geq -1$, donc le numérateur est supérieur ou égal à 2. Comme $x + \sqrt{x} > 0$, le quotient est supérieur ou égal à $\frac{2}{x+\sqrt{x}}$, qui tend vers $+\infty$ en 0^+. La limite vaut $+\infty$.

Corrigé de l'exercice 15

1. Faux. Contre-exemple : pour $x \neq a$, $g(x) = \frac{1}{|x-a|}$ et $f(x) = g(x) + 1$. On a bien $f > g$, $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g = +\infty$, mais $f(x) - g(x) = 1$ a pour limite 1.

2. Faux. Contre-exemple : pour $x \neq a$, $f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$ et $g(x) = -(x-a)^2$. On a $g(x) < 0$, $\lim\limits_a f = +\infty$, mais $f(x)g(x) = -1$ a pour limite -1. (Le produit est une forme indéterminée dès que g tend vers 0.)

3. Faux. Contre-exemple : $f(x) = x - a$. On a $\lim\limits_a f = 0$, mais $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$: la fonction $\frac{1}{f}$ n'a pas de limite en a. (L'affirmation devient vraie si f garde un signe constant au voisinage de a.)

Corrigé de l'exercice 16

1. Pour $x \neq 0$, en utilisant $\sin 2x = 2\sin x\cos x$:

$$f(2x) = \frac{2\sin x\cos x - 2x}{8x^3} = \frac{2\sin x(\cos x - 1) + 2(\sin x - x)}{8x^3} = -\frac{1}{4} \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{1-\cos x}{x^2} + \frac{1}{4}f(x).$$

Lorsque $x \to 0$, $2x \to 0$ donc $f(2x) \to \ell$ (composition) ; par ailleurs le membre de droite tend vers $-\frac{1}{4} \times 1 \times \frac{1}{2} + \frac{\ell}{4}$. Par unicité de la limite :

$$\ell = -\frac{1}{8} + \frac{\ell}{4}, \qquad \text{d'où} \qquad \ell = -\frac{1}{6}.$$

2. • Pour x voisin de 0, $x \neq 0$: $\tan x - x = \frac{\sin x - x\cos}{\cos x} = \frac{(\sin x - x) + x(1-\cos x)}{\cos x}$. Donc

$$\frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{\cos x}\left(f(x) + \frac{1-\cos x}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{\to} -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

• On a $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$. Posons $t = \frac{x}{2}$, de sorte que $x^2 = 4t^2$ et $x^4 = 16t^4$:

$$\frac{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{2\sin^2 t - 2t^2}{16t^4} = \frac{1}{8} \times \frac{\sin t - t}{t^3} \times \frac{\sin t + t}{t} = \frac{1}{8}f(t)\left(\frac{\sin t}{t} + 1\right).$$

Lorsque $x \to 0$, $t \to 0$ et la limite vaut $\frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{6}\right) \times 2 = -\frac{1}{24}$.

Corrigé de l'exercice 17

Notons $N(x) = 16\sqrt{x - \sqrt{x}} - \sqrt{2}(3x + 4)$. On a $N(4) = 16\sqrt{2} - 16\sqrt{2} = 0$: forme « $\frac{0}{0}$ ».

Étape 1 : expression conjuguée. Pour $x > 1$,

$$N(x)=\frac{256\left(x-\sqrt{x}\right)-2(3x+4)^2}{16\sqrt{x-\sqrt{x}}+\sqrt{2}(3x+4)}=\frac{-18x^2+208x-256\sqrt{x}-32}{16\sqrt{x-\sqrt{x}}+\sqrt{2}(3x+4)}.$$

Étape 2 : changement de variable. Posons $t=\sqrt{x}$ $(t\to 2)$. Le numérateur devient $P(t)=-18t^4+208t^2-256t-32$. On vérifie que $P(2)=0$ et $P'(2)=0$ où $P'(t)=-72t^3+416t-256$: 2 est racine double de P, et la division par $(t-2)^2$ donne

$$P(t)=-2(t-2)^2(9t^2+36t+4).$$

D'autre part $(x-4)^2=(t-2)^2(t+2)^2$.

Étape 3 : simplification et limite. Pour $x\neq 4$ voisin de 4 :

$$\frac{N(x)}{16(x-4)^2}=\frac{-2(9t^2+36t+4)}{16(t+2)^2\left(16\sqrt{x-\sqrt{x}}+\sqrt{2}(3x+4)\right)}.$$

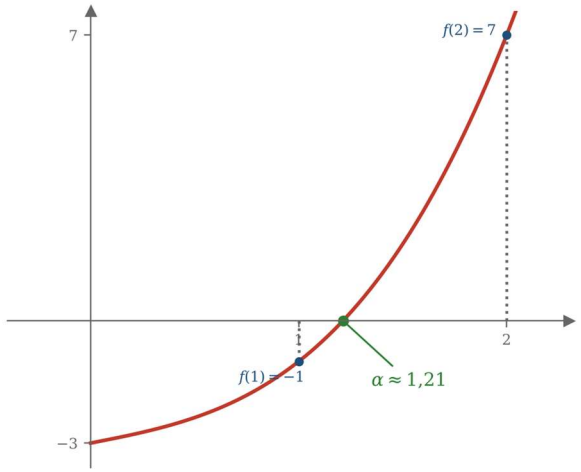
Lorsque $x\to 4$: $9t^2+36t+4\to 112$, $(t+2)^2\to 16$ et $16\sqrt{x-\sqrt{x}}+\sqrt{2}(3x+4)\to 32\sqrt{2}$. Donc

$$\lim_{x\to 4}\frac{16\sqrt{x-\sqrt{x}}-3\sqrt{2}\,x-4\sqrt{2}}{16(x-4)^2}=\frac{-224}{16\times 16\times 32\sqrt{2}}=-\frac{7}{256\sqrt{2}}=-\frac{7\sqrt{2}}{512}.$$

Corrigé de l'exercice 18

1. Soit $f(x)=x^3+x-3$. La fonction f est continue sur $[1,2]$ (polynôme) et strictement croissante sur $[1,2]$ car $f'(x)=3x^2+1>0$. De plus $f(1)=-1$ et $f(2)=7$: le réel 0 est compris entre $f(1)$ et $f(2)$. Donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1,2]$; comme $f(1)\neq 0$ et $f(2)\neq 0$, $\alpha\in\,]1,2[$.

2. Par balayage : $f(1{,}2)=1{,}728+1{,}2-3=-0{,}072<0$ et $f(1{,}3)=2{,}197+1{,}3-3=0{,}497>0$. Comme f est strictement croissante, $1{,}2<\alpha<1{,}3$. Une valeur approchée par défaut de α à 10^{-1} près est 1,2.



Exercice 18 : la courbe de f coupe l'axe des abscisses en un seul point de $]1,2[$.

Corrigé de l'exercice 19

Posons $P(x)=x^4+x^3-x+1$ et montrons que $P(x)>0$ pour tout réel x, en distinguant quatre cas.

• Si $x\geq 1$: $P(x)=x^4+x(x^2-1)+1$ avec $x(x^2-1)\geq 0$, donc $P(x)\geq 1>0$.

• Si $0\leq x<1$: $P(x)=x^4+x^3+(1-x)$ avec $x^4+x^3\geq 0$ et $1-x>0$, donc $P(x)>0$.

• Si $-1 < x < 0$: $P(x) = x^4 + (x^3 + 1) + (-x)$ où les trois termes sont strictement positifs, donc $P(x) > 0$.

• Si $x \leq -1$: $P(x) = x^3(x + 1) + (1 - x)$ avec $x^3 < 0$ et $x + 1 \leq 0$, donc $x^3(x + 1) \geq 0$, et $1 - x > 0$; donc $P(x) > 0$.

Dans tous les cas $P(x) > 0$: l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 20

1. Soit $P(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 7$. P est continue sur $\mathbb{R}$, $P(-1) = -3 < 0$ et $P(0) = 7 > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]-1,0[$.

2. Soit P un polynôme de degré impair n, de coefficient dominant $a_n \neq 0$. Quitte à remplacer P par $-P$ (ce qui ne change pas l'équation), on peut supposer $a_n > 0$. La limite de P à l'infini est celle de $a_n x^n$; comme n est impair,

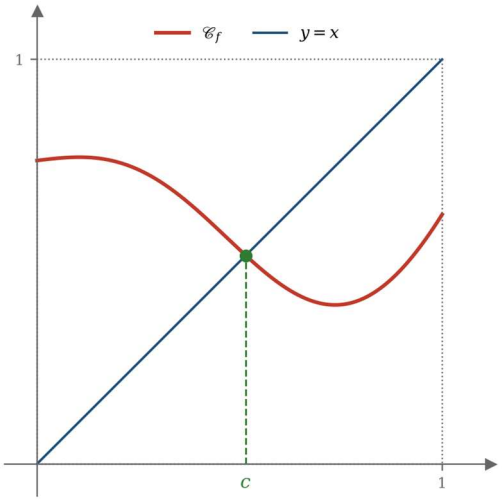
$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty.$$

Il existe donc un réel a tel que $P(a) < 0$ et un réel $b > a$ tel que $P(b) > 0$. La fonction P étant continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que l'équation $P(x) = 0$ possède au moins une solution dans $]a, b[$.

3. Si le degré est pair, on ne peut rien affirmer : l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a aucune solution réelle, alors que l'équation $x^2 - 1 = 0$ en a deux. (Les limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont alors de même signe.)

Corrigé de l'exercice 21

1. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f(x) - x$. Elle est continue sur $[0,1]$ comme différence de fonctions continues. Comme f prend ses valeurs dans $[0,1]$: $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Le réel 0 est compris entre $g(1)$ et $g(0)$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.



Exercice 21 : la courbe d'une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$ coupe la droite $y = x$.

2. Même démonstration avec $g(x) = f(x) - x$ sur $[a, b]$: $f(a) \in [a, b]$ donne $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $f(b) \in [a, b]$ donne $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Il existe donc $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

3. Posons $k = \frac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta}$. Supposons par exemple $f(a) \leq f(b)$ (l'autre cas est analogue). Comme $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

$$k - f(a) = \frac{\beta\big(f(b) - f(a)\big)}{\alpha + \beta} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad f(b) - k = \frac{\alpha\big(f(b) - f(a)\big)}{\alpha + \beta} \geq 0.$$

Ainsi k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. La fonction f étant continue sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$, soit $\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(c)$.

Corrigé de l'exercice 22

Continuité de f. Soit $x_0 \in [a, b]$. Pour tout $x \in [a, b]$, $0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0|$ et $\lim\limits_{x \to x_0} k|x - x_0| = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$: f est continue sur $[a, b]$.

Existence. f est continue sur $[a, b]$ et à valeurs dans $[a, b]$: d'après l'exercice 21 (question 2), il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Unicité. Supposons qu'il existe deux réels distincts c et c' de $[a, b]$ tels que $f(c) = c$ et $f(c') = c'$. Alors

$$|c - c'| = |f(c) - f(c')| < k|c - c'|,$$

et, en divisant par $|c - c'| > 0$, on obtient $1 < k$, ce qui contredit $k < 1$. La solution est donc unique.

Corrigé de l'exercice 23

Analyse. Soit f une solution et x un réel. En appliquant la relation à $\frac{x}{2}$, on a $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$, puis, par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ et f est continue en 0, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$. La suite de terme général $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ étant constante égale à $f(x)$, on obtient $f(x) = f(0)$: f est constante.

Synthèse. Réciproquement, toute fonction constante est continue en 0 et vérifie $f(2x) = f(x)$.

Conclusion. Les solutions sont les fonctions constantes.

Corrigé de l'exercice 24

Analyse. Soit f une solution. En remplaçant x par $\frac{x}{2}$: $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \times \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}. \qquad (1)$$

Calcul du produit. Notons $P_n(x) = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$. La formule $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ appliquée n fois donne

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} = \cdots = 2^n \sin\frac{x}{2^n}\, P_n(x).$$

Soit $x \neq 0$. Pour n assez grand, $0 < \left|\frac{x}{2^n}\right| < \pi$, donc $\sin\frac{x}{2^n} \neq 0$ et

$$P_n(x) = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}.$$

Comme $\frac{x}{2^n} \to 0$ et $\lim\limits_{u \to 0} \frac{u}{\sin u} = 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Passage à la limite dans (1). f étant continue en 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$. Le membre de gauche de (1) ne dépend pas de n ; donc, pour tout $x \neq 0$,

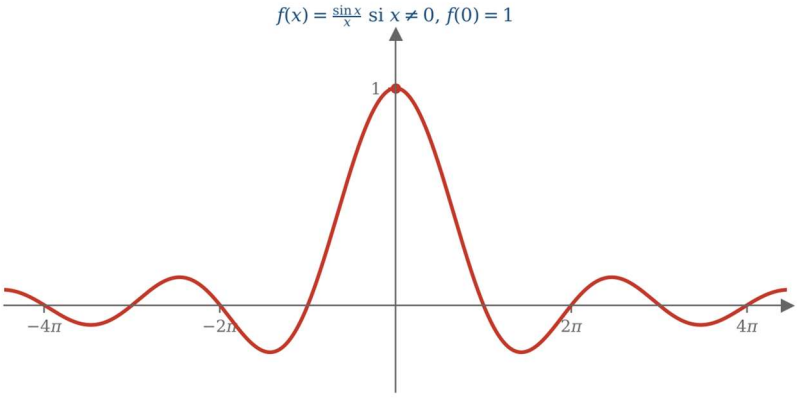
$$f(x) = f(0)\,\frac{\sin x}{x}.$$

Synthèse. Soit c un réel et f la fonction définie par $f(x) = c\,\frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = c$.

• $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = c = f(0)$: f est continue en 0.

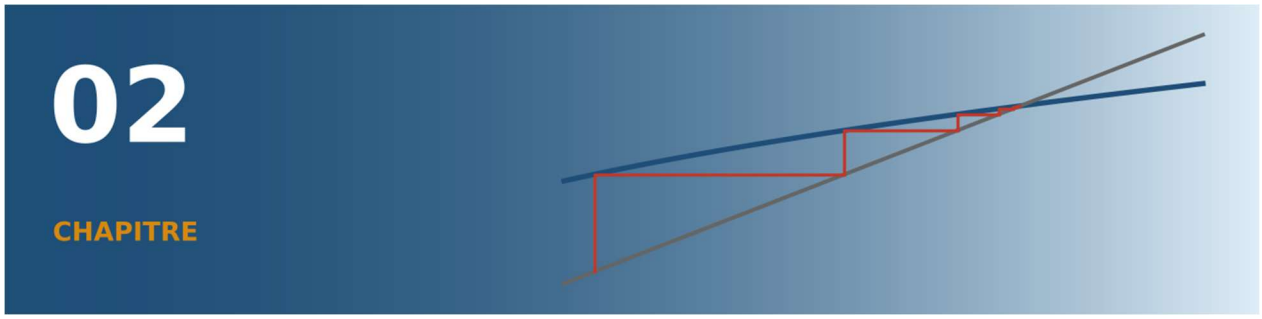
• Pour $x \neq 0$: $f(2x) = c\,\frac{\sin 2x}{2x} = c\,\frac{\sin x \cos x}{x} = f(x)\cos x$. Pour $x = 0$: $f(0) = f(0)\cos 0$. La relation est vérifiée pour tout réel x.

Conclusion. Les solutions sont les fonctions f_c ($c \in \mathbb{R}$) définies par $f_c(x) = c\,\frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f_c(0) = c$.



Exercice 24 : la solution correspondant à $c = 1$.

Chapitre 2 — Suites réelles



Cours • 23 exercices • Corrigés détaillés

Ce que vous devez savoir faire à la fin du chapitre
– Conduire un raisonnement par récurrence.
– Étudier la monotonie d'une suite, montrer qu'elle est majorée, minorée ou bornée.
– Calculer la limite d'une suite à l'aide des opérations, des suites géométriques, de la comparaison ou de l'encadrement.
– Établir la convergence d'une suite monotone et déterminer sa limite, en particulier pour une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$.
– Exploiter une inégalité du type $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$.
– Reconnaître et utiliser deux suites adjacentes.

Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 1, chapitre 2).

Cours

I. Rappels

1. Suites arithmétiques, suites géométriques

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$v_{n+1} = q\,v_n$
Terme général	$u_n = u_0 + nr$	$v_n = v_0\,q^n$
Entre deux rangs	$u_n = u_p + (n-p)r$	$v_n = v_p\,q^{n-p}$
Somme	$\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$	$\displaystyle\sum_{k=p}^{n} v_k = v_p\,\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$

En particulier : $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ et, pour $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

2. Monotonie, suites bornées

Définitions. Une suite (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n, **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n.
Elle est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout n, **minorée** s'il existe un réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout n, **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Méthode — étudier la monotonie.
– Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
– Si $u_n > 0$ pour tout n : comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
– Si $u_n = f(n)$: étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.
– Si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f **croissante** sur un intervalle I contenant tous les termes : $u_{n+1} - u_n$ a le signe de $u_1 - u_0$ (récurrence).

3. Le raisonnement par récurrence

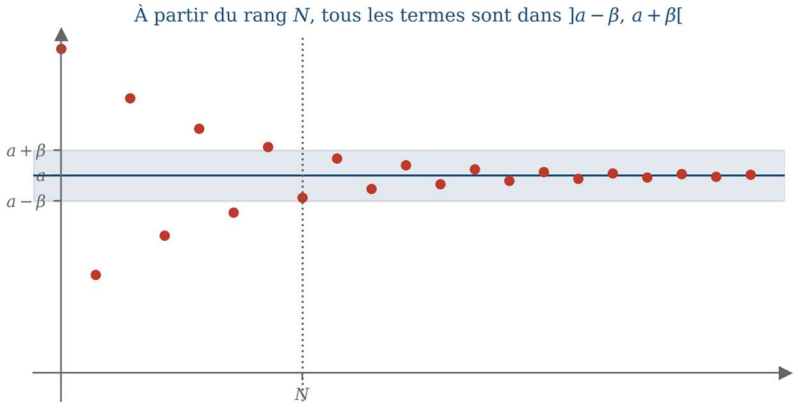
Principe. Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

1. **Initialisation** : vérifier que $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité** : soit $n \geq n_0$; on suppose $P(n)$ vraie et l'on démontre que $P(n+1)$ est vraie.
3. **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

II. Limite d'une suite

1. Définitions et premières propriétés

Définition. Une suite (u_n) **converge** vers un réel a si, pour tout réel $\beta > 0$, il existe un entier N tel que $|u_n - a| < \beta$ dès que $n \geq N$. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$. Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.
La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si, pour tout réel $A > 0$, il existe un entier N tel que $u_n > A$ dès que $n \geq N$.



Suite convergente vers a.

Théorème. Soit (u_n) une suite réelle et a fini ou infini.
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \quad \text{si, et seulement si,} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = a \ \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = a.$$

Théorème. Toute suite convergente est bornée.

Attention. La réciproque est fausse : la suite $((-1)^n)$ est bornée et divergente, puisque $u_{2n} \to 1$ et $u_{2n+1} \to -1$.

2. Limites et ordre

Théorème. Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers les réels a et b.
– S'il existe un entier N tel que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq N$, alors $a \geq 0$.

– S'il existe un entier N tel que $m \leq u_n \leq M$ pour tout $n \geq N$, alors $m \leq a \leq M$.
– S'il existe un entier N tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq N$, alors $a \leq b$.

Attention. Le passage à la limite transforme les inégalités strictes en inégalités larges : $\frac{1}{n} > 0$ pour tout $n \geq 1$, mais la limite est 0.

3. Suites géométriques

Théorème. Soit q un réel.
– Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
– Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
– Si $q = 1$, la suite (q^n) est constante égale à 1.
– Si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.

4. Image d'une suite par une fonction

Théorème. Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I et (u_n) une suite d'éléments de I. Si (u_n) converge vers un réel a de I, alors la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(a)$.
Théorème. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = L$ (ℓ et L finis ou infinis), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

Exemple. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$, car $\frac{1}{n} \to 0$ et $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

III. Comparaison et encadrement

Théorème d'encadrement. Soit (u_n), (v_n), (w_n) trois suites et a un réel. S'il existe un entier N tel que $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour tout $n \geq N$, et si $\lim v_n = \lim w_n = a$, alors $\lim u_n = a$.
Corollaire. S'il existe un entier N tel que $|u_n - a| \leq v_n$ pour tout $n \geq N$ et si $\lim v_n = 0$, alors $\lim u_n = a$.
Théorème de comparaison. On suppose qu'il existe un entier N tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq N$.
– Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.
– Si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.

Méthode — inégalité de contraction. Si l'on a établi, pour tout n, $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$ avec $0 < k < 1$, alors, par récurrence,

$$|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|,$$

et comme $\lim k^n = 0$, la suite (u_n) converge vers ℓ.

IV. Suites monotones

Théorème (admis).
– Toute suite croissante et majorée converge vers un réel a, et $u_n \leq a$ pour tout n.
– Toute suite décroissante et minorée converge vers un réel b, et $u_n \geq b$ pour tout n.
Théorème.
– Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
– Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Attention. Un majorant n'est pas la limite : le théorème assure l'existence de la limite, pas sa valeur. Pour la déterminer, on utilise par exemple le théorème du paragraphe suivant.

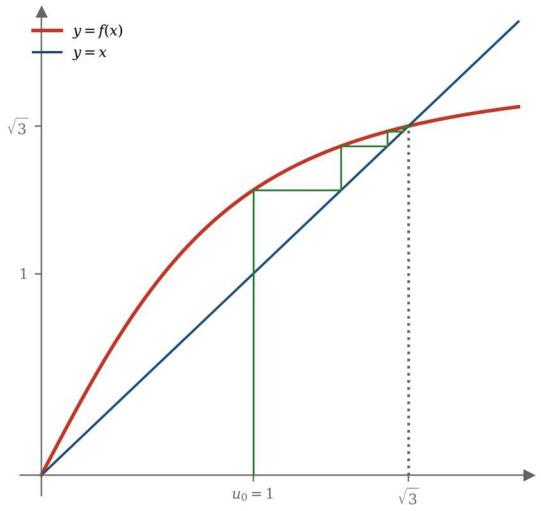
V. Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Théorème. Soit (u_n) une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n. Si (u_n) converge vers un réel a et si f est continue en a, alors $f(a) = a$.

Méthode — plan d'étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Trouver un intervalle I **stable** par f ($f(I) \subset I$) contenant u_0 : alors $u_n \in I$ pour tout n (récurrence).
2. Étudier la monotonie (signe de $f(x) - x$ sur I, ou croissance de f sur I).
3. Conclure à la convergence (suite monotone et bornée).
4. Résoudre $f(x) = x$ dans I et sélectionner la limite à l'aide des inégalités vérifiées par (u_n).

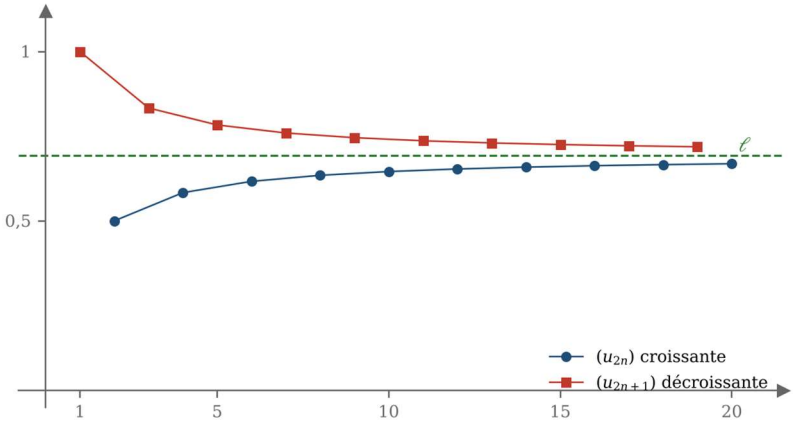
Si f est décroissante, la suite n'est pas monotone : on étudie (u_{2n}) et (u_{2n+1}), ou l'on cherche une inégalité de contraction.



Construction des termes d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$: cas f croissante (« escalier », exercice 13).

VI. Suites adjacentes

Définition et théorème. Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** lorsque :
– pour tout n, $u_n \leq v_n$;
– (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;
– la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.
Dans ce cas, (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ, et $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout n.



Deux suites adjacentes (exercice 19).

Exercices

Exercices 1 à 4 : récurrence, calcul du terme général et premières limites. Exercices 5 à 13 : suites récurrentes. Exercices 14 à 21 : suites couplées et suites adjacentes. Exercices 22 et 23 : synthèse.

Exercice 1

On considère l'écriture $\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ comportant n radicaux ; on la note a_n : $a_1=\sqrt{2}$ et $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$. On pose $a_0=0$.

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}a_n$ et $\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-a_{n-1}}$.
2. En déduire que $\pi=\lim\limits_{n\to+\infty}2^n\sqrt{2-a_{n-1}}$, c'est-à-dire $\pi=\lim\limits_{n\to+\infty}2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$ (n radicaux).

Exercice 2

Soit $\alpha\in[-1,1]$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=\alpha$.

1. Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{2}{\pi}\times\frac{1}{4n+1}$ et $v_n=\frac{2}{\pi}\times\frac{1}{4n-1}$. Calculer $f(u_n)$ et $f(v_n)$.
2. Existe-t-il une valeur de α pour laquelle f est continue en 0 ?

Exercice 3

Exprimer u_n en fonction de n dans chacun des cas suivants.

1. $u_0=2$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+n$.
2. $u_0=3$, $u_1=2$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$.
3. $u_0=3$, $u_1=2$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=2u_n-u_{n+1}$.
4. $u_0=\frac{2}{5}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $3(n+1)u_n=2(n+2)u_{n-1}$.

Exercice 4

1. Soit x un réel tel que $0<x\leq 1$. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$: $(1+x)^k\leq 1+2^kx$.

2. Soit (x_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $x_n = \frac{n^3}{3^n}$.

   a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$.

   b) En déduire que, pour tout $n \geq 16$: $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{2}$.

   c) Montrer que, pour tout $n \geq 16$: $x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-16} x_{16}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Exercice 5

Soit a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$ et (u_n) la suite définie par $u_1 = a + b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n}$.

1. On suppose que $a < b$.

   a) Montrer que (u_n) est minorée par b.

   b) Étudier la monotonie de (u_n) ; en déduire qu'elle est convergente.

2. On suppose toujours $a < b$. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n - b}{u_n - a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

   b) En déduire u_n en fonction de n, a et b.

   c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3. On suppose que $a = b$.

   a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 en fonction de a.

   b) Exprimer u_n en fonction de n et a, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 6

Soit p un réel tel que $p > 1$ et f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{p + (p-1)x}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.

   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq p$.

   b) Étudier la monotonie de (u_n).

   c) En déduire que (u_n) est convergente.

2.

   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - p| \leq \frac{p-1}{p}|u_n - p|$.

   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - p| \leq p\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 9}{2u_n}$.

1. Montrer que $u_{n+1} - 3$ et $u_n - 3$ sont de signes contraires.

2. En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_{2p} \leq 3 \leq u_{2p+1}$.

3. En déduire que si (u_n) est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.
4. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq 2$.
5.
   a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$: $|u_n - 3| \leq \frac{3}{4}|u_{n-1} - 3|$.
   b) En déduire que, pour tout $n \geq 2$: $|u_n - 3| \leq 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.
   c) Montrer que (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 8

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n}$ et $v_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 3$ et $0 \leq v_n \leq 3$.
2. Soit (a_n) et (b_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $a_n = u_n - 1$ et $b_n = v_n - 2$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|a_{n+1}| \leq |b_n|$ et $|b_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_n|$.
   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|a_{n+2}| \leq \frac{1}{2}|a_n|$ et $|b_{n+2}| \leq \frac{1}{2}|b_n|$.
   c) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $|a_{2p}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^p$ et $|b_{2p}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}$.
   d) Étudier alors la convergence des suites (u_{2p}) et (v_{2p}), puis celle de (u_n) et (v_n).

Exercice 9

1. Montrer que, pour tout réel positif x : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n : $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
3. Soit x un réel positif fixé et $(u_n(x))$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{kx}{n^2}$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{(n+1)x}{2n} - \frac{(n+1)^2x^3}{24n^4} \leq u_n(x) \leq \frac{(n+1)x}{2n}$.
   b) En déduire que $(u_n(x))$ est convergente et calculer sa limite.
4. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \sum_{k=1}^{n} \sin^3\frac{k}{n^2}$.
   a) Montrer que, pour tout réel x : $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$.
   b) En déduire que $v_n = \frac{3}{4}u_n(1) - \frac{1}{4}u_n(3)$.
   c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 10

1. Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 5x - 1$.
2. En déduire que l'équation $x^3 - 5x - 1 = 0$ possède trois solutions a, b, c avec $a < b < c$. Donner des valeurs approchées par défaut de a, b, c à 10^{-1} près.
3. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n^3 - 1)$.

a) Montrer que la suite (u_n) est monotone.

b) Si la suite (u_n) est convergente, quelles sont les valeurs possibles de sa limite ?

c) Étudier la suite (u_n) dans les trois cas particuliers : $u_0 = -3$; $u_0 = 0$; $u_0 = 3$.

Exercice 11

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$.

   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < 1$.

   b) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2. Soit (v_n) la suite de terme général $v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$.

   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = v_n^2$.

   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{3^{2^n}}$.

   c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et l'expression de u_n.

   d) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = v_0 v_1 \cdots v_n$. Calculer p_n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{p_n}{v_{n+1}}$.

3. Soit (s_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 < 1 - u_n < \frac{1}{1+u_0^2}(1 - u_{n-1})$.

   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < 1 - u_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

   c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 - \frac{5}{n}\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right] \leq s_n \leq 1$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.

Exercice 12

Soit a un réel strictement positif et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

1. Pour quelle valeur de u_0 la suite (u_n) est-elle constante ?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$.
3. On suppose dans la suite que $u_0^2 \neq a$.

   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2$.

   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n + \sqrt{a}\right)^2$.

   c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \neq \sqrt{a}$.

   d) Montrer que si (u_n) est convergente, elle converge nécessairement vers $\sqrt{a}$.

   e) Montrer que (u_n) est strictement décroissante à partir du rang 1, qu'elle converge, et déterminer sa limite.

4. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.

   a) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n.

   b) En déduire v_n en fonction de n et v_0.

c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5. On suppose que $u_0 = \frac{3}{2}\sqrt{a}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > \sqrt{a}$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{a})$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n - \sqrt{a} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \sqrt{a}$.

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 13

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

a) Étudier les variations de f.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

c) Montrer que si $1 \leq x \leq \sqrt{3}$, alors $1 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.

b) Étudier la monotonie de (u_n).

c) Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2}$.

a) Montrer que (v_n) est bien définie et que c'est une suite géométrique.

b) En déduire l'expression de u_n.

c) Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n \leq s_n \leq 3n$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{s_n}{n^2}$.

5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $r_n = \frac{s_n}{n}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $ns_{n+1} - (n+1)s_n = nu_n^2 - s_n$.

b) En déduire que (r_n) est croissante.

c) Montrer que (r_n) est convergente ; on note ℓ sa limite.

6. Soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que $n > p$.

a) Montrer que : $(n-p)u_p^2 \leq s_n \leq nu_{n-1}^2$.

b) En déduire que : $\frac{n-p}{n} u_p^2 \leq r_n \leq u_{n-1}^2$.

c) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $u_p^2 \leq \ell \leq 3$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 14

On se donne deux réels a et b tels que $0 \leq b \leq a$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}.$$

1. Établir une relation entre $u_{n+1} - v_{n+1}$ et $u_n - v_n$.
2. En déduire l'expression de $u_n - v_n$ en fonction de n, a et b.
3. En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n, n, a et b.
4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune que l'on déterminera.

Exercice 15

On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}\right).$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq v_n$ et $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$.
2. Montrer que, à partir du rang 1, (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.
4. Montrer que la suite $(u_n v_n)$ est constante et en déduire la limite commune.

Exercice 16

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \sqrt{v_n \, \frac{u_n + v_n}{2}}.$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite $\ell > 0$.
2. On suppose que $a = b\cos\varphi$ avec $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Exprimer ℓ en fonction de b et φ.

Exercice 17

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sqrt{n}\,\frac{C_{2n}^n}{4^n}$.

1. Calculer u_1 et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
2. Prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$.
3. Montrer qu'il existe $\ell \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
4. Montrer que, pour tout $x > 0$: $\frac{1}{4(2x+1)} \leq \left(x + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{x(x+1)} \leq \frac{1}{8\sqrt{x(x+1)}}$.
5. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{u_k}{8\left(k+\frac{1}{2}\right)} - \frac{u_k}{8\left(k+\frac{3}{2}\right)} \leq u_{k+1} - u_k \leq \frac{u_k}{8k} - \frac{u_k}{8(k+1)}$.
6. Encadrer $u_p - u_n$ (pour $p > n$), puis établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{u_n}{4(2n+1)} \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{8n}$.

7. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\ell - \left(1+\frac{1}{8n}\right)u_n\right| \leq \frac{\ell}{16^{\,2}}$.
8. Comment suffit-il de choisir n pour que $\left(1+\frac{1}{8n}\right)u_n$ soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} près ?

Exercice 18

Prouver que la suite de terme général $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est croissante sur $\mathbb{N}^*$.

Exercice 19

On considère la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $n \geq 1$.

1. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\geq 1}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

Exercice 20

On considère la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

Exercice 21

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$, et les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n v_n (u_n + v_n)}{u_n^2 + v_n^2} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n > u_n$.
2. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.
3. En déduire que les deux suites sont adjacentes.
4. Montrer que la suite (w_n) de terme général $w_n = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$ est constante.
5. En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n) en fonction de a et b.

Exercice 22

1. Pour tout entier naturel n, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$. Calculer F_0, F_1, F_2, F_3.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F_0 \times F_1 \times \ldots \times F_n = F_{n+1} - 2$.
3. Montrer que la suite (F_n) est croissante et non majorée. Quelle est sa limite ?

Exercice 23

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant. Soit ℓ, k et x des réels tels que $0 < k < 1$ et $0 < x < 1$; (u_n) et (v_n) sont des suites réelles.

1. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$, alors (u_n) est convergente.
2. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$, alors la suite (s_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $s_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} u_j$ est convergente.

3. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+2} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$, alors (u_n) est convergente.
4. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k|u_{n+1} - u_n|$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.
5. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell| + x^n$, alors (u_n) est convergente.
6. Si (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors $(u_n - v_n)$ est décroissante.
7. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
8. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Corrigés détaillés

Corrigé de l'exercice 1

1. *Cosinus.* Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

• Pour $n = 1$: $2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} = a_1$.

• Soit $n \geq 1$ tel que $a_n = 2\cos\theta$ avec $\theta = \frac{\pi}{2^{n+1}}$. Comme $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$,

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + 2\cos\theta} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}},$$

car $\frac{\theta}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et son cosinus est positif. La propriété est héréditaire, donc vraie pour tout $n \geq 1$.

Sinus. La relation $a_{n-1} = 2\cos\frac{\pi}{2^n}$ est vraie pour $n \geq 2$ d'après ce qui précède, et aussi pour $n = 1$ puisque $a_0 = 0 = 2\cos\frac{\pi}{2}$. Comme $1 - \cos 2t = 2\sin^2 t$:

$$2 - a_{n-1} = 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{2^n}\right) = 4\sin^2\frac{\pi}{2^{n+1}}, \qquad \text{d'où} \qquad \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - a_{n-1}},$$

le sinus étant positif.

2. D'après 1., $2^n\sqrt{2 - a_{n-1}} = 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} = \pi \times \frac{\sin t_n}{t_n}$ avec $t_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}$. Or $\lim t_n = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n\sqrt{2 - a_{n-1}} = \pi$.

Remarque. $2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ est le demi-périmètre du polygone régulier à 2^{n+1} côtés inscrit dans le cercle de rayon 1 : c'est la méthode d'Archimède.

Corrigé de l'exercice 2

1. $\frac{1}{u_n} = (4n + 1)\frac{\pi}{2} = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, donc $f(u_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

$\frac{1}{v_n} = (4n - 1)\frac{\pi}{2} = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$, donc $f(v_n) = \sin\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1$.

2. Supposons f continue en 0. Les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0, donc $\big(f(u_n)\big)$ et $\big(f(v_n)\big)$ convergent vers $f(0) = \alpha$. Or ces suites sont constantes égales à 1 et à -1 : on aurait $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$, ce qui est absurde. **Aucune valeur de α ne rend f continue en 0.**

Corrigé de l'exercice 3

1. Pour tout k, $u_{k+1} - u_k = k$. En additionnant ces égalités pour $k = 0, \dots, n-1$ (somme télescopique) :

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad \text{donc} \qquad u_n = 2 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

2. Posons $w_n = u_{n+1} - u_n$. Alors $w_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 2u_{n+1} - 2u_n = 2w_n$: (w_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $w_0 = -1$, donc $w_n = -2^n$. Par somme télescopique,

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} w_k = 3 - (2^n - 1) = 4 - 2^n.$$

3. Posons encore $w_n = u_{n+1} - u_n$. Alors $w_{n+1} = 2u_n - 2u_{n+1} = -2w_n$: (w_n) est géométrique de raison -2, $w_0 = -1$, donc $w_n = -(-2)^n$ et

$$u_n = 3 - \sum_{k=0}^{n-1} (-2)^k = 3 - \frac{1 - (-2)^n}{3} = \frac{8 + (-2)^n}{3}.$$

4. Pour $n \geq 1$, la relation s'écrit $\frac{u_n}{n+2} = \frac{2}{3} \times \frac{u_{n-1}}{n+1}$. La suite (t_n) définie par $t_n = \frac{u_n}{n+2}$ est donc géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $t_0 = \frac{u_0}{2} = \frac{1}{5}$. Ainsi

$$u_n = \frac{n+2}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Corrigé de l'exercice 4

1. Montrons par récurrence la propriété plus forte $P(k) : (1+x)^k \leq 1 + \left(2^k - 1\right)x$.

• $P(0) : 1 \leq 1$, vrai.

• Supposons $P(k)$. Comme $1 + x > 0$:

$$(1+x)^{k+1} \leq \left(1 + \left(2^k - 1\right)x\right)(1+x) = 1 + 2^k x + \left(2^k - 1\right)x^2.$$

Or $0 < x \leq 1$ donne $x^2 \leq x$, d'où $(1+x)^{k+1} \leq 1 + 2^k x + \left(2^k - 1\right)x = 1 + \left(2^{k+1} - 1\right)x$: $P(k+1)$ est vraie.

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(1+x)^k \leq 1 + \left(2^k - 1\right)x \leq 1 + 2^k x$.

2. a) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$.

b) Pour $n \geq 16$, $0 < \frac{1}{n} \leq 1$; d'après 1. avec $k = 3$: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \leq 1 + \frac{8}{n} \leq 1 + \frac{8}{16} = \frac{3}{2}$. Donc $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

c) Par récurrence sur $n \geq 16$. Pour $n = 16$: $x_{16} \leq x_{16}$. Si $x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-16} x_{16}$, alors, comme $x_n > 0$, $x_{n+1} \leq \frac{1}{2}x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-16} x_{16}$.

Ainsi $0 < x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-16} x_{16}$ pour $n \geq 16$ et $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n-16} = 0$: par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$.

Corrigé de l'exercice 5

1. a) Montrons par récurrence que $u_n > b$ pour tout $n \geq 1$ (ce qui prouve aussi que $u_n \neq 0$, donc que la suite est bien définie). $u_1 = a + b > b$. Si $u_n > b > 0$, alors $\frac{ab}{u_n} < a$ et $u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n} > b$.

b) Pour tout $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + (a+b)u_n - ab}{u_n} = -\frac{(u_n - a)(u_n - b)}{u_n}.$$

Comme $u_n > b > a > 0$, on a $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite est strictement décroissante. Étant décroissante et minorée par b, elle est convergente.

2. a) $u_n > b > a$ donc v_n est bien défini. On calcule

$$u_{n+1} - b = a - \frac{ab}{u_n} = \frac{a(u_n - b)}{u_n}, \qquad u_{n+1} - a = b - \frac{ab}{u_n} = \frac{b(u_n - a)}{u_n},$$

d'où $v_{n+1} = \frac{a}{b} v_n$: (v_n) est géométrique de raison $\frac{a}{b}$ et de premier terme $v_1 = \frac{a}{b}$. Donc $v_n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

b) De $v_n(u_n - a) = u_n - b$, on tire $u_n = \frac{b - a v_n}{1 - v_n}$ $(v_n \neq 1)$, soit

$$u_n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b^n - a^n}.$$

c) $0 < \frac{a}{b} < 1$ donc $\lim v_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = b$.

3. a) $u_{n+1} = 2a - \frac{a^2}{u_n}$: $u_1 = 2a$, $u_2 = \frac{3a}{2}$, $u_3 = \frac{4a}{3}$, $u_4 = \frac{5a}{4}$.

b) Montrons par récurrence que $u_n = \frac{(n+1)a}{n}$. C'est vrai pour $n = 1$. Si c'est vrai au rang n :

$$u_{n+1} = 2a - \frac{a^2 n}{(n+1)a} = \frac{a(2(n+1) - n)}{n+1} = \frac{(n+2)a}{n+1}.$$

Donc $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$.

Corrigé de l'exercice 6

La fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$ (composée de la fonction affine croissante $x \mapsto p + (p-1)x$, à valeurs positives, et de la fonction racine carrée). De plus $f(0) = \sqrt{p}$ et $f(p) = \sqrt{p^2} = p$.

1. a) Par récurrence : $0 \leq u_0 \leq p$. Si $0 \leq u_n \leq p$, alors $f(0) \leq f(u_n) \leq f(p)$, soit $0 \leq \sqrt{p} \leq u_{n+1} \leq p$.

b) $u_1 = \sqrt{p} \geq u_0$. Si $u_{n+1} \geq u_n$, alors, f étant croissante, $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. Par récurrence, (u_n) est croissante.

c) (u_n) est croissante et majorée par p : elle est convergente.

2. a) Pour tout n, comme $p = f(p)$:

$$u_{n+1} - p = \sqrt{p + (p-1)u_n} - \sqrt{p + (p-1)p} = \frac{(p-1)(u_n - p)}{\sqrt{p + (p-1)u_n} + p}.$$

Le dénominateur est supérieur ou égal à p, donc $|u_{n+1} - p| \leq \frac{p-1}{p} |u_n - p|$.

b) Par récurrence, $|u_n - p| \leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^n |u_0 - p| = p\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$. Comme $0 < 1 - \frac{1}{p} < 1$, le majorant tend vers 0 et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = p$.

Corrigé de l'exercice 7

Par une récurrence immédiate, $u_n > 0$ pour tout n (si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = \frac{3}{2} + \frac{9}{2u_n} > 0$) : la suite est bien définie.

1. $u_{n+1} - 3 = \frac{3u_n + 9 - 6u_n}{2u_n} = -\frac{3}{2u_n}(u_n - 3)$. Comme $\frac{3}{2u_n} > 0$, $u_{n+1} - 3$ et $u_n - 3$ sont de signes contraires.

2. Par récurrence sur p. $u_0 = 1 \leq 3$ donc, d'après 1., $u_1 \geq 3$. Si $u_{2p} \leq 3 \leq u_{2p+1}$, alors $u_{2p+2} \leq 3$ (signe contraire de $u_{2p+1} - 3$), puis $u_{2p+3} \geq 3$.

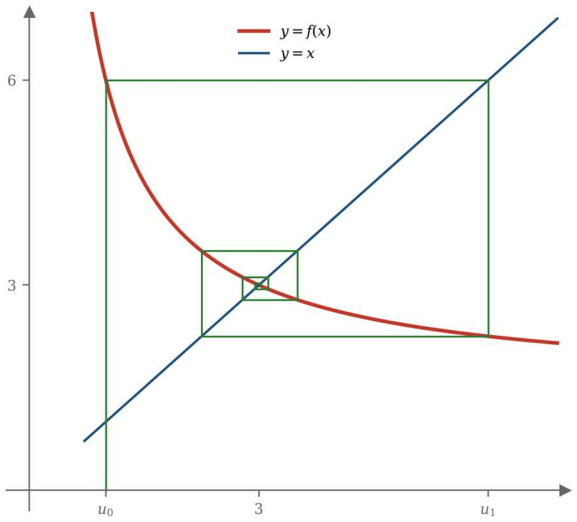
3. Si (u_n) converge vers ℓ, alors (u_{2p}) et (u_{2p+1}) convergent vers ℓ. En passant à la limite dans $u_{2p} \leq 3 \leq u_{2p+1}$, on obtient $\ell \leq 3 \leq \ell$, donc $\ell = 3$.

4. Montrons par récurrence que $2 \leq u_n \leq 6$ pour tout $n \geq 1$. $u_1 = 6$. Si $2 \leq u_n \leq 6$, alors $\frac{9}{12} \leq \frac{9}{2u_n} \leq \frac{9}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{3}{2} + \frac{9}{2u_n} \in \left[\frac{9}{4}, \frac{15}{4}\right] \subset [2,6]$.

5. a) Pour $n \geq 2$, d'après 1. : $|u_n - 3| = \frac{3}{2u_{n-1}}|u_{n-1} - 3|$ et $u_{n-1} \geq 2$ (car $n - 1 \geq 1$), donc $\frac{3}{2u_{n-1}} \leq \frac{3}{4}$.

b) Par récurrence : pour $n = 2$, $|u_2 - 3| \leq \frac{3}{4}|u_1 - 3| = 3 \times \frac{3}{4}$. Si $|u_n - 3| \leq 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$, alors $|u_{n+1} - 3| \leq \frac{3}{4}|u_n - 3| \leq 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

c) $\lim 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0$, donc (u_n) converge vers 3.



Exercice 7 : f est décroissante, les termes se placent alternativement de part et d'autre de 3.

Corrigé de l'exercice 8

1. Par récurrence. $u_0 = v_0 = 0$. Si $0 \leq u_n \leq 3$ et $0 \leq v_n \leq 3$, alors $0 \leq 3 - v_n \leq 3$ et $3 \leq 3 + u_n \leq 6$, donc u_{n+1} et v_{n+1} existent, $0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3} \leq 3$ et $0 \leq v_{n+1} \leq \sqrt{6} \leq 3$.

Remarque. Si les suites convergent vers ℓ et ℓ', alors $\ell^2 = 3 - \ell'$ et $\ell'^2 = 3 + \ell$; par différence, $(\ell' - \ell)(\ell' + \ell) = \ell + \ell'$, d'où $\ell' = \ell + 1$, puis $\ell^2 + \ell - 2 = 0$ et $\ell = 1$, $\ell' = 2$. C'est ce qui justifie le choix $a_n = u_n - 1$ et $b_n = v_n - 2$.

2. a) Avec l'expression conjuguée :

$$a_{n+1} = \sqrt{3 - v_n} - 1 = \frac{2 - v_n}{\sqrt{3 - v_n} + 1} = \frac{-b_n}{\sqrt{3 - v_n} + 1}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{3 + u_n} - 2 = \frac{u_n - 1}{\sqrt{3 + u_n} + 2} = \frac{a_n}{\sqrt{3 + u_n} + 2}.$$

Les dénominateurs sont respectivement supérieurs ou égaux à 1 et à 2, d'où $|a_{n+1}| \leq |b_n|$ et $|b_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_n|$.

b) $|a_{n+2}| \leq |b_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_n|$ et $|b_{n+2}| \leq \frac{1}{2}|a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|b_n|$.

c) Par récurrence sur p : $|a_{2p}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^p |a_0| = \left(\frac{1}{2}\right)^p$ car $a_0 = -1$, et $|b_{2p}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^p |b_0| = \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}$ car $b_0 = -2$.

d) Les majorants tendent vers 0 : $\lim u_{2p} = 1$ et $\lim v_{2p} = 2$. De plus $|a_{2p+1}| \leq |b_{2p}|$ et $|b_{2p+1}| \leq \frac{1}{2}|a_{2p}|$, donc $\lim u_{2p+1} = 1$ et $\lim v_{2p+1} = 2$. Par suite (u_n) converge vers 1 et (v_n) converge vers 2.

Corrigé de l'exercice 9

1. Soit $\varphi(x) = x - \sin x$ sur $[0, +\infty[$: $\varphi'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, donc φ est croissante et $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$, soit $\sin x \leq x$.

Soit $\psi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$: $\psi'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ et $\psi''(x) = x - \sin x \geq 0$. Donc ψ' est croissante, $\psi'(x) \geq \psi'(0) = 0$, ψ est croissante et $\psi(x) \geq \psi(0) = 0$, soit $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$.

2. Par récurrence. Pour $n = 0$: $0 = 0$. Si l'égalité est vraie au rang n :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

3. a) Pour $1 \leq k \leq n$, $\frac{kx}{n^2} \geq 0$; d'après 1. : $\frac{kx}{n^2} - \frac{k^3x^3}{6n^6} \leq \sin\frac{kx}{n^2} \leq \frac{kx}{n^2}$. En sommant pour $k = 1, \ldots, n$ et en utilisant

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{kx}{n^2} = \frac{x}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)x}{2n}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3x^3}{6n^6} = \frac{x^3}{6n^6} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2x^3}{24n^4},$$

on obtient l'encadrement demandé.

b) $\lim \frac{(n+1)x}{2n} = \frac{x}{2}$ et $\lim \frac{(n+1)^2x^3}{24n^4} = 0$. Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = \frac{x}{2}$.

4. a) $\sin 3x = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2\sin x(1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, d'où $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$.

b) En appliquant a) à $\frac{k}{n^2}$ et en sommant : $v_n = \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{3k}{n^2} = \frac{3}{4}u_n(1) - \frac{1}{4}u_n(3)$.

c) D'après 3. b) : $\lim v_n = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = 0$.

Corrigé de l'exercice 10

1. $g'(x) = 3x^2 - 5$ s'annule en $-r$ et r, où $r = \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 1{,}29$. g est strictement croissante sur $]-\infty, -r]$, strictement décroissante sur $[-r, r]$ et strictement croissante sur $[r, +\infty[$. $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$, $g(-r) = \frac{10}{3}r - 1 \approx 3{,}30 > 0$ et $g(r) = -\frac{10}{3}r - 1 \approx -5{,}30 < 0$.

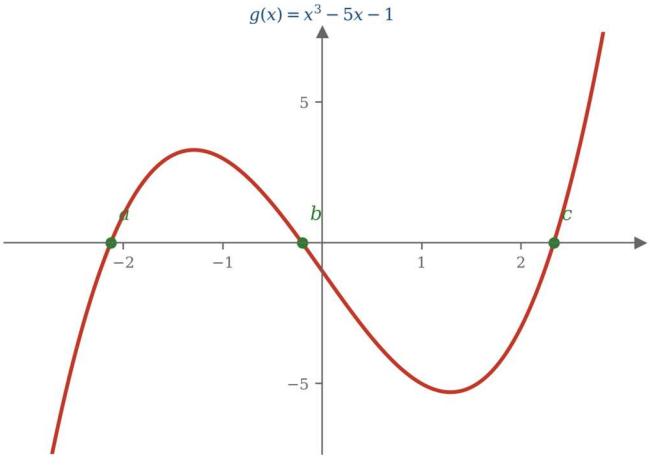
2. Sur chacun des intervalles $]-\infty, -r]$, $[-r, r]$ et $[r, +\infty[$, g est continue, strictement monotone, et 0 est compris entre les valeurs (ou limites) aux bornes : l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution dans chacun, donc trois solutions $a < -r < b < r < c$.

$g(-2{,}2) = -0{,}648 < 0$ et $g(-2{,}1) = 0{,}239 > 0$: $-2{,}2 < a < -2{,}1$.

$g(-0{,}3) = 0{,}473 > 0$ et $g(-0{,}2) = -0{,}008 < 0$: $-0{,}3 < b < -0{,}2$.

$g(2{,}3) = -0{,}333 < 0$ et $g(2{,}4) = 0{,}824 > 0$: $2{,}3 < c < 2{,}4$.

Les valeurs approchées par défaut à 10^{-1} près sont $-2{,}2$; $-0{,}3$; $2{,}3$.



Exercice 10 : la courbe de g et les trois solutions.

3. Posons $h(x) = \frac{1}{5}(x^3 - 1)$, de sorte que $u_{n+1} = h(u_n)$. La fonction h est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, et $h(x) - x = \frac{g(x)}{5}$.

a) Si $u_1 \geq u_0$: par récurrence, $u_{n+1} \geq u_n$ entraîne $h(u_{n+1}) \geq h(u_n)$, soit $u_{n+2} \geq u_{n+1}$; la suite est croissante. De même, si $u_1 \leq u_0$, elle est décroissante. Dans tous les cas, (u_n) est monotone.

b) Si (u_n) converge vers ℓ, alors, h étant continue, $\ell = h(\ell)$, c'est-à-dire $g(\ell) = 0$: $\ell \in \{a, b, c\}$.

c) • $u_0 = -3$: $u_1 = -5{,}6 < u_0$, la suite est décroissante. Si elle convergeait, sa limite ℓ vérifierait $\ell \leq u_0 = -3 < a$, ce qui est impossible d'après b). Elle est donc décroissante et divergente, donc non minorée : $\lim u_n = -\infty$.

• $u_0 = 0$: $u_1 = -0{,}2 < u_0$, la suite est décroissante. Montrons qu'elle est minorée par b : $u_0 = 0 \geq b$ et, si $u_n \geq b$, alors $u_{n+1} = h(u_n) \geq h(b) = b$. La suite converge donc vers un réel ℓ tel que $b \leq \ell \leq 0$; comme $\ell \in \{a, b, c\}$ avec $a < b$ et $c > 0$, on a $\lim u_n = b$.

• $u_0 = 3$: $u_1 = 5{,}2 > u_0$, la suite est croissante. Si elle convergeait, on aurait $\ell \geq 3 > c$, impossible. Elle est croissante et non majorée : $\lim u_n = +\infty$.

Corrigé de l'exercice 11

1. a) Par récurrence. $0 < u_0 < 1$. Si $0 < u_n < 1$, alors $u_{n+1} > 0$ et

$$1-u_{n+1}=\frac{1+u_n^2-2u_n}{1+u_n^2}=\frac{(1-u_n)^2}{1+u_n^2}>0.$$

b) $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-u_n^2)}{1+u_n^2}>0$: la suite est croissante et majorée par 1, donc convergente vers un réel ℓ. La fonction $x\mapsto\frac{2x}{1+x^2}$ étant continue, $\ell=\frac{2\ell}{1+\ell^2}$, soit $\ell(\ell^2-1)=0$. Comme $\ell\geq u_0=\frac{1}{2}$, on a $\ell=1$.

2. a) $v_{n+1}=\frac{1-u_{n+1}}{1+u_{n+1}}=\frac{1+u_n^2-2u_n}{1+u_n^2+2u_n}=\left(\frac{1-u_n}{1+u_n}\right)^2=v_n^2$.

b) Par récurrence : $v_0=\frac{1/2}{3/2}=\frac{1}{3}=\frac{1}{3^{2^0}}$. Si $v_n=\frac{1}{3^{2^n}}$, alors $v_{n+1}=v_n^2=\frac{1}{3^{2\times 2^n}}=\frac{1}{3^{2^{n+1}}}$.

c) $2^n\geq n$ donc $0<v_n\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\lim v_n=0$. De $v_n(1+u_n)=1-u_n$: $u_n=\frac{1-v_n}{1+v_n}=\frac{3^{2^n}-1}{3^{2^n}+1}$.

d) $p_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{1+2+\cdots+2^n}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}-1}$. Donc $\frac{p_n}{v_{n+1}}=\frac{3^{2^{n+1}}}{3^{2^{n+1}-1}}=3$ pour tout n, et la limite vaut 3.

3. a) Pour $n\geq 1$, d'après 1. a) : $1-u_n=(1-u_{n-1})\times\frac{1-u_{n-1}}{1+u_{n-1}^2}>0$. La suite étant croissante, $u_{n-1}\geq u_0=\frac{1}{2}$, donc $1-u_{n-1}\leq\frac{1}{2}$ et $1+u_{n-1}^2\geq 1+u_0^2$. Ainsi

$$\frac{1-u_{n-1}}{1+u_{n-1}^2}\leq\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+u_0^2}<\frac{1}{1+u_0^2},$$

et, comme $1-u_{n-1}>0$, $0<1-u_n<\frac{1}{1+u_0^2}(1-u_{n-1})$.

b) $\frac{1}{1+u_0^2}=\frac{4}{5}$. Par récurrence : $0<1-u_0=\frac{1}{2}<1$; si $0<1-u_{n-1}<\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, alors $0<1-u_n<\frac{4}{5}(1-u_{n-1})<\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

c) $1-s_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1-u_k)$. D'après b), chaque terme est compris entre 0 et $\left(\frac{4}{5}\right)^k$, donc

$$0\leq 1-s_n\leq\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^k=\frac{1}{n}\times\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\frac{4}{5}}=\frac{5}{n}\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right].$$

D'où l'encadrement. Comme $\lim\frac{5}{n}\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]=0$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=1$.

Corrigé de l'exercice 12

1. La suite est constante si, et seulement si, $u_1=u_0$, soit $u_0=\frac{a}{u_0}$, c'est-à-dire $u_0^2=a$: $u_0=\sqrt{a}$ (car $u_0>0$).

2. Par récurrence : $u_0>0$; si $u_n>0$, alors $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)>0$.

3. a) et b) Pour tout n :

$$u_{n+1}\mp\sqrt{a}=\frac{u_n^2+a\mp 2\sqrt{a}\,u_n}{2u_n}=\frac{\left(u_n\mp\sqrt{a}\right)^2}{2u_n}.$$

c) Par récurrence : $u_0\neq\sqrt{a}$ par hypothèse ; si $u_n\neq\sqrt{a}$, alors d'après a) $u_{n+1}-\sqrt{a}>0$. On retient : **pour tout** $n\geq 1$, $u_n>\sqrt{a}$.

d) Si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell\geq\sqrt{a}>0$ d'après c). La fonction $x\mapsto\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$ est continue en ℓ, donc $\ell=\frac{1}{2}\left(\ell+\frac{a}{\ell}\right)$, soit $\ell^2=a$ et $\ell=\sqrt{a}$.

e) $u_{n+1}-u_n=\frac{a-u_n^2}{2u_n}$. Pour $n\geq 1$, $u_n>\sqrt{a}$ donc $u_{n+1}-u_n<0$: la suite est strictement décroissante à partir du rang 1. (Si $u_0<\sqrt{a}$, on a $u_1>u_0$: c'est pourquoi la décroissance ne commence qu'au rang 1.) Décroissante et minorée par $\sqrt{a}$, elle converge, et d'après d) sa limite est $\sqrt{a}$.

4. a) En divisant membre à membre les égalités de 3. a) et b) : $v_{n+1}=\left(\frac{u_n-\sqrt{a}}{u_n+\sqrt{a}}\right)^2=v_n^2$.

b) Par récurrence, $v_n=v_0^{2^n}$.

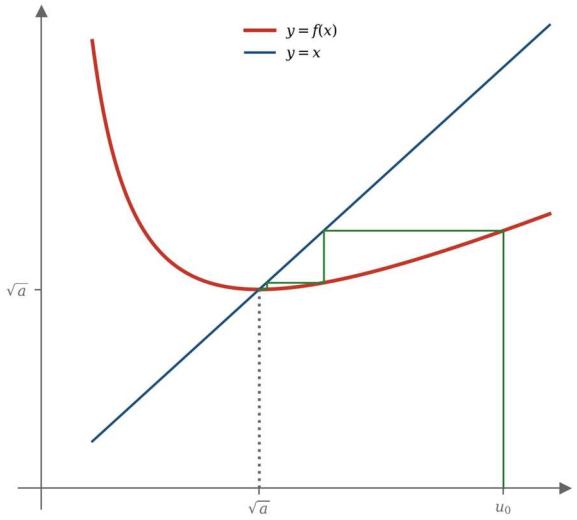
c) Comme $u_0>0$ et $\sqrt{a}>0$, $|u_0-\sqrt{a}|<u_0+\sqrt{a}$, donc $|v_0|<1$. Puisque $2^n\geq n$, $|v_n|=|v_0|^{2^n}\leq |v_0|^n$ et $\lim v_n=0$. Enfin $u_n=\sqrt{a}\,\frac{1+v_n}{1-v_n}$, donc $\lim u_n=\sqrt{a}$.

5. a) $u_0=\frac{3}{2}\sqrt{a}>\sqrt{a}$ et, d'après 3. c), $u_n>\sqrt{a}$ pour $n\geq 1$.

b) $u_{n+1}-\sqrt{a}=\left(u_n-\sqrt{a}\right)\times\frac{u_n-\sqrt{a}}{2u_n}$ et $\frac{u_n-\sqrt{a}}{2u_n}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{a}}{u_n}\right)<\frac{1}{2}$. Comme $u_n-\sqrt{a}>0$, on a $u_{n+1}-\sqrt{a}<\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{a}\right)$.

c) Par récurrence : $u_0-\sqrt{a}=\frac{1}{2}\sqrt{a}<\sqrt{a}$; si $u_n-\sqrt{a}<\left(\frac{1}{2}\right)^n\sqrt{a}$, alors $u_{n+1}-\sqrt{a}<\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{a}\right)<\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\sqrt{a}$.

d) $0<u_n-\sqrt{a}<\left(\frac{1}{2}\right)^n\sqrt{a}$: par encadrement, $\lim u_n=\sqrt{a}$.



Exercice 12 (algorithme de Héron) : la convergence vers $\sqrt{a}$ est très rapide.

Corrigé de l'exercice 13

1. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{1+x^2}-2x\times\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}>0.$$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; $\lim\limits_{+\infty}f=2$ et $\lim\limits_{-\infty}f=-2$ (car $\sqrt{1+x^2}=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$).

b) $f(x)=x\Leftrightarrow x\left(2-\sqrt{1+x^2}\right)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $1+x^2=4$. $S=\{-\sqrt{3},\,0,\,\sqrt{3}\}$.

c) f étant croissante, si $1\leq x\leq\sqrt{3}$ alors $f(1)\leq f(x)\leq f\left(\sqrt{3}\right)$, soit $\sqrt{2}\leq f(x)\leq\sqrt{3}$, et $\sqrt{2}\geq 1$.

2. a) Récurrence immédiate à l'aide de 1. c), avec $u_0 = 1$.

b) Pour $x \in [1, \sqrt{3}]$: $f(x) - x = \frac{x(2-\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ car $1 + x^2 \leq 4$. Donc $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$: (u_n) est croissante.

c) Croissante et majorée par $\sqrt{3}$, (u_n) converge vers un réel $\ell \in [1, \sqrt{3}]$. f étant continue, $f(\ell) = \ell$, et d'après 1. b), $\ell = \sqrt{3}$.

3. a) *Définition.* Montrons que $u_n < \sqrt{3}$ pour tout n : $u_0 = 1 < \sqrt{3}$ et, f étant strictement croissante, $u_n < \sqrt{3}$ entraîne $u_{n+1} = f(u_n) < f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$. Donc $3 - u_n^2 > 0$.

Suite géométrique. $u_{n+1}^2 = \frac{4u_n^2}{1+u_n^2}$ et $3 - u_{n+1}^2 = \frac{3-u_n^2}{1+u_n^2}$, donc $v_{n+1} = \frac{4u_n^2}{3-u_n^2} = 4v_n$. (v_n) est géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{2}$: $v_n = \frac{4^n}{2}$.

b) De $v_n(3 - u_n^2) = u_n^2$: $u_n^2 = \frac{3v_n}{1+v_n} = \frac{3\times 4^n}{4^n+2}$, et comme $u_n > 0$: $u_n = \sqrt{\frac{3\times 4^n}{4^n+2}}$.

c) $\frac{3\times 4^n}{4^n+2} = \frac{3}{1+\frac{2}{4^n}} \to 3$, donc $\lim u_n = \sqrt{3}$.

4. a) Pour tout k, $1 \leq u_k^2 \leq 3$; en sommant n inégalités : $n \leq s_n \leq 3n$.

b) $s_n \geq n$ donc $\lim s_n = +\infty$. De plus $\frac{1}{n} \leq \frac{s_n}{n^2} \leq \frac{3}{n}$, donc $\lim \frac{s_n}{n^2} = 0$.

5. a) $s_{n+1} = s_n + u_n^2$, donc $ns_{n+1} - (n+1)s_n = ns_n + nu_n^2 - ns_n - s_n = nu_n^2 - s_n$.

b) $r_{n+1} - r_n = \frac{ns_{n+1}-(n+1)s_n}{n(n+1)} = \frac{nu_n^2-s_n}{n(n+1)}$. Comme (u_n) est croissante et positive, $u_k^2 \leq u_n^2$ pour $k \leq n - 1$, donc $s_n \leq nu_n^2$ et $r_{n+1} - r_n \geq 0$.

c) D'après 4. a), $r_n \leq 3$: croissante et majorée, (r_n) converge.

6. a) (u_k^2) est croissante. D'une part $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 \leq nu_{n-1}^2$. D'autre part, les termes étant positifs, $s_n \geq \sum_{k=p}^{n-1} u_k^2 \geq (n-p)u_p^2$.

b) On divise par $n > 0$.

c) Fixons $p \geq 1$ et faisons tendre n vers $+\infty$ dans b) : $\frac{n-p}{n}u_p^2 \to u_p^2$, $r_n \to \ell$ et $r_n \leq u_{n-1}^2 \leq 3$. Donc $u_p^2 \leq \ell \leq 3$. Faisons maintenant tendre p vers $+\infty$: $u_p^2 \to 3$, d'où $3 \leq \ell \leq 3$ et $\ell = 3$.

Corrigé de l'exercice 14

1. $u_{n+1} - v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{u_{n+1}+v_n}{2} = \frac{u_{n+1}-v_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n+v_n}{2} - v_n\right) = \frac{1}{4}(u_n - v_n)$.

2. La suite $(u_n - v_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $a - b$: $u_n - v_n = \frac{a-b}{4^n}$.

3. $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} = u_n - \frac{u_n-v_n}{2} = u_n - \frac{a-b}{2\times 4^n}$.

4. Par somme télescopique :

$$u_n = a - \frac{a-b}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4^k} = a - \frac{a-b}{2} \times \frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}} = a - \frac{2(a-b)}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right).$$

Donc $\lim u_n = a - \frac{2(a-b)}{3} = \frac{a+2b}{3}$, et comme $v_n = u_n - \frac{a-b}{4^n}$, $\lim v_n = \frac{a+2b}{3}$.

Vérification. $u_{n+1} + 2v_{n+1} = 2u_{n+1} + v_n = u_n + 2v_n$: la suite $(u_n + 2v_n)$ est constante égale à $a + 2b$, ce qui redonne $3\ell = a + 2b$.

Corrigé de l'exercice 15

Par récurrence, $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout n ; la seconde relation s'écrit $v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n+v_n)^2 - 4u_nv_n}{2(u_n+v_n)} = \frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)} \geq 0.$$

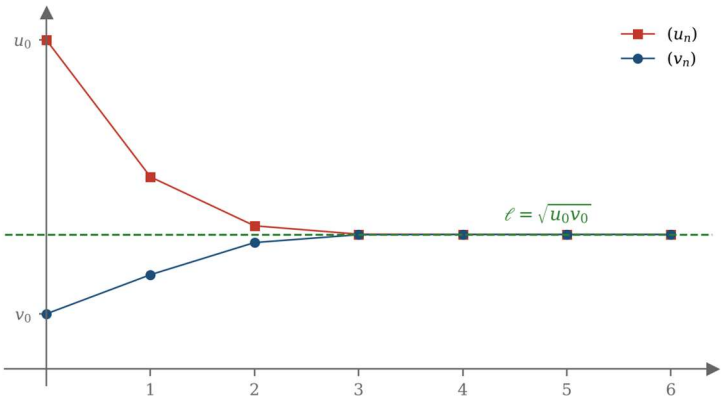
Donc $u_n \geq v_n$ pour tout $n \geq 1$. Pour $n \geq 1$, on a alors $0 \leq \frac{u_n-v_n}{u_n+v_n} < 1$ et

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n-v_n}{2} \times \frac{u_n-v_n}{u_n+v_n} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n).$$

2. Pour $n \geq 1$: $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n-u_n}{2} \leq 0$ et $v_{n+1} - v_n = \frac{v_n(u_n-v_n)}{u_n+v_n} \geq 0$.

3. D'après 1., par récurrence, $0 \leq u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(u_1 - v_1)$ pour $n \geq 1$, donc $\lim(u_n - v_n) = 0$. Avec 1. et 2., les suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes : elles convergent vers la même limite ℓ.

4. $u_{n+1}v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \times \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} = u_nv_n$: la suite (u_nv_n) est constante égale à u_0v_0. À la limite, $\ell^2 = u_0v_0$ et, comme $\ell \geq v_1 > 0$, $\ell = \sqrt{u_0v_0}$.



Exercice 15 : moyennes arithmétique et harmonique itérées.

Corrigé de l'exercice 16

On remarque que $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}$.

1. Montrons par récurrence que $0 < u_n < v_n$. C'est vrai pour $n = 0$. Si $0 < u_n < v_n$, alors $u_n < u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} < v_n$; puis, v_{n+1} étant la moyenne géométrique des réels distincts $u_{n+1} < v_n$: $u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$.

On a obtenu au passage : (u_n) est strictement croissante, (v_n) strictement décroissante, et

$$0 < v_{n+1} - u_{n+1} < v_n - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Par récurrence, $0 < v_n - u_n \leq \frac{b-a}{2^n}$, donc $\lim(v_n - u_n) = 0$. Les suites sont adjacentes : elles convergent vers la même limite ℓ, et $\ell \geq u_0 = a > 0$.

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi}{2^k} \qquad \text{et} \qquad u_n = v_n\cos\frac{\varphi}{2^n}$$

(pour $n=0$ le produit vaut 1). C'est vrai pour $n=0$. Si c'est vrai au rang n, avec $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$:

$$u_{n+1} = \frac{v_n}{2}\left(1+\cos\frac{\varphi}{2^n}\right) = v_n\cos^2\frac{\varphi}{2^{n+1}}, \qquad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} = v_n\cos\frac{\varphi}{2^{n+1}},$$

d'où $u_{n+1} = v_{n+1}\cos\frac{\varphi}{2^{n+1}}$.

D'autre part, en appliquant n fois $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$: $\sin\varphi = 2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi}{2^k}$. Donc

$$v_n = \frac{b\sin\varphi}{2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}} = \frac{b\sin\varphi}{\varphi}\times\frac{\frac{\varphi}{2^n}}{\sin\frac{\varphi}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{b\sin\varphi}{\varphi}.$$

Ainsi $\ell = \frac{b\sin\varphi}{\varphi}$.

Corrigé de l'exercice 17

1. $u_1 = \frac{C_2^1}{4} = \frac{1}{2}$. Comme $\frac{C_{2n+2}^{n+1}}{C_{2n}^{n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\times\frac{2(2n+1)}{4(n+1)} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}.$$

2. Pour $n=1$: $u_1 = \frac{1}{2} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$. Supposons $u_n \le \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$. Alors

$$u_{n+1} \le \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\times\frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{n+1}}.$$

Il suffit de vérifier que $\frac{2n+1}{4(n+1)} \le \frac{n+1}{2n+3}$, c'est-à-dire $(2n+1)(2n+3) \le 4(n+1)^2$, soit $4n^2+8n+3 \le 4n^2+8n+4$: vrai.

3. $(2n+1)^2 = 4n(n+1)+1 > 4n(n+1)$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$: (u_n) est strictement croissante. D'après 2., $u_n \le \sqrt{\frac{n}{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Croissante et majorée, (u_n) converge vers ℓ avec $u_1 \le \ell \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, soit $\ell \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

4. Pour $x>0$: $\left(x+\frac{1}{2}\right) - \sqrt{x(x+1)} = \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - x^2 - x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x(x+1)}} = \frac{1}{4\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x(x+1)}\right]}$.

Cette quantité étant positive, $\sqrt{x(x+1)} \le x+\frac{1}{2}$. Le crochet est donc compris entre $2\sqrt{x(x+1)}$ et $2x+1$, ce qui donne l'encadrement demandé.

5. $u_{k+1} - u_k = u_k\left(\frac{2k+1}{2\sqrt{k(k+1)}} - 1\right) = u_k\,\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{k(k+1)}}{\sqrt{k(k+1)}}$. D'après 4. avec $x=k$:

• $u_{k+1} - u_k \le \frac{u_k}{8k(k+1)} = \frac{u_k}{8k} - \frac{u_k}{8(k+1)}$;

• $u_{k+1} - u_k \ge \frac{u_k}{8\left(k+\frac{1}{2}\right)\sqrt{k(k+1)}} \ge \frac{u_k}{8\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{3}{2}\right)} = \frac{u_k}{8\left(k+\frac{1}{2}\right)} - \frac{u_k}{8\left(k+\frac{3}{2}\right)}$, car $\sqrt{k(k+1)} \le k+\frac{1}{2} \le k+\frac{3}{2}$.

6. Soit $p > n \ge 1$. On somme les inégalités de 5. pour $k = n, \ldots, p-1$ en utilisant $u_n \le u_k \le \ell$ (suite croissante de limite ℓ) ; les sommes sont télescopiques :

$$\frac{u_n}{8}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{p+\frac{1}{2}}\right) \le u_p - u_n \le \frac{\ell}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right).$$

En faisant tendre p vers $+\infty$: $\frac{u_n}{4(2n+1)} \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{8n}$.

7. Posons $d_n = \ell - \left(1+\frac{1}{8n}\right)u_n = (\ell - u_n) - \frac{u_n}{8n}$. D'après 6. :

• $d_n \leq \frac{\ell}{8n} - \frac{u_n}{8n} = \frac{\ell - u_n}{8n} \leq \frac{\ell}{64n^2} \leq \frac{\ell}{16^2}$;

• $d_n \geq \frac{u_n}{4(2n+1)} - \frac{u_n}{8n} = -\frac{u_n}{8n(2n+1)} \geq -\frac{\ell}{16n^2}$, car $u_n \leq \ell$ et $8n(2n+1) \geq 16n^2$.

Donc $|d_n| \leq \frac{\ell}{16^2}$.

8. Comme $\ell \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, il suffit que $\frac{1}{16\sqrt{2}\,n^2} \leq 10^{-5}$, soit $n^2 \geq \frac{10^5}{16\sqrt{2}} \approx 4419{,}4$. Or $66^2 = 4356$ et $67^2 = 4489$: **il suffit de choisir** $n \geq 67$.

Remarque (hors programme). On peut démontrer que $\ell = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0{,}56419$.

Corrigé de l'exercice 18

Inégalité de Bernoulli. Pour tout réel $x \geq -1$ et tout $m \in \mathbb{N}$: $(1+x)^m \geq 1 + mx$. Par récurrence : vrai pour $m = 0$; si $(1+x)^m \geq 1 + mx$, alors, $1 + x$ étant positif, $(1+x)^{m+1} \geq (1+mx)(1+x) = 1 + (m+1)x + mx^2 \geq 1 + (m+1)x$.

Monotonie. Pour $n \geq 1$, $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \times \frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \times \frac{n+1}{n}.$$

D'après l'inégalité de Bernoulli avec $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$ et $m = n+1$:

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{n} = 1$: la suite (u_n) est croissante.

Corrigé de l'exercice 19

1. Posons $a_n = u_{2n}$ $(n \geq 1)$ et $b_n = u_{2n+1}$ $(n \geq 0)$.

• $a_{n+1} - a_n = u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$: (a_n) est croissante.

• $b_{n+1} - b_n = u_{2n+3} - u_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} < 0$: (b_n) est décroissante.

• $b_n - a_n = u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1}$: cette différence est positive et tend vers 0.

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

2. Elles convergent donc vers une même limite ℓ. Comme $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = \ell$, la suite (u_n) converge vers ℓ.

Remarque. On verra au chapitre « Logarithme » que $\ell = \ln 2$.

Corrigé de l'exercice 20

1. • $u_{2n+2} - u_{2n} = -\frac{1}{(4n+2)!} + \frac{1}{(4n+4)!} < 0$: (u_{2n}) est décroissante.

• $u_{2n+3} - u_{2n+1} = \frac{1}{(4n+4)!} - \frac{1}{(4n+6)!} > 0$: (u_{2n+1}) est croissante.

• $u_{2n} - u_{2n+1} = \frac{1}{(4n+2)!}$: cette différence est positive et tend vers 0 (car $(4n+2)! \geq n$).

Les suites (u_{2n+1}) et (u_{2n}) sont adjacentes.

2. Elles ont la même limite ℓ, donc (u_n) converge vers ℓ. De plus $u_1 \leq \ell \leq u_0$, soit $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.

Corrigé de l'exercice 21

1. Montrons par récurrence que $0 < u_n < v_n$. Vrai pour $n = 0$. Si $0 < u_n < v_n$, alors $u_{n+1} > 0$ et

$$v_{n+1} - u_{n+1} = (u_n + v_n)\left(\frac{1}{2} - \frac{u_n v_n}{u_n^2 + v_n^2}\right) = \frac{(u_n + v_n)(u_n - v_n)^2}{2(u_n^2 + v_n^2)} > 0.$$

2. $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} < 0$: (v_n) est décroissante.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(u_n v_n + v_n^2 - u_n^2 - v_n^2)}{u_n^2 + v_n^2} = \frac{u_n^2(v_n - u_n)}{u_n^2 + v_n^2} > 0 :$$

(u_n) est croissante. Ainsi $a \leq u_n < v_n \leq b$: (u_n) est croissante et majorée par b, (v_n) est décroissante et minorée par a. Elles convergent vers des réels ℓ et ℓ'.

3. En passant à la limite dans $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$: $\ell' = \frac{\ell + \ell'}{2}$, donc $\ell = \ell'$ et $\lim(v_n - u_n) = 0$. Avec 1. et 2., les suites sont adjacentes.

4. $\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{u_n^2 + v_n^2}{u_n v_n (u_n + v_n)} + \frac{2u_n v_n}{u_n v_n (u_n + v_n)} = \frac{(u_n + v_n)^2}{u_n v_n (u_n + v_n)} = \frac{u_n + v_n}{u_n v_n} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$.

Donc (w_n) est constante égale à $w_0 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

5. $\ell \geq a > 0$; en passant à la limite dans $w_n = w_0$: $\frac{2}{\ell} = \frac{a+b}{ab}$, d'où $\ell = \frac{2ab}{a+b}$.

Corrigé de l'exercice 22

1. $F_0 = 2^1 + 1 = 3$, $F_1 = 2^2 + 1 = 5$, $F_2 = 2^4 + 1 = 17$, $F_3 = 2^8 + 1 = 257$.

2. Pour $n = 0$: $F_0 = 3 = F_1 - 2$. Supposons $F_0 F_1 \cdots F_n = F_{n+1} - 2$. Alors

$$F_0 F_1 \cdots F_n F_{n+1} = (F_{n+1} - 2)F_{n+1} = \left(2^{2^{n+1}} - 1\right)\left(2^{2^{n+1}} + 1\right) = 2^{2^{n+2}} - 1 = F_{n+2} - 2.$$

3. $2^{n+1} > 2^n$ donc $F_{n+1} > F_n$: la suite est strictement croissante. De plus $2^n \geq n$, donc $F_n > 2^{2^n} \geq 2^n \geq n$: pour tout réel M, il existe n tel que $F_n > M$, la suite n'est pas majorée. Croissante et non majorée, elle tend vers $+\infty$.

Corrigé de l'exercice 23

1. Vrai. Par récurrence, $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$, et $\lim k^n = 0$: (u_n) converge vers ℓ.

2. Vrai. $|s_n - \ell| = \frac{1}{n}\left|\sum_{j=0}^{n-1}(u_j - \ell)\right| \leq \frac{|u_0 - \ell|}{n}\sum_{j=0}^{n-1} k^j \leq \frac{|u_0 - \ell|}{n(1-k)}$, qui tend vers 0 : (s_n) converge vers ℓ.

3. Vrai. Par récurrence, $\left|u_{2p} - \ell\right| \leq k^p |u_0 - \ell|$ et $\left|u_{2p+1} - \ell\right| \leq k^p |u_1 - \ell|$. Les suites $\left(u_{2p}\right)$ et $\left(u_{2p+1}\right)$ convergent vers ℓ, donc (u_n) aussi.

4. Vrai. Par récurrence, $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$, qui tend vers 0.

5. Vrai. Posons $d_n = |u_n - \ell|$ et $m = \max(k, x)$, de sorte que $0 < m < 1$ et $d_{n+1} \leq m\, d_n + m^n$. Montrons par récurrence que $d_n \leq m^n d_0 + n\, m^{n-1}$ pour $n \geq 1$: $d_1 \leq m\, d_0 + 1$; si l'inégalité est vraie au rang n, alors $d_{n+1} \leq m^{n+1} d_0 + n\, m^n + m^n = m^{n+1} d_0 + (n+1)m^n$.

Il reste à voir que $t_n = n\,m^{n-1}$ tend vers 0 : $\frac{t_{n+1}}{t_n} = m\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tend vers $m<1$; il existe donc un rang N à partir duquel $\frac{t_{n+1}}{t_n} \le \rho$ avec $\rho = \frac{1+m}{2} < 1$, d'où $0 < t_n \le \rho^{\,n-N} t_N$ pour $n \ge N$ (même raisonnement qu'à l'exercice 4) et $\lim t_n = 0$. Par suite $\lim d_n = 0$: (u_n) converge vers ℓ.

6. Faux. $(u_{n+1}-v_{n+1}) - (u_n - v_n) = (u_{n+1}-u_n) + (v_n - v_{n+1}) \ge 0$: la suite $(u_n - v_n)$ est **croissante**. Contre-exemple : $u_n = n$ et $v_n = -n$; $u_n - v_n = 2n$ n'est pas décroissante.

7. Vrai. $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 = \left(u_n + \frac{v_n}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}v_n^2 \ge \frac{3}{4}v_n^2$, donc $0 \le v_n^2 \le \frac{4}{3}(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2)$ et $\lim v_n^2 = 0$, d'où $\lim v_n = 0$. Par symétrie des rôles, $\lim u_n = 0$.

8. Vrai. Posons $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. Pour $n \ge 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$, et $\lim S_n = \lim S_{n-1} = \ell$ (réel), donc $\lim u_n = 0$.

Remarque. La réciproque est fausse : on peut avoir $\lim u_n = 0$ sans que (S_n) converge.

Chapitre 3 — Dérivabilité



Cours • 15 exercices • Corrigés détaillés

Ce que vous devez savoir faire à la fin du chapitre
– Étudier la dérivabilité d'une fonction en un réel et interpréter graphiquement le résultat (tangente, demi-tangentes, point anguleux).
– Calculer la dérivée d'une fonction, en particulier d'une fonction composée.
– Appliquer le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis.
– Établir des inégalités à l'aide des accroissements finis ou de l'étude d'une fonction auxiliaire.
– Étudier les variations d'une fonction, rechercher ses extrema et ses points d'inflexion.

Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 1, chapitre 3).

Cours

I. Dérivabilité en un réel

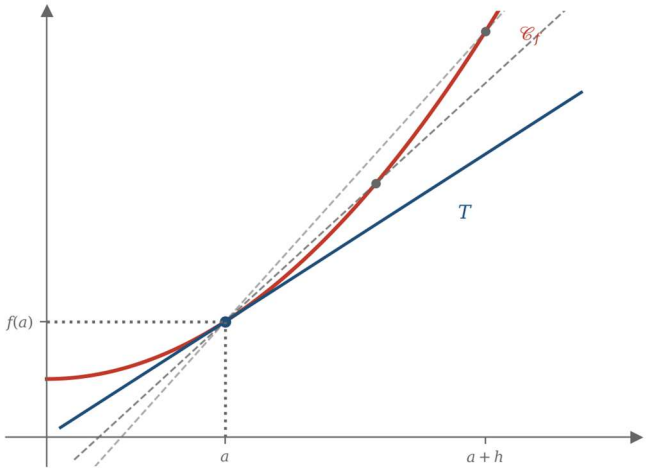
1. Nombre dérivé, tangente

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. On dit que f est **dérivable en** a s'il existe un réel, noté $f'(a)$, tel que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a) \qquad \text{ou encore} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a).$$

Le réel $f'(a)$ est le **nombre dérivé** de f en a.

Théorème. Si f est dérivable en a, alors :
– f est continue en a ;
– la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point $A\big(a, f(a)\big)$ une tangente T de coefficient directeur $f'(a)$, d'équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$;
– pour h voisin de 0, $f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h$ (approximation affine de f au voisinage de a).



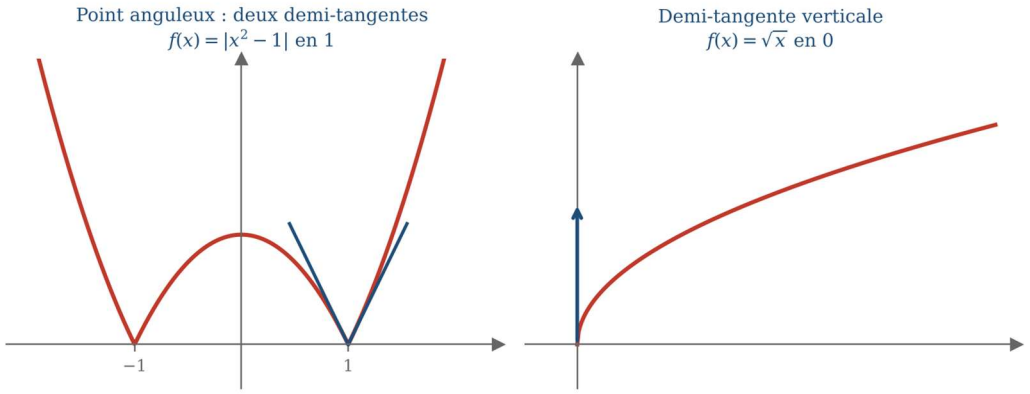
Le nombre dérivé est la limite des coefficients directeurs des sécantes.

Attention. La réciproque du premier point est fausse : la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

2. Dérivabilité à droite, à gauche

Définition. f est **dérivable à droite** en a si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque $x \to a^+$; cette limite est notée $f'_d(a)$. On définit de même $f'_g(a)$.
f est dérivable en a si, et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Résultat pour $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$	**Interprétation graphique au point $A(a, f(a))$**
limite finie $f'(a)$ en a	tangente de coefficient directeur $f'(a)$
limites finies différentes à droite et à gauche	deux demi-tangentes : A est un **point anguleux**
limite infinie à droite (ou à gauche)	demi-tangente **verticale**



Deux situations de non-dérivabilité.

Dérivabilité sur un intervalle. f est dérivable sur $]a, b[$ si elle est dérivable en tout réel de $]a, b[$; elle est dérivable sur $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$, à droite en a et à gauche en b. La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f.

II. Calcul des dérivées

1. Dérivées usuelles et opérations

Fonction	Dérivée	Validité
$x \mapsto k$ (constante)	0	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Opération	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
αu (α réel)	$\alpha u'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

2. Dérivée d'une fonction composée

Théorème. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(a)$. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'\big(f(a)\big).$$

Corollaire. Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J contenant $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'\big(f(x)\big)$.

Fonction	Dérivée	Condition
$u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$	u dérivable
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	u dérivable et $u > 0$
$x \mapsto f(ax+b)$	$x \mapsto af'(ax+b)$	f dérivable
$\sin u$	$u'\cos u$	u dérivable
$\cos u$	$-u'\sin u$	u dérivable

Exemple. $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car $x^2+3 > 0$) et $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

3. Dérivées successives

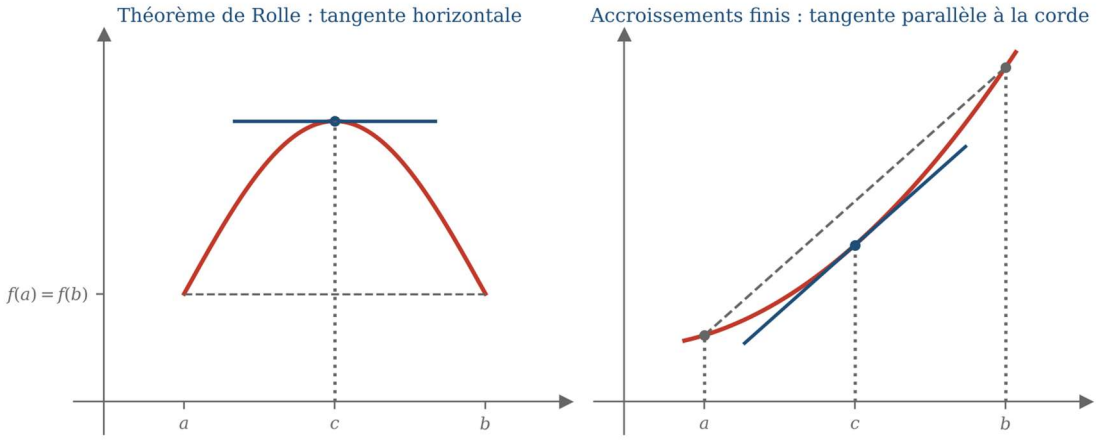
Si f' est elle-même dérivable sur I, sa dérivée est la **dérivée seconde** de f, notée f''. Plus généralement, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f, définie par $f^{(1)} = f'$ et $f^{(n+1)} = \big(f^{(n)}\big)'$.

III. Théorème de Rolle. Accroissements finis

Théorème de Rolle. Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction **continue sur** $[a, b]$, **dérivable sur** $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis. Soit $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



Interprétation graphique des deux théorèmes.

Inégalités des accroissements finis. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ $(a < b)$ et dérivable sur $]a, b[$.
– Si $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout x de $]a, b[$, alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.
– **Corollaire.** Si f est dérivable sur un intervalle I et si $|f'(x)| \leq M$ pour tout x de I, alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$ pour tous réels a et b de I.

Méthode — établir une inégalité.
– *Par les accroissements finis* : lorsque l'inégalité fait apparaître une différence $f(b) - f(a)$; on encadre f' sur $]a, b[$.
– *Par une fonction auxiliaire* : pour montrer $u(x) \leq v(x)$ sur I, on étudie les variations de $\varphi = v - u$ et l'on utilise une valeur connue de φ (souvent $\varphi(a) = 0$).

IV. Dérivée et variations

Théorème. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
– f est constante sur I si, et seulement si, f' est nulle sur I.
– Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I ; si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.
– Si f' est strictement positive sur I, ou plus généralement si f' est positive et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I, alors f est **strictement** croissante sur I (énoncé analogue pour la stricte décroissance).
Théorème. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si f est (strictement) croissante sur $]a, b[$, alors f est (strictement) croissante sur $[a, b]$; de même pour la décroissance.

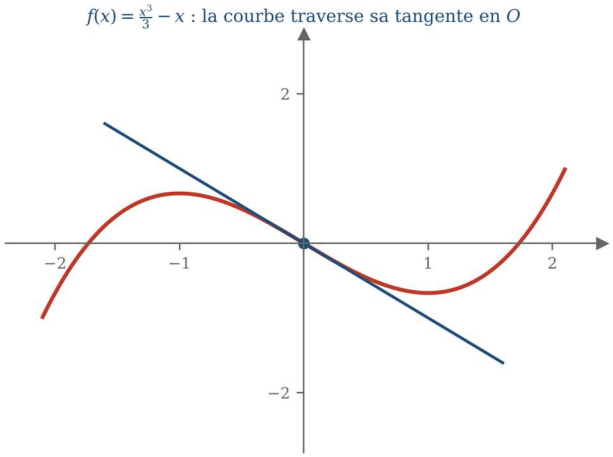
Extremum local. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
– Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.
– Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en a.

Attention. $f'(a) = 0$ ne suffit pas : pour $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ mais f n'a pas d'extremum en 0.

V. Point d'inflexion

Définition. Soit f une fonction dérivable en a. Le point $A\big(a, f(a)\big)$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ si la courbe traverse sa tangente en ce point.

Théorème. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]a-h, a+h[$ $(h>0)$. Si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors le point $I\big(a, f(a)\big)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.



Exemple de point d'inflexion : $f''(x) = 2x$ s'annule en 0 en changeant de signe.

Exercices

Exercice 1

On définit la fonction f, périodique de période 1, par la donnée de sa restriction à $[0,1[$: $f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx$, où b et c sont deux réels.

La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? (On discutera suivant les valeurs de b et c.)

Exercice 2

Comparer, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, les réels $0{,}9\tan x$ et $\tan(0{,}9x)$.

Exercice 3

Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un réel $c \in]p, p+1[$ tel que $\cos(p+1) = \cos p - \sin c$.

Exercice 4

Montrer que :

1. pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$;

2. pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$: $x \leq \tan x \leq \frac{4}{\pi}x$;
3. pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$: $1-\frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2}-x$;
4. pour tout x de $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$: $\frac{\pi}{2}-2x \leq \operatorname{cotan} x - 1 \leq \frac{\pi}{4}-x$;
5. pour tout $x > 0$: $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1}-\sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
6. $\frac{\sqrt{2}}{12} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$. (Indication : considérer la fonction sinus sur $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$.)

Exercice 5

Montrer que, pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$: $2\sin x + \tan x \geq 3x$.

Exercice 6

Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction polynôme P_n définie par $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - a$.

1. Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution positive et une seule, que l'on notera x_n. Montrer que $x_n \leq a$.
2. Étudier le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est monotone.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente. On note ℓ sa limite. Prouver que $0 \leq \ell < 1$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel x_n est solution de l'équation $x^{n+1} - (a+1)x + a = 0$. En déduire que $\ell = \frac{a}{a+1}$.

Exercice 7

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1.
   a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.
   b) Calculer u_1 et u_2.
   c) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \in \left]0,\frac{2}{3}\right[$.
2.
   a) Montrer que, pour tout x de $]0,1[$: $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
   b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n).
   c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3.
   a) Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   b) Donner enfin la valeur de ℓ.

Exercice 8

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x : $f'(x) = a\,f(x+b)$.

1. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux réels a_n et b_n tels que, pour tout réel x : $f^{(n)}(x) = a_n f(x + b_n)$, où (a_n) est une suite géométrique et (b_n) une suite arithmétique.
2. Exprimer a_n et b_n en fonction de n, a et b.
3. Trouver un exemple de fonction f non nulle vérifiant l'hypothèse.

Exercice 9

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ $(a < b)$, dérivables sur $]a, b[$, telles que $f(a) = g(b)$ et $f(b) = g(a)$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.
2. Montrer qu'il existe $x_1 \in]a, b[$ tel que $f'(x_1) = -g'(x_1)$.

Exercice 10

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ $(a < b)$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout x de $]a, b[$.

1. Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
2. Soit h la fonction définie sur $[a, b]$ par $h(x) = f(x) - f(a) - \omega\big(g(x) - g(a)\big)$, où $\omega \in \mathbb{R}$. Calculer ω pour que $h(b) = 0$.
3. La valeur de ω étant celle de la question 2, prouver qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.
4. En déduire que si $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell$.
5. Appliquer ce résultat pour calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Exercice 11

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est paire, alors il existe un réel a tel que $f'(a) = 0$.
2. Montrer que si f est impaire, alors il existe un réel b tel que $f''(b) = 0$.

Exercice 12

On donne un réel $t > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction $x \mapsto x^n - t(1 - x)$.

1. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution et une seule comprise entre 0 et 1. On note u_n cette solution.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_{n+1}(u_n) = -t(1 - u_n)^2$.
3. En déduire que (u_n) est croissante.
4. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 2]$ par $f(x) = x\sqrt{2 - x}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Étudier la dérivabilité de f à gauche en 2 ; interpréter graphiquement.

2. Montrer que, pour tout $x < 2$, $f'(x) = \frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}}$. Dresser le tableau de variation de f (on calculera $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$).
3. Écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Exercice 14

1. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t}$ sur $[0, x]$, montrer que, pour tout réel $x \geq 0$:
$$\frac{x}{2\sqrt{1+x}} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}.$$
2. En déduire un encadrement de $\sqrt{1{,}01}$ d'amplitude inférieure à 10^{-4}.

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan x$.

1. Montrer que f est dérivable et que $f' = 1 + f^2$. En déduire que f est deux fois dérivable et exprimer f'' en fonction de f.
2. Étudier le signe de f'' ; préciser le point d'inflexion de la courbe et la tangente en ce point.
3. En étudiant $g(x) = \tan x - x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, montrer que $\tan x \geq x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Corrigés détaillés

Corrigé de l'exercice 1

Notons $g(x) = 2x^3 + bx^2 + cx$ pour tout réel x (g est un polynôme). Pour tout entier k et tout $x \in [k, k+1[$, $f(x) = g(x-k)$.

Sur les intervalles ouverts $]k, k+1[$. f y coïncide avec $x \mapsto g(x-k)$: elle est dérivable.

En un entier. Par périodicité, il suffit d'étudier la dérivabilité en 0. On a $f(0) = g(0) = 0$.

Condition nécessaire : continuité en 0. À droite, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = g(0) = 0$. À gauche, pour $x \in [-1{,}0[$, $f(x) = g(x+1)$, donc $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = g(1) = 2 + b + c$. La fonction f est continue en 0 si, et seulement si, $2 + b + c = 0$.

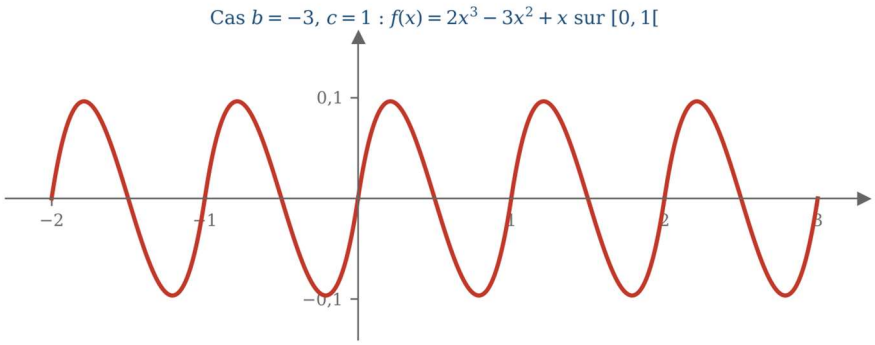
Dérivabilité. Supposons $2 + b + c = 0$, c'est-à-dire $g(1) = 0$.

• À droite : $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{g(x)-g(0)}{x} \to g'(0) = c$.

• À gauche : pour $x \in [-1{,}0[$, $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{g(x+1)-g(1)}{(x+1)-1} \to g'(1) = 6 + 2b + c$.

f est dérivable en 0 si, et seulement si, $6 + 2b + c = c$, soit $b = -3$; alors $c = -2 - b = 1$.

Conclusion. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $b = -3$ et $c = 1$, c'est-à-dire $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x = x(2x-1)(x-1)$ sur $[0{,}1[$. Dans tous les autres cas, f n'est pas dérivable aux points entiers (elle n'y est même pas continue si $b + c \neq -2$).



Exercice 1 : le seul cas où f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 2

Soit h la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = 0{,}9\tan x - \tan(0{,}9x)$. Pour x dans cet intervalle, $0 \leq 0{,}9x \leq x < \frac{\pi}{2}$: h est bien définie et dérivable, et

$$h'(x) = 0{,}9(1 + \tan^2 x) - 0{,}9\big(1 + \tan^2(0{,}9x)\big) = 0{,}9\big(\tan^2 x - \tan^2(0{,}9x)\big).$$

La fonction tangente est croissante et positive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\tan x \geq \tan(0{,}9x) \geq 0$ et $h'(x) \geq 0$, avec égalité seulement pour $x = 0$. Ainsi h est strictement croissante et $h(0) = 0$.

Conclusion. Pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$: $0{,}9\tan x \geq \tan(0{,}9x)$, avec égalité si, et seulement si, $x = 0$.

Corrigé de l'exercice 3

Soit $p \in \mathbb{N}$. La fonction cosinus est continue sur $[p, p+1]$ et dérivable sur $]p, p+1[$, de dérivée $x \mapsto -\sin x$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]p, p+1[$ tel que

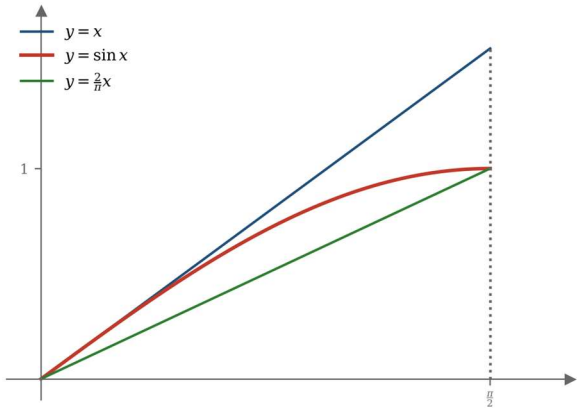
$$\cos(p+1) - \cos p = -\sin c \times \big((p+1) - p\big) = -\sin c,$$

c'est-à-dire $\cos(p+1) = \cos p - \sin c$.

Corrigé de l'exercice 4

1. • Soit $\varphi(x) = x - \sin x$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$: $\varphi'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, donc φ est croissante et $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$: $\sin x \leq x$.

• Soit $h(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$: $h'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$. La fonction h' est continue et strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $h'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$ et $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} < 0$: il existe un unique $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $h'(\alpha) = 0$, avec $h' > 0$ sur $[0,\alpha[$ et $h' < 0$ sur $\left]\alpha,\frac{\pi}{2}\right]$. Donc h est croissante sur $[0,\alpha]$ et décroissante sur $\left[\alpha,\frac{\pi}{2}\right]$. Comme $h(0) = 0$ et $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on a $h(x) \geq 0$ sur chacun des deux intervalles : $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$.



Exercice 4, question 1 : la courbe du sinus est entre sa tangente en O et la corde.

2. • Soit $\psi(x) = \tan x - x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: $\psi'(x) = \tan^2 x \geq 0$ et $\psi(0) = 0$, donc $\tan x \geq x$.

• Soit $k(x) = \frac{4}{\pi}x - \tan x$: $k'(x) = \frac{4}{\pi} - 1 - \tan^2 x$ est continue, strictement décroissante, $k'(0) = \frac{4}{\pi} - 1 > 0$ et $k'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi} - 2 < 0$. Comme en 1., k est croissante puis décroissante, et $k(0) = k\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, donc $k \geq 0$: $\tan x \leq \frac{4}{\pi}x$.

3. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; alors $t = \frac{\pi}{2} - x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos x = \sin t$. D'après 1. : $\frac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t$, c'est-à-dire $1 - \frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - x$.

4. La fonction cotangente est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, de dérivée $-(1 + \operatorname{cotan}^2 x)$. Sur cet intervalle, $0 \leq \operatorname{cotan} x \leq 1$, donc $-2 \leq \operatorname{cotan}'(x) \leq -1$. Pour $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, les inégalités des accroissements finis sur $\left[\frac{\pi}{4}, x\right]$ donnent

$$-2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \operatorname{cotan} x - \operatorname{cotan}\frac{\pi}{4} \leq -\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \qquad \text{soit} \qquad \frac{\pi}{2} - 2x \leq \operatorname{cotan} x - 1 \leq \frac{\pi}{4} - x.$$

Pour $x = \frac{\pi}{4}$, les trois membres sont nuls.

5. Soit $x > 0$. La fonction racine carrée est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$: il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$. Comme $x < c < x+1$, on a $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$, d'où le résultat.

6. La fonction sinus est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ et, sur cet intervalle, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ (le cosinus est décroissant). D'après les inégalités des accroissements finis, avec $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\pi}{12} \leq \sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{12}, \qquad \text{soit} \qquad \frac{\sqrt{2}\,\pi}{24} \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \leq \frac{\sqrt{3}\,\pi}{24}.$$

En multipliant par $\frac{2}{\pi}$: $\frac{\sqrt{2}}{12} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$.

Corrigé de l'exercice 5

Soit $\varphi(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. φ est dérivable et, en posant $c = \cos x \in]0,1]$:

$$\varphi'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{2c^3 - 3c^2 + 1}{c^2} = \frac{(c-1)^2(2c+1)}{c^2} \geq 0.$$

(En effet $2c^3 - 3c^2 + 1 = (c-1)(2c^2 - c - 1) = (c-1)^2(2c+1)$.)

Donc φ est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0 : 2\sin x + \tan x \geq 3x$.

Corrigé de l'exercice 6

1. P_n est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$, et $P_n'(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} \geq 1 > 0$: P_n est strictement croissante. $P_n(0) = -a < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x) = +\infty$. Donc l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $[0,+\infty[$, et $x_n > 0$.

$P_n(a) = a + a^2 + \cdots + a^n - a = \sum_{k=2}^{n} a^k \geq 0 = P_n(x_n)$; P_n étant strictement croissante, $x_n \leq a$. (Pour $n = 1$, $x_1 = a$; pour $n \geq 2$, $P_n(a) > 0$ et $x_n < a$.)

2. $P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{n+1}$, donc $P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} > 0 = P_{n+1}(x_{n+1})$. Comme P_{n+1} est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, on en déduit $x_n > x_{n+1}$: la suite (x_n) est strictement décroissante.

3. La suite est décroissante et minorée par 0 : elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.

Soit n_0 un entier tel que $n_0 > a$. Alors $P_{n_0}(1) = n_0 - a > 0 = P_{n_0}(x_{n_0})$, donc $x_{n_0} < 1$. La suite étant décroissante, $x_n \leq x_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$ et, à la limite, $\ell \leq x_{n_0} < 1$. Donc $0 \leq \ell < 1$.

4. Pour tout réel x : $(x-1)\sum_{k=1}^{n} x^k = x^{n+1} - x$, donc

$$(x-1)P_n(x) = x^{n+1} - x - a(x-1) = x^{n+1} - (a+1)x + a.$$

Comme $P_n(x_n) = 0$, on obtient $x_n^{n+1} - (a+1)x_n + a = 0$.

Posons $q = x_{n_0} < 1$. Pour $n \geq n_0$: $0 < x_n^{n+1} \leq q^{n+1}$, donc $\lim x_n^{n+1} = 0$. En passant à la limite dans l'égalité précédente : $-(a+1)\ell + a = 0$, soit $\ell = \frac{a}{a+1}$.

Corrigé de l'exercice 7

1. a) f_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $f_n'(x) = nx^{n-1} + 18x > 0$ pour $x > 0$: f_n est strictement croissante. $f_n(0) = -4 < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$. Par continuité, l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution u_n, et $u_n > 0$.

b) $f_1(x) = 9x^2 + x - 4 : \Delta = 145$, $u_1 = \frac{-1+\sqrt{145}}{18} \approx 0{,}613$. $f_2(x) = 10x^2 - 4 : u_2 = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \approx 0{,}632$.

c) $f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 4 - 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$ et $f_n(0) < 0$: comme f_n est strictement croissante et $f_n(u_n) = 0$, on a $0 < u_n < \frac{2}{3}$.

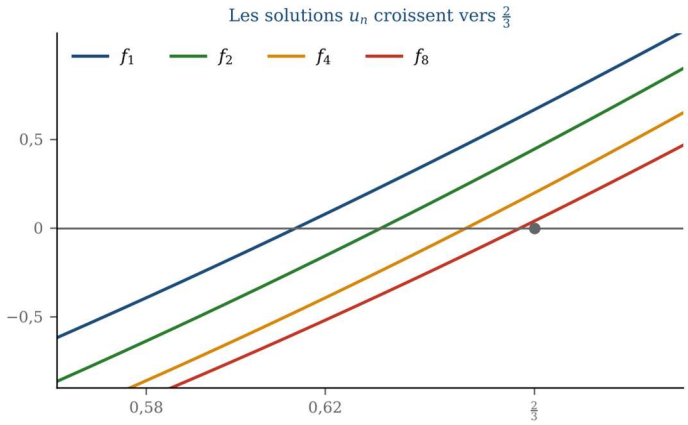
2. a) Pour $x \in]0,1[$: $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^n(x-1) < 0$.

b) $u_{n+1} \in]0,1[$, donc $f_n(u_{n+1}) > f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$. Ainsi $f_n(u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n)$ et, f_n étant strictement croissante, $u_{n+1} > u_n$: la suite (u_n) est strictement croissante.

c) Croissante et majorée par $\frac{2}{3}$, la suite converge vers un réel ℓ.

3. a) $0 < (u_n)^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$: $\lim(u_n)^n = 0$.

b) $(u_n)^n + 9u_n^2 - 4 = 0$; à la limite, $9\ell^2 - 4 = 0$ et, comme $\ell > 0$, $\ell = \frac{2}{3}$.



Exercice 7 : les courbes de f_n au voisinage de leurs zéros.

Corrigé de l'exercice 8

1. et 2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(x) = a^n f(x+nb)$ pour tout réel x.

• Pour $n = 1$, c'est l'hypothèse.

• Supposons la propriété vraie au rang n. La fonction $x \mapsto f(x+nb)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée de f et d'une fonction affine), de dérivée $x \mapsto f'(x+nb)$. Donc $f^{(n)}$ est dérivable et

$$f^{(n+1)}(x) = a^n f'(x+nb) = a^n \times a\, f(x+nb+b) = a^{n+1} f(x+(n+1)b).$$

On peut donc prendre $a_n = a^n$ et $b_n = nb$: (a_n) est géométrique de raison a et de premier terme $a_1 = a$; (b_n) est arithmétique de raison b et de premier terme $b_1 = b$.

Remarque. Le couple (a_n, b_n) n'est pas unique en général (voir l'exemple ci-dessous, où l'on peut ajouter 2π à b_n) ; c'est pourquoi l'énoncé demande seulement l'existence de telles suites.

3. $f = \sin$ convient avec $a = 1$ et $b = \frac{\pi}{2}$: $\sin'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. On retrouve $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Corrigé de l'exercice 9

1. Soit $h = f - g$, continue sur $[a,b]$. $h(a) = f(a) - g(a)$ et $h(b) = f(b) - g(b) = g(a) - f(a) = -h(a)$. Donc $h(a)$ et $h(b)$ sont opposés : 0 est compris entre $h(a)$ et $h(b)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $h(x_0) = 0$, soit $f(x_0) = g(x_0)$.

2. Soit $k = f + g$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. $k(a) = f(a) + g(a) = g(b) + f(b) = k(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $x_1 \in]a,b[$ tel que $k'(x_1) = 0$, soit $f'(x_1) = -g'(x_1)$.

Corrigé de l'exercice 10

1. Par l'absurde : si $g(a) = g(b)$, le théorème de Rolle appliqué à g donnerait un réel $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $g(a) \neq g(b)$.

2. $h(b) = 0 \Leftrightarrow f(b) - f(a) = \omega\big(g(b) - g(a)\big) \Leftrightarrow \omega = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

3. h est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $h(a) = 0 = h(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$, c'est-à-dire $f'(c) = \omega g'(c)$. Comme $g'(c) \neq 0$: $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \omega = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

4. Soit $x \in]a,b]$. Les hypothèses sont vérifiées sur $[a,x]$; d'après 1. et 3., $g(x) \neq g(a)$ et il existe $c_x \in]a,x[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{t\to a^+} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \ell$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - \ell\right| < \varepsilon$ dès que $a < t < a+\alpha$. Si $a < x < a+\alpha$, alors $a < c_x < x < a+\alpha$, donc $\left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} - \ell\right| < \varepsilon$. D'où $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell$.

5. • Prenons $f(x) = \cos x$ et $g(x) = x^2$ sur $[0,1]$: $g'(x) = 2x \neq 0$ sur $]0,1[$ et $\frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{\sin x}{2x} \to -\frac{1}{2}$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$. La fonction $x \mapsto \frac{\cos x-1}{x^2}$ étant paire, la limite à gauche est la même : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

• Prenons $f(x) = \sin x - x$ et $g(x) = x^3$ sur $[0,1]$: $g'(x) = 3x^2 \neq 0$ sur $]0,1[$ et $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos x-1}{3x^2} \to -\frac{1}{6}$ d'après le calcul précédent. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x-}{x^3} = -\frac{1}{6}$, et par parité $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x-x}{x^3} = -\frac{1}{6}$.

Remarque. On retrouve la valeur obtenue autrement à l'exercice 16 du chapitre 1. Le résultat de la question 4 est connu sous le nom de règle de L'Hôpital ; il n'est pas au programme et doit être redémontré avant tout usage.

Corrigé de l'exercice 11

1. f est paire : pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$. En dérivant les deux membres (dérivée d'une composée) : $-f'(-x) = f'(x)$. Pour $x = 0$: $-f'(0) = f'(0)$, donc $f'(0) = 0$. Le réel $a = 0$ convient.

Autre méthode. f est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et $f(-1) = f(1)$: le théorème de Rolle donne $a \in]-1,1[$ tel que $f'(a) = 0$.

2. f est impaire : $f(-x) = -f(x)$. En dérivant : $-f'(-x) = -f'(x)$, soit $f'(-x) = f'(x)$ (f' est paire). En dérivant de nouveau : $-f''(-x) = f''(x)$, d'où $f''(0) = 0$. Le réel $b = 0$ convient.

Corrigé de l'exercice 12

1. f_n est continue et dérivable sur $[0,1]$, $f_n{}'(x) = nx^{n-1} + t > 0$: f_n est strictement croissante sur $[0,1]$. $f_n(0) = -t < 0$ et $f_n(1) = 1 > 0$. Donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n dans $[0,1]$, et $0 < u_n < 1$.

2. Par définition, $u_n^n = t(1-u_n)$. Donc

$$f_{n+1}(u_n) = u_n \times u_n^n - t(1-u_n) = t(1-u_n)(u_n-1) = -t(1-u_n)^2.$$

3. $f_{n+1}(u_n) < 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$ et f_{n+1} est strictement croissante sur $[0,1]$: $u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est strictement croissante.

4. Croissante et majorée par 1, (u_n) converge vers un réel ℓ tel que $0 < u_1 \leq \ell \leq 1$.

Supposons $\ell < 1$. Pour tout n, $0 < u_n \leq \ell$, donc $0 < u_n^n \leq \ell^n$ et $\lim u_n^n = 0$. Or $u_n^n = t(1-u_n)$ tend vers $t(1-\ell)$: on aurait $t(1-\ell) = 0$, donc $\ell = 1$ puisque $t > 0$, ce qui est contradictoire.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

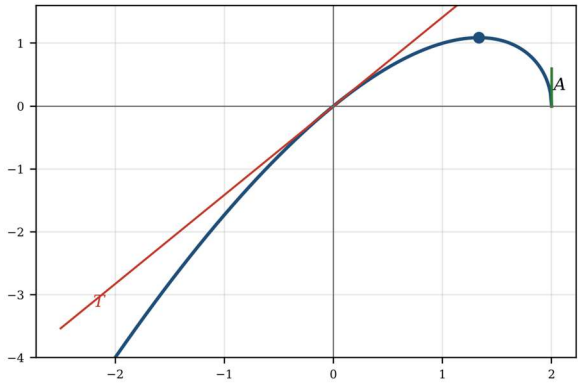
Corrigé de l'exercice 13

1. Pour $x < 2$: $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x\sqrt{2-x}}{x-2} = -\frac{x}{\sqrt{2-x}} \underset{x\to 2^-}{\to} -\infty$. f n'est pas dérivable à gauche en 2 : $\mathcal{C}$ admet au point $A(2,0)$ une **demi-tangente verticale**.

2. Pour $x<2$: $f'(x)=\sqrt{2-x}-\frac{x}{2\sqrt{2-x}}=\frac{2(2-x)-x}{2\sqrt{2-x}}=\frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}}$, du signe de $4-3x$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. Le maximum est $f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{9}$.

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
f	$-\infty$	↗	$\frac{4\sqrt{6}}{9}$	↘	0

3. $f(0)=0$ et $f'(0)=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$: T: $y=\sqrt{2}\,x$.



Exercice 13 : la courbe de $f(x)=x\sqrt{2-x}$, sa tangente en O et la demi-tangente verticale en $A(2,0)$.

Corrigé de l'exercice 14

1. $\varphi(t)=\sqrt{1+t}$ est dérivable sur $[0,x]$ et $\varphi'(t)=\frac{1}{2\sqrt{1+t}}$; pour $t\in[0,x]$: $\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\le\varphi'(t)\le\frac{1}{2}$. L'inégalité des accroissements finis donne $\frac{x}{2\sqrt{1+x}}\le\varphi(x)-\varphi(0)\le\frac{x}{2}$.

2. Avec $x=0{,}01$: $\sqrt{1{,}01}\le 1{,}005$, puis $\sqrt{1{,}01}-1\ge\frac{0{,}01}{2\sqrt{1{,}01}}\ge\frac{0{,}01}{2\times1{,}005}>0{,}004\,975$. Donc

$$1{,}004\,975\le\sqrt{1{,}01}\le 1{,}005 \qquad (\text{amplitude } 2{,}5\times10^{-5}<10^{-4}).$$

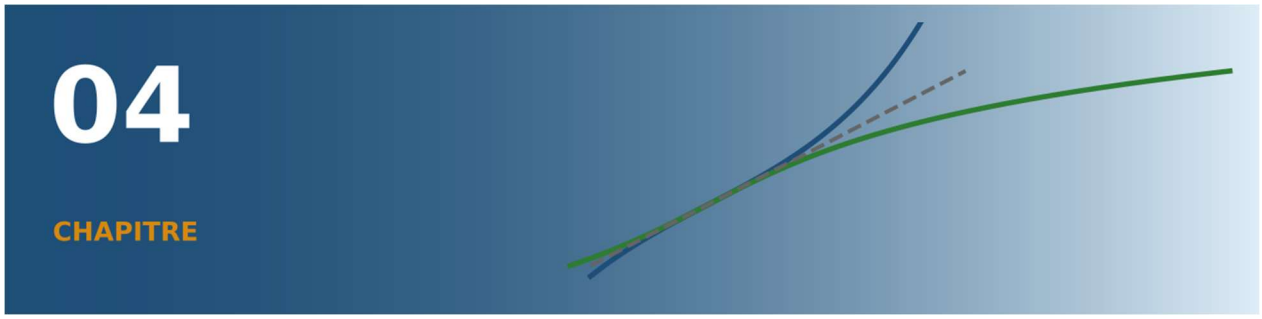
Corrigé de l'exercice 15

1. $\tan=\frac{\sin}{\cos}$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $f'=\frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2}=1+\tan^2=1+f^2$. f' est dérivable (composée), et $f''=2ff'=2f(1+f^2)$.

2. $f''(x)$ est du signe de $\tan x$: négatif sur $\left]-\frac{\pi}{2},0\right]$, positif sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. f'' s'annule en changeant de signe en 0 : O est un **point d'inflexion**, de tangente $y=f'(0)x=x$.

3. $g'(x)=1+\tan^2x-1=\tan^2x\ge0$: g est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $g(0)=0$, donc $g(x)\ge0$, soit $\tan x\ge x$.

Chapitre 4 — Fonctions réciproques



Cours • 16 exercices • Corrigés détaillés

Ce que vous devez savoir faire à la fin du chapitre
– Montrer qu'une fonction réalise une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J et déterminer J.
– Expliciter, lorsque c'est possible, la fonction réciproque.
– Étudier la continuité, la monotonie et la dérivabilité d'une fonction réciproque ; calculer $(f^{-1})'(b)$ sans expliciter f^{-1}.
– Tracer la courbe de f^{-1} à partir de celle de f.
– Utiliser les fonctions racine n-ième : calculs, limites, dérivées.

Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 1, chapitre 4).

Cours

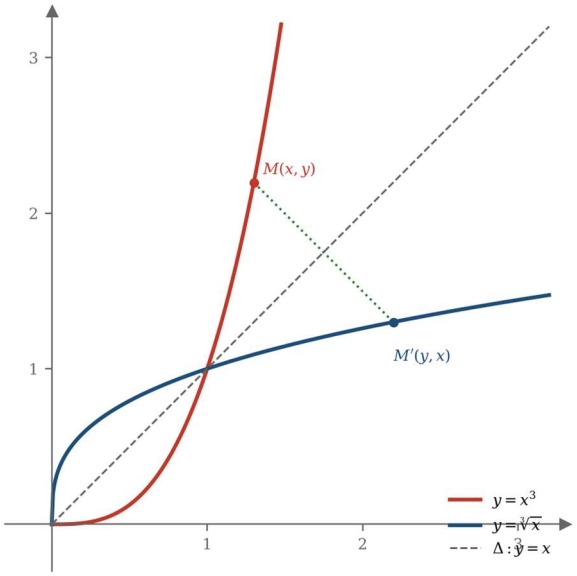
I. Bijection, fonction réciproque

Définition. Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I. On dit que f **réalise une bijection** de I sur $f(I)$ si, pour tout y de $f(I)$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I.
La fonction qui à tout y de $f(I)$ associe cette unique solution est la **fonction réciproque** de f, notée f^{-1} :

$$\big(x \in I \text{ et } y = f(x)\big) \Leftrightarrow \big(y \in f(I) \text{ et } x = f^{-1}(y)\big).$$

En particulier $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ pour tout $x \in I$ et $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$ pour tout $y \in f(I)$.

Théorème. Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
Théorème. Si f est **continue** et strictement monotone sur un intervalle I, alors :
– $f(I)$ est un intervalle de même nature que I (chapitre 1) ;
– sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, et varie dans le même sens que f.
Conséquence. Dans un repère orthonormé, les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$.



Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à Δ.

Méthode — montrer que f réalise une bijection de I sur J.

1. Justifier que f est continue sur I.
2. Justifier que f est strictement monotone sur I (signe de f').
3. Déterminer $J = f(I)$ à l'aide des valeurs ou des limites de f aux bornes de I.

Méthode — expliciter f^{-1}. Pour $y \in J$, résoudre dans I l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x ; ne pas oublier les conditions de signe lorsqu'on élève au carré.

Exemple. Soit $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$ sur $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. f est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2} < 0$: f est continue et strictement décroissante sur I. Elle réalise donc une bijection de I sur

$$J = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x)\right[= \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$

Pour $y \in J$ et $x \in I$: $y = \frac{x+1}{2x+1} \Leftrightarrow 2xy + y = x + 1 \Leftrightarrow x(2y-1) = 1 - y \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{2y-1}$. Donc, pour tout $x \in J$, $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2x-1}$.

II. Dérivabilité de la fonction réciproque

Théorème. Soit f une fonction strictement monotone d'un intervalle I sur $f(I)$, a un réel de I et $b = f(a)$. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Ce résultat reste valable pour une dérivée à droite ou à gauche en a.

Corollaire. Si f est une bijection de I sur $f(I)$, dérivable sur I et telle que $f'(x) \neq 0$ pour tout x de I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ pour tout y de $f(I)$.

Interprétation graphique. Par symétrie par rapport à Δ :
– si $f'(a) = 0$ (tangente horizontale en $A(a,b)$), la courbe de f^{-1} a une tangente **verticale** en $A'(b,a)$: f^{-1} n'est pas dérivable en b ;
– si $\mathcal{C}_f$ a une demi-tangente verticale en $A(a,b)$, la courbe de f^{-1} a une demi-tangente **horizontale** en $A'(b,a)$: f^{-1} est dérivable (à droite ou à gauche) en b, de nombre dérivé 0.

III. Fonction racine n-ième

Théorème et définition. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. Sa réciproque, strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$, est la fonction **racine n-ième**, notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Pour tous réels positifs x et y : $y = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$. Ainsi $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ et $\sqrt[n]{x^n} = x$; de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Règles de calcul. Soit $n \geq 2$ et $p \geq 2$ deux entiers, a et b deux réels positifs.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}, \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ (b>0), \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}, \qquad \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}, \qquad \sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}.$$

Théorème (dérivation). Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Soit u une fonction dérivable et positive sur un intervalle I. La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I, dérivable en tout réel x de I tel que $u(x) > 0$, et sa dérivée est $\frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u(x)^{n-1}}}$.

Équation $x^n = a$ ($n \geq 2$, a réel).

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n pair	deux solutions : $\sqrt[n]{a}$ et $-\sqrt[n]{a}$	une solution : 0	aucune solution
n impair	une solution : $\sqrt[n]{a}$	une solution : 0	une solution : $-\sqrt[n]{-a}$

Exemple. Soit $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ sur $I = [2,+\infty[$. La fonction $u: x \mapsto x-2$ est continue et positive sur I, donc f est continue sur I ; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt[3]{X} = +\infty$, donc $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Enfin f est strictement croissante sur I comme composée de deux fonctions strictement croissantes ; sur $]2,+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

Exercices

Exercice 1

Soit a un réel strictement positif et f_a la fonction définie sur $[0,a]$ par $f_a(x) = \frac{a-x}{a(a+x)}$.

1. Montrer que f_a réalise une bijection de $[0,a]$ sur $\left[0,\frac{1}{a}\right]$. On note f_a^{-1} sa réciproque.
2. Donner le tableau de variation de f_a^{-1} en précisant les valeurs aux bornes.
3. Montrer que $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4x^2+x} + 2x + 1$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0,+\infty[$.

2. Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
3. Sur quel ensemble f^{-1} est-elle continue ?
4. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = x + 2$ admet une solution unique $\alpha \in \left]\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right[$.

Exercice 3

Soit $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Étudier la dérivabilité de f sur D_f.
3. Montrer que f est une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
4. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Exercice 4

Soit $f : x \mapsto 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
3. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.
4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et calculer $(f^{-1})'(1)$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $[-1,1]\backslash\{0\}$ par $f(x) = 1 + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

Partie A

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; interpréter les résultats.
2. Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat.
3. Étudier la dérivabilité de f à droite en -1 et interpréter le résultat.
4. Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[\backslash\{0\} : f'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Montrer que f réalise une bijection de $]0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
7. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.
8. Représenter dans le même repère la courbe $\mathcal{C}$ et la courbe $\mathcal{C}'$ de f^{-1}.

Partie B. Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f(\cos x)$.

1. Montrer que, pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[: g(x) = 1 + \tan x$.
2. Étudier le sens de variation de g.

3. Montrer que l'équation $g(x) = 2 - x$ admet une unique solution α dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et vérifier que $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.
4. Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
5. Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et que, pour tout $x \in K$: $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
2. Étudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter le résultat.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
5. Montrer que, pour tout x de J : $f^{-1}(x) = \frac{1+x^2}{2x}$.
6. On désigne par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les courbes de f et f^{-1} dans un même repère orthonormé. Montrer que la droite $D: y = 2x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}$.
7. Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
8. Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$.
   a) Montrer que, pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$: $g(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}$.
   b) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
   c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et que, pour tout x de K : $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 12x + 1$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \sqrt{1 + x^2} - x$ si $x > 0$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
2. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.
4. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-\infty, 0]$ une solution unique α. Vérifier que $\alpha \in \left]-\frac{1}{12}, 0\right[$.
6. Soit g la restriction de f à $]0, +\infty[$.
   a) Montrer que g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) Étudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1} sur J.
   c) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.

Exercice 8

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$ si $x > 0$ et $f(x) = \frac{1}{2}\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ si $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq 0$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
2. Soit g la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.
   a) Montrer que g est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) Déterminer le domaine de dérivabilité de g^{-1}, puis expliciter $(g^{-1})'(x)$.
3.
   a) Montrer que l'équation $g(x) + x = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[$.
   b) En déduire que le point $I(-\alpha, \alpha)$ appartient à la fois à la courbe de g^{-1} et à la droite $D: y = -x$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit h la fonction réciproque de f. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(x)$ pour tout réel x.
3. Soit φ la fonction définie sur $[0,1[$ par $\varphi(x) = h\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
   a) Montrer que φ est dérivable sur $[0,1[$ et calculer $\varphi'(x)$.
   b) En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$: $\varphi(x) = \frac{\pi}{4} + h(x)$.
4. Soit g la fonction définie sur $[0,1[$ par $g(x) = h\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - (1 + 2x)h(x)$.
   a) Montrer que g est deux fois dérivable sur $[0,1[$ et calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
   b) Étudier les variations de g' sur $[0,1[$, puis en déduire celles de g.
   c) En déduire qu'il existe un unique réel $c \in \left]\frac{1}{4}, 1\right[$ tel que $c = \tan\frac{\pi}{8c}$.
5.
   a) Montrer que l'équation $h(1 - x) = 2h(x)$ admet au moins une solution α dans $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que α vérifie : $\alpha^3 - \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$.

Exercice 10

Soit $f: x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f.
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 ; définir ce prolongement.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ par $f(x) = \sqrt[3]{2\cos x - 1}$.

1. Étudier la dérivabilité de f sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

2. Montrer que f est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ sur $[0,1]$.
3. Soit f^{-1} la réciproque de f. Calculer $(f^{-1})'\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\right)$.
4. Préciser le domaine K de dérivabilité de f^{-1}.
5. Déterminer l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour tout x de K.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x+\sqrt[3]{x}$.

1. Soit $x\in\,]0,+\infty[$. Montrer que, pour tout $\beta\in[x,x+1]$: $\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}+1\leq f'(\beta)\leq\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+1$.
2. En déduire que, pour tout $x\in\,]0,+\infty[$: $\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}+1\leq f(x+1)-f(x)\leq\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+1$.
3. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & \text{si } x\leq 0\\ 2x^2 & \text{si } 0<x<\frac{1}{2}\\ x+\sqrt{2x-1} & \text{si } x\geq\frac{1}{2}\end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Établir que

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt[3]{-x} & \text{si } x\leq 0\\ \sqrt{\frac{x}{2}} & \text{si } 0<x<\frac{1}{2}\\ x+1-\sqrt{2x} & \text{si } x\geq\frac{1}{2}\end{cases}$$

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\frac{1}{\sin x}$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que f est une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle I que l'on déterminera.
3. On désigne par g la fonction réciproque de f. Calculer $g(1)$, $g\left(\sqrt{2}\right)$ et $g(2)$.
4. Montrer que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que, pour tout $x>1$: $g'(x)=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$. La fonction g est-elle dérivable en 1 ?
5. Soit h la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x)=f(x)+\frac{1}{4}$. Montrer que l'équation $h(x)=x$ admet une solution unique x_0, et que $\frac{\pi}{3}<x_0<\frac{\pi}{2}$.

Exercice 15

Partie I. On considère la fonction g définie sur $[0,1[$ par $g(x)=\sqrt{\frac{2x}{1-x^2}}$.

1. Montrer que g n'est pas dérivable à droite en 0.
2. Étudier les variations de g et en déduire que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle I que l'on déterminera.
3. Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x \in I$.
4. Vérifier que, pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[: g\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\tan x}$.

Partie II. On considère la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=2\sqrt{\tan x}-1$.

1. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement.
2. Dresser le tableau de variation de f et en déduire que f est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
3. Montrer que, pour tout x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[: f'(x)>1$.
4. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ une solution unique α et vérifier que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right[$.
5. En déduire le signe de $f(x)-x$.
6. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \geq \alpha$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

Partie III. On considère la fonction φ définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $\varphi(x)=\sqrt{\tan x}$.

1. Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J' que l'on déterminera.
2. Montrer que, pour tout x de $]0,+\infty[: (\varphi^{-1})'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$.
3. Calculer $\varphi^{-1}(1)$ et montrer que, pour tout x de $]0,+\infty[: \varphi^{-1}(x)+\varphi^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 16

Partie I. Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $]-1,1[$ une solution unique α et que $\alpha>\frac{4}{5}$.
3. En déduire le signe de $f(x)-x$.
4. Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que, pour tout réel $x : f^{-1}(x)=\frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$.

Partie II. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0,\alpha]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$.

1.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq \alpha$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.
2. Montrer que, pour tout $x \geq 0$: $|(f^{-1})'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|$. Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie III. Soit h la fonction définie sur $]-1,1[$ par $h(x) = f\left(-\sin\frac{\pi x}{2}\right)$.

1. Montrer que, pour tout x de $]-1,1[$: $h(x) = -1 - \tan\frac{\pi x}{2}$.
2. Montrer que h établit une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que h^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(h^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi(1+(x+1)^2)}$.
4. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $H(x) = h^{-1}(x-1) + h^{-1}\left(\frac{1}{x} - 1\right)$.
   a) Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer $H'(x)$.
   b) Calculer $H\left(\frac{1}{2}\right)$ et $H\left(-\frac{1}{2}\right)$. En déduire que $H(x) = -1$ si $x > 0$ et $H(x) = 1$ si $x < 0$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^{n}\left[h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)\right]$ et $w_n = \frac{v_n}{n}$.
   a) Donner la valeur de $H\left(1+\frac{1}{k}\right)$. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) = -1$.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = -n - h^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$. En déduire que la suite (w_n) est convergente et donner sa limite.

Corrigés détaillés

Corrigé de l'exercice 1

1. f_a est dérivable sur $[0,a]$ et $f_a'(x) = \frac{-(a+x)-(a-x)}{a(a+x)^2} = \frac{-2}{(a+x)^2} < 0$. Donc f_a est continue et strictement décroissante sur $[0,a]$: elle réalise une bijection de $[0,a]$ sur $[f_a(a), f_a(0)] = \left[0, \frac{1}{a}\right]$.

2. f_a^{-1} est continue et strictement décroissante sur $\left[0,\frac{1}{a}\right]$, avec $f_a^{-1}(0) = a$ et $f_a^{-1}\left(\frac{1}{a}\right) = 0$.

x	0		$\frac{1}{a}$
$f_a^{-1}(x)$	a	↘	0

3. Soit $y \in \left[0,\frac{1}{a}\right]$ et $x \in [0,a]$:

$$y = \frac{a-x}{a(a+x)} \Leftrightarrow a^2y + axy = a - x \Leftrightarrow x(1+ay) = a(1-ay) \Leftrightarrow x = \frac{a(1-ay)}{1+ay}.$$

D'autre part $f_{\frac{1}{a}}$ est définie sur $\left[0,\frac{1}{a}\right]$ par $f_{\frac{1}{a}}(y)=\frac{\frac{1}{a}-y}{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}+y\right)}=\frac{a(1-ay)}{1+ay}$. Donc $f_a^{-1}=f_{\frac{1}{a}}$.

Corrigé de l'exercice 2

1. $u: x\mapsto 4x^2+x$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, donc f est continue sur $[0,+\infty[$. Sur $]0,+\infty[$, $u>0$, donc f est dérivable et $f'(x)=\frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x}}+2$.

En 0 : pour $x>0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x}+2=\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2\to+\infty$. f n'est pas dérivable à droite en 0 ; sa courbe admet au point $(0,1)$ une demi-tangente verticale.

2. $f'(x)>0$ sur $]0,+\infty[$ et f est continue en 0 : f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. $f(0)=1$ et $\lim\limits_{+\infty}f=+\infty$. Donc f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $J=[1,+\infty[$.

3. f étant continue et strictement monotone, f^{-1} est continue sur $J=[1,+\infty[$.

4. Soit $y\geq 1$ et $x\geq 0$. $y=f(x)\Leftrightarrow\sqrt{4x^2+x}=y-1-2x$, ce qui équivaut à

$$y-1-2x\geq 0\quad\text{et}\quad 4x^2+x=(y-1)^2-4x(y-1)+4x^2,\quad\text{soit}\quad x(4y-3)=(y-1)^2.$$

Donc $x=\frac{(y-1)^2}{4y-3}$; on vérifie que $y-1-2x=\frac{(y-1)(2y-1)}{4y-3}\geq 0$. Ainsi, pour tout $x\in J$: $f^{-1}(x)=\frac{(x-1)^2}{4x-3}$.

5. Soit $k(x)=f(x)-x-2=\sqrt{4x^2+x}+x-1$. k est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ (somme de fonctions strictement croissantes). $k\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{4}<0$ (car $\sqrt{2}<1{,}5$) et $k\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}>0$. Donc l'équation $f(x)=x+2$ admet une solution unique α, et $\alpha\in\left]\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right[$.

Corrigé de l'exercice 3

1. $f(x)$ existe si, et seulement si, $x\neq 1$ et $\frac{x}{1-x}\geq 0$, soit $0\leq x<1$: $D_f=[0,1[$.

2. $u: x\mapsto\frac{x}{1-x}$ est dérivable sur $[0,1[$, $u'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$, et $u(x)>0$ sur $]0,1[$. Donc f est dérivable sur $]0,1[$ et $f'(x)=\frac{1}{2(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

En 0 : $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\sqrt{\frac{1}{x(1-x)}}\to+\infty$: f n'est pas dérivable à droite en 0 (demi-tangente verticale à l'origine).

3. f est continue sur $[0,1[$ et $f'>0$ sur $]0,1[$: f est strictement croissante. $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=+\infty$. Donc $J=[0,+\infty[$.

4. Pour $y\geq 0$ et $x\in[0,1[$: $y=f(x)\Leftrightarrow y^2=\frac{x}{1-x}\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{1+y^2}$. Donc $f^{-1}(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ pour $x\geq 0$.

Corrigé de l'exercice 4

1. $x\mapsto 1+x^2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}>0.$$

2. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$, on a $\lim\limits_{+\infty}f=2$ et $\lim\limits_{-\infty}f=0$.

Donc $J=]0,2[$.

3. Soit $y \in]0,2[$. $y = f(x) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Alors x et $y-1$ ont le même signe et $(y-1)^2(1+x^2) = x^2$, soit $x^2 = \frac{(y-1)^2}{1-(y-1)^2}$. Donc $x = \frac{y-1}{\sqrt{1-(y-1)^2}}$ et

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}}, \qquad x \in]0,2[.$$

4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' ne s'annule pas : f^{-1} est dérivable sur J. $f(0) = 1$, donc $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = 1$.

Corrigé de l'exercice 5

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$. La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à $\mathcal{C}$.

2. $f(1) = 1$. Pour $x \in]0,1[$: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{(1-x)(1+x)}}{-x(1-x)} = -\frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x}} \to -\infty$ lorsque $x \to 1^-$. f n'est pas dérivable à gauche en 1 ; $\mathcal{C}$ admet au point $(1,1)$ une demi-tangente verticale.

3. $f(-1) = 1$. Pour $x \in]-1,0[$: $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{\sqrt{1-x}}{x\sqrt{1+x}} \to -\infty$ lorsque $x \to (-1)^+$ (car $x < 0$). f n'est pas dérivable à droite en -1 ; $\mathcal{C}$ admet au point $(-1,1)$ une demi-tangente verticale.

4. Pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$:

$$f'(x) = \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \times x - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{-x^2-(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

5. $f' < 0$: f est strictement décroissante sur $[-1,0[$ et sur $]0,1]$.

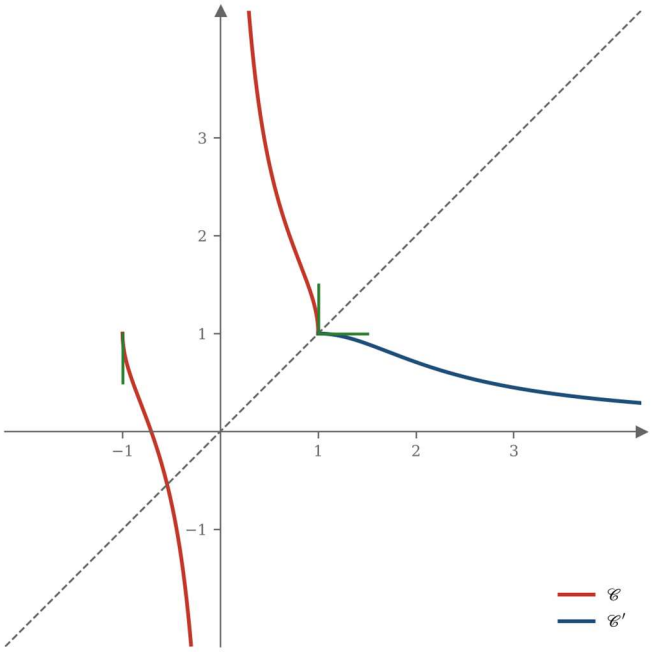
x	-1		0		1
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

6. f est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$, $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$ et $\lim\limits_{1^-} f = 1$: $J =]1,+\infty[$.

7. Soit $y > 1$ et $x \in]0,1[$. $y = f(x) \Leftrightarrow (y-1)x = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow (y-1)^2x^2 = 1-x^2$ (les deux membres étant positifs) $\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{1+(y-1)^2}$. Donc

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}, \qquad x > 1.$$

8. $\mathcal{C}'$ est la symétrique, par rapport à la droite $y = x$, de la partie de $\mathcal{C}$ correspondant à $x \in]0,1[$.



Exercice 5 : la courbe $\mathcal{C}$ (en rouge) et la courbe $\mathcal{C}'$ de f^{-1} (en bleu).

Partie B

1. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x \in]0,1]$ et $\sin x \geq 0$, donc $\sqrt{1-\cos^2 x} = \sin x$ et $g(x) = 1 + \frac{\sin x}{\cos x} = 1 + \tan x$.

2. $g'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$: g est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3. Soit $k(x) = g(x) - (2 - x) = \tan x + x - 1$. k est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $k(0) = -1 < 0$ et $k\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} > 0$. Donc l'équation admet une unique solution α, et $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

Remarque. L'équation $g(x) = x$ n'a, elle, aucune solution : $g(x) - x = 1 + \tan x - x \geq 1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, puisque $\tan x \geq x$.

4. g est continue et strictement croissante, $g(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x) = +\infty$: $K = [1, +\infty[$.

5. g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et g' ne s'annule pas : g^{-1} est dérivable sur K. Soit $x \in K$ et $y = g^{-1}(x)$: $\tan y = x - 1$ et

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + (x-1)^2} = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}.$$

Corrigé de l'exercice 6

1. $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable et strictement positive sur $]1, +\infty[$: f y est dérivable et $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

2. Pour $x > 1$: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = 1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \to +\infty$. f n'est pas dérivable à droite en 1 ; $\mathcal{C}$ admet au point $(1,1)$ une demi-tangente verticale.

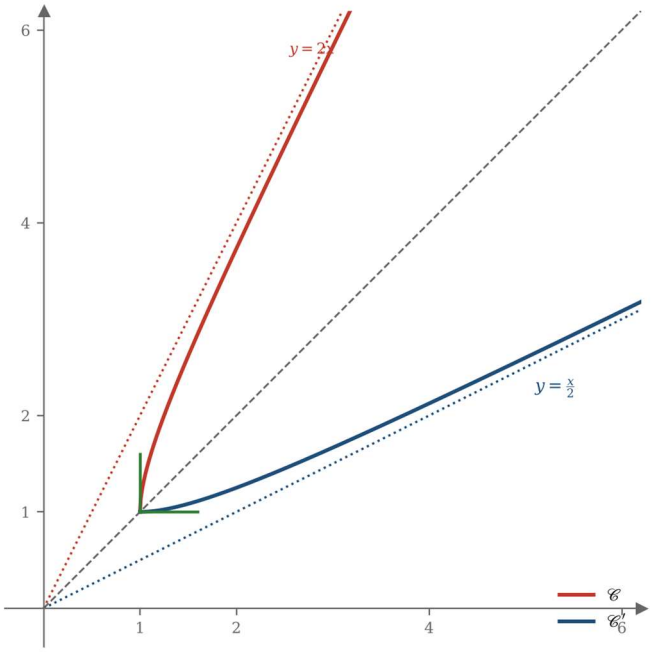
3. $f'(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$: f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, de $f(1) = 1$ à $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

4. f étant continue et strictement croissante, $J = [1, +\infty[$.

5. Soit $y \geq 1$ et $x \geq 1$. $y = f(x) \Leftrightarrow y - x = \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow (y - x \geq 0$ et $y^2 - 2xy = -1)$. La seconde relation donne $x = \frac{1+y^2}{2y}$, et alors $y - x = \frac{y^2-1}{2y} \geq 0$. Donc $f^{-1}(x) = \frac{1+x^2}{2x}$ pour tout $x \in J$.

6. $f(x) - 2x = \sqrt{x^2-1} - x = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$: la droite $D: y = 2x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}$, et $\mathcal{C}$ est en dessous de D.

7. $\mathcal{C}'$ est la symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $y = x$; elle admet la droite $y = \frac{x}{2}$ pour asymptote et une demi-tangente horizontale au point (1,1).



Exercice 6 : les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et leurs asymptotes.

8. a) Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{1}{\cos x} \geq 1$ et $\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x$ avec $\tan x \geq 0$. Donc $g(x) = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin}{\cos x}$.

b) $g'(x) = \frac{\cos^2 x + (1+\sin)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin}{\cos^2 x} > 0$. g est continue et strictement croissante, $g(0) = 1$ et $\lim_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} g = +\infty$: $K = [1, +\infty[$.

c) g' ne s'annule pas : g^{-1} est dérivable sur K. Soit $x \in K$ et $y = g^{-1}(x)$, c'est-à-dire $x = \frac{1+\sin}{\cos y}$. Alors

$$1 + x^2 = \frac{\cos^2 y + 1 + 2\sin y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{2(1+\sin y)}{\cos^2 y} = 2g'(y).$$

Donc $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{2}{1+x^2}$.

Corrigé de l'exercice 7

1. Pour $x > 0$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$, donc $\lim_{+\infty} f = 0$. $\lim_{-\infty} f = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

2. f est continue sur $]-\infty, 0]$ (polynôme) et sur $]0, +\infty[$. En 0 : $f(0) = 1$ et $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. À gauche : $f'_g(0) = 3 \times 0^2 + 12 = 12$. À droite, pour $x > 0$:

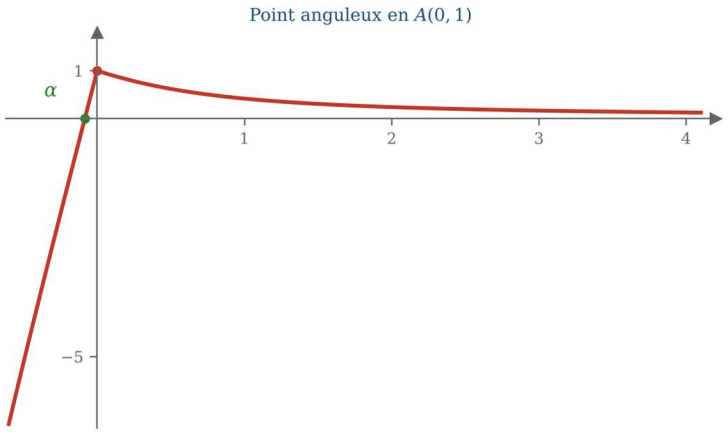
$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} - 1 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} - 1 \to -1.$$

$f'_d(0) = -1 \neq f'_g(0)$: f n'est pas dérivable en 0 ; le point $A(0,1)$ est un point anguleux.

4. Pour $x < 0$: $f'(x) = 3x^2 + 12 > 0$. Pour $x > 0$: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 < 0$ car $x < \sqrt{1+x^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

5. Sur $]-\infty, 0]$, f est continue, strictement croissante, $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $f(0) = 1$: l'équation $f(x) = 0$ y admet une solution unique α. De plus $f\left(-\frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{1728} - 1 + 1 < 0$ et $f(0) > 0$, donc $\alpha \in \left]-\frac{1}{12}, 0\right[$.



Exercice 7 : courbe de f.

6. a) g est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, $\lim\limits_{0^+} g = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} g = 0$: $J =]0,1[$.

b) g^{-1} est continue sur J. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) \neq 0$: g^{-1} est dérivable sur J.

c) Soit $y \in]0,1[$ et $x > 0$. $y = \sqrt{1+x^2} - x \Leftrightarrow y + x = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow y^2 + 2xy = 1$ (car $y + x > 0$) $\Leftrightarrow x = \frac{1-y^2}{2y}$. Donc $g^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{2x}$ pour $x \in]0,1[$.

Corrigé de l'exercice 8

L'ensemble de définition est $D = \left[-\frac{\pi}{4}, +\infty\right[$ (pour $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$, $x + \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$).

1. *Continuité.* f est continue sur $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ et sur $]0, +\infty[$. En 0 : $f(0) = \frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$; pour $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} \to \frac{1}{2}$. Donc f est continue sur D.

Dérivabilité. f est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right[$ (à droite en $-\frac{\pi}{4}$) et sur $]0, +\infty[$. En 0 :

• à gauche : $f'_g(0) = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{\pi}{4}\right) = 1$;

• à droite : $\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x} = \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{2x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \frac{-x}{2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^2} \to 0$, donc $f'_d(0) = 0$.

f n'est pas dérivable en 0 (point anguleux) ; elle est dérivable sur $D\backslash\{0\}$.

2. a) $g'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) > 0$: g est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$, $g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $g(0) = \frac{1}{2}$. Donc $J = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

b) g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ et g' ne s'annule pas : g^{-1} est dérivable sur $J = \left]0, \frac{1}{2}\right]$. Soit $x \in J$ et $y = g^{-1}(x)$: $\tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 2x$, donc $g'(y) = \frac{1}{2}(1 + 4x^2)$ et

$$(g^{-1})'(x) = \frac{2}{1 + 4x^2}.$$

3. a) $k : x \mapsto g(x) + x$ est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right]$, $k\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4} < 0$ et $k(0) = \frac{1}{2} > 0$: l'équation $g(x) + x = 0$ admet une solution unique α, et $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[$.

b) $g(\alpha) = -\alpha$ équivaut à $g^{-1}(-\alpha) = \alpha$: le point $I(-\alpha, \alpha)$ appartient à la courbe de g^{-1}. Ses coordonnées vérifient $y = -x$: $I \in D$.

Corrigé de l'exercice 9

1. f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$. f est continue, strictement croissante, $\lim\limits_{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f = -\infty$ et $\lim\limits_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} f = +\infty$: f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

2. f' ne s'annule pas, donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, comme $\tan\big(h(x)\big) = x$:

$$h'(x) = \frac{1}{f'\big(h(x)\big)} = \frac{1}{1 + \tan^2\big(h(x)\big)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

3. a) $u : x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est dérivable sur $[0,1[$, $u'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$, et h est dérivable sur $\mathbb{R}$: $\varphi = h \circ u$ est dérivable sur $[0,1[$ et

$$\varphi'(x) = \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

b) $(\varphi - h)' = 0$ sur l'intervalle $[0,1[$, donc $\varphi - h$ est constante, égale à $\varphi(0) - h(0) = h(1) - h(0) = \frac{\pi}{4}$.

4. a) D'après 3. b) : $g(x) = \frac{\pi}{4} + h(x) - (1 + 2x)h(x) = \frac{\pi}{4} - 2xh(x)$. g est deux fois dérivable sur $[0,1[$ et

$$g'(x) = -2h(x) - \frac{2x}{1 + x^2}, \qquad g''(x) = -\frac{2}{1 + x^2} - \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = \frac{-4}{(1 + x^2)^2}.$$

b) $g'' < 0$: g' est strictement décroissante sur $[0,1[$; comme $g'(0) = 0$, $g'(x) < 0$ pour $x \in]0,1[$. Donc g est strictement décroissante sur $[0,1[$, avec $g(0) = \frac{\pi}{4}$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \frac{\pi}{4} - 2h(1) = -\frac{\pi}{4}$.

c) g est continue, strictement décroissante sur $[0,1[$ et $0 \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$: il existe un unique $c \in]0,1[$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $h(c) = \frac{\pi}{8c}$.

Pour $x \in \left]\frac{1}{4}, 1\right[$, $\frac{\pi}{8x} \in \left]\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $h(x) = \frac{\pi}{8x} \Leftrightarrow x = \tan\frac{\pi}{8x}$. Par ailleurs $c < 1$ donne $h(c) < \frac{\pi}{4}$, soit $\frac{\pi}{8c} < \frac{\pi}{4}$ et $c > \frac{1}{2}$. Donc c est l'unique réel de $\left]\frac{1}{4}, 1\right[$ tel que $c = \tan\frac{\pi}{8c}$.

Remarque. Sur $\left]0, \frac{1}{4}\right]$, $\frac{\pi}{8x}$ prend toutes les valeurs supérieures ou égales à $\frac{\pi}{2}$ et l'équation $x = \tan\frac{\pi}{8x}$ a une infinité de solutions : la précision $c > \frac{1}{4}$ est indispensable.

5. a) Soit $k(x) = h(1 - x) - 2h(x)$, continue sur $\mathbb{R}$. $k(0) = h(1) = \frac{\pi}{4} > 0$ et $k(1) = -2h(1) = -\frac{\pi}{2} < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $h(1 - \alpha) = 2h(\alpha)$.

b) Posons $\theta = h(\alpha)$: $\tan\theta = \alpha$. Comme $2\theta = h(1-\alpha) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan 2\theta$ existe et vaut $1-\alpha$; en particulier $\tan^2\theta \neq 1$. La formule $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ donne

$$1-\alpha = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}, \quad \text{soit} \quad (1-\alpha)(1-\alpha^2) = 2\alpha, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha^3 - \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0.$$

Corrigé de l'exercice 10

1. $f(x)$ existe si, et seulement si, $x+1 \geq 0$ et $\sqrt{x+1} \neq 1$: $D_f = [-1,0[\cup]0,+\infty[$.

2. Posons $t = \sqrt[6]{x+1}$, de sorte que $\sqrt[3]{x+1} = t^2$ et $\sqrt{x+1} = t^3$. Pour $x \in D_f$, $t \geq 0$, $t \neq 1$ et

$$f(x) = \frac{t^2-1}{t^3-1} = \frac{t+1}{t^2+t+1}.$$

Continuité. Les fonctions $x \mapsto \sqrt[3]{x+1}$ et $x \mapsto \sqrt{x+1}$ sont continues sur $[-1,+\infty[$ et le dénominateur ne s'annule pas sur D_f : f est continue sur D_f.

Dérivabilité. Ces deux fonctions sont dérivables sur $]-1,+\infty[$, donc f est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$. En -1 : $f(-1) = 1$ et, avec $x+1 = t^6$ $(t \to 0^+)$:

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{1}{t^6}\left(\frac{t+1}{t^2+t+1} - 1\right) = \frac{-1}{t^4(t^2+t+1)} \to -\infty.$$

f n'est pas dérivable à droite en -1 (demi-tangente verticale).

3. Lorsque $x \to 0$, $t \to 1$ et $f(x) = \frac{t+1}{t^2+t+1} \to \frac{2}{3}$. f est prolongeable par continuité en 0 par la fonction F définie sur $[-1,+\infty[$ par $F(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $F(0) = \frac{2}{3}$.

Corrigé de l'exercice 11

Posons $u(x) = 2\cos x - 1$. Sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$, donc $0 \leq u(x) \leq 1$, et $u(x) = 0$ seulement pour $x = \frac{\pi}{3}$.

1. u est dérivable et strictement positive sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[$: f y est dérivable et

$$f'(x) = \frac{-2\sin x}{3\sqrt[3]{(2\cos x - 1)^2}}.$$

En $\frac{\pi}{3}$: pour $x < \frac{\pi}{3}$, $\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}} = \frac{u(x)}{x-\frac{\pi}{3}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{u(x)^2}}$. Le premier facteur tend vers $u'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$, le second vers $+\infty$: le quotient tend vers $-\infty$. f n'est pas dérivable à gauche en $\frac{\pi}{3}$ (demi-tangente verticale).

2. f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et $f' < 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$: f est strictement décroissante. $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$. Donc f est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ sur $[0,1]$.

3. $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \Leftrightarrow 2\cos x - 1 = \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$. Or $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^2}} \neq 0$, donc

$$(f^{-1})'\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = -3\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^2}.$$

4. • Sur $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$, f est dérivable et $f' \neq 0$: f^{-1} est dérivable sur $]0,1[$.

• En $1 = f(0)$: $f'(0) = 0$, la courbe de f a une tangente horizontale, donc celle de f^{-1} une demi-tangente verticale : f^{-1} n'est pas dérivable en 1.

• En $0 = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$: pour $y \in]0,1[$ et $x = f^{-1}(y)$, $\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(0)}{y-0} = \frac{x-\frac{\pi}{3}}{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}$, qui tend vers 0 lorsque $y \to 0^+$ d'après la question 1. f^{-1} est dérivable à droite en 0 et $(f^{-1})'(0) = 0$.

Donc $K = [0,1[$.

5. Soit $x \in]0,1[$ et $y = f^{-1}(x)$: $\cos y = \frac{1+x^3}{2}$ et $\sin y > 0$, donc $\sin y = \sqrt{1-\frac{(1+x^3)^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{(1-x^3)(3+x^3)}$. Alors

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{-3x^2}{2\sin y} = \frac{-3x^2}{\sqrt{(1-x^3)(3+x^3)}}.$$

Cette expression vaut 0 en 0 : elle est valable sur tout K. (Pour $x^3 = \sqrt{3}-1$, le radical vaut 1 et l'on retrouve le résultat de la question 3.)

Corrigé de l'exercice 12

1. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(t) = 1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$. La fonction $t \mapsto \sqrt[3]{t^2}$ est croissante sur $]0,+\infty[$, donc f' est décroissante. Pour $x \le \beta \le x+1$: $f'(x+1) \le f'(\beta) \le f'(x)$, ce qui est l'encadrement demandé.

2. f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$; d'après les inégalités des accroissements finis et la question 1 :

$$\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}+1\right)\times 1 \le f(x+1)-f(x) \le \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+1\right)\times 1.$$

3. $f(x+1)-f(x) = 1 + \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$, donc $\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \le \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} \le \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Les deux fonctions encadrantes tendent vers 0 en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right) = 0$.

Corrigé de l'exercice 13

1. f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty,0]$, $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ et $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$. En 0 : $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{0^+} 2x^2 = 0$. En $\frac{1}{2}$: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} 2x^2 = \frac{1}{2}$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. f est strictement croissante sur $]-\infty,0]$ $(x \mapsto x^3)$, sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ $(x \mapsto 2x^2)$ et sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ (somme de deux fonctions strictement croissantes) ; étant continue, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$: f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

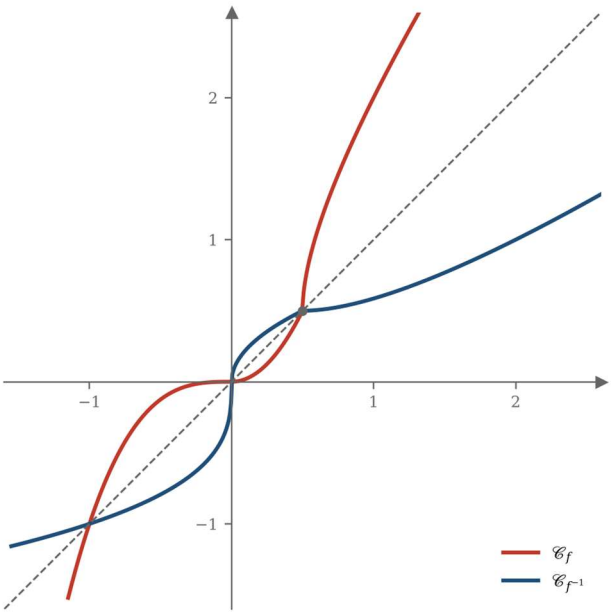
3. f étant strictement croissante : $f(]-\infty,0]) =]-\infty,0]$, $f\left(\left]0,\frac{1}{2}\right[\right) = \left]0,\frac{1}{2}\right[$ et $f\left(\left[\frac{1}{2},+\infty\right[\right) = \left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

• Si $y \le 0$: $y = x^3$ avec $x \le 0$ équivaut à $(-x)^3 = -y$, soit $x = -\sqrt[3]{-y}$.

• Si $0 < y < \frac{1}{2}$: $y = 2x^2$ avec $x > 0$ équivaut à $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$.

• Si $y \ge \frac{1}{2}$: posons $s = \sqrt{2x-1} \ge 0$, soit $x = \frac{s^2+1}{2}$. Alors $y = \frac{s^2+1}{2} + s = \frac{(s+1)^2}{2}$, d'où $s = \sqrt{2y}-1$ (positif car $2y \ge 1$) et $x = \frac{\left(\sqrt{2y}-1\right)^2+1}{2} = y+1-\sqrt{2y}$.

On obtient bien l'expression annoncée de f^{-1}.



Exercice 13 : courbes de f et de f^{-1}.

Corrigé de l'exercice 14

1. f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x)=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$; $f'(x)<0$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. f est strictement décroissante.

2. f est continue, strictement décroissante, $\lim\limits_{0^+} f=+\infty$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$: $I=[1,+\infty[$.

3. $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$: $g(1)=\frac{\pi}{2}$, $g\left(\sqrt{2}\right)=\frac{\pi}{4}$, $g(2)=\frac{\pi}{6}$.

4. Sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, f est dérivable et $f'\neq 0$: g est dérivable sur $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]1,+\infty[$. Soit $x>1$ et $y=g(x)$: $\sin y=\frac{1}{x}$ et $\cos y=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. Donc

$$g'(x)=\frac{1}{f'(y)}=-\frac{\sin^2 y}{\cos y}=-\frac{1}{x^2}\times\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

En $1=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, la courbe de f a une tangente horizontale et celle de g une demi-tangente verticale ; g **n'est pas dérivable en** 1 (d'ailleurs $\lim\limits_{x\to 1^+} g'(x)=-\infty$).

5. Soit $k(x)=h(x)-x=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{4}-x$. k est continue et strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ (somme de fonctions strictement décroissantes). $k\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{4}-\frac{\pi}{3}\approx 0{,}36>0$ et $k\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5}{4}-\frac{\pi}{2}\approx -0{,}32<0$. Donc l'équation $h(x)=x$ admet une solution unique x_0, et $\frac{\pi}{3}<x_0<\frac{\pi}{2}$.

Corrigé de l'exercice 15

Partie I

1. Pour $x\in]0,1[$: $\frac{g(x)-g(0)}{x}=\sqrt{\frac{2}{x(1-x^2)}}\to+\infty$ lorsque $x\to 0^+$. g n'est pas dérivable à droite en 0.

2. $u: x \mapsto \frac{2x}{1-x^2}$ est dérivable sur $[0,1[$ et $u'(x) = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} > 0$: u est strictement croissante et positive, donc $g = \sqrt{u}$ est continue et strictement croissante sur $[0,1[$. $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{1^-} g = +\infty$. Donc g est une bijection de $[0,1[$ sur $I = [0,+\infty[$.

3. Soit $y \geq 0$ et $x \in [0,1[$. $y = g(x) \Leftrightarrow y^2(1-x^2) = 2x \Leftrightarrow y^2x^2 + 2x - y^2 = 0$. Si $y = 0$, $x = 0$. Si $y > 0$, le discriminant réduit est $1 + y^4$ et la seule racine positive est $x = \frac{-1+\sqrt{1+y^4}}{y^2} = \frac{y^2}{1+\sqrt{1+y^4}}$. Donc, pour tout $x \geq 0$:

$$g^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^4}}.$$

4. Pour $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $t = \tan\frac{x}{2} \in [0,1[$ et $\frac{2t}{1-t^2} = \tan x$. Donc $g\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\tan x}$.

Partie II

1. Pour $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$: $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{2\sqrt{\tan x}}{x} = 2\sqrt{\frac{\tan x}{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty$. f n'est pas dérivable à droite en 0 ; sa courbe admet au point $(0,-1)$ une demi-tangente verticale.

2. Sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$: $f'(x) = \frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{\tan x}} > 0$. f est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $f(0) = -1$, $\lim\limits_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} f = +\infty$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	-1	↗	$+\infty$

Donc $J = [-1,+\infty[$.

3. Posons $s = \sqrt{\tan x} > 0$: $f'(x) = \frac{1+s^4}{s}$, et $f'(x) > 1 \Leftrightarrow s^4 - s + 1 > 0$. Si $s \geq 1$, $s^4 \geq s$ donc $s^4 - s + 1 \geq 1$; si $0 < s < 1$, $1 - s > 0$ donc $s^4 + (1-s) > 0$. Dans tous les cas $f'(x) > 1$.

4. Soit $k(x) = f(x) - x$. k est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $k'(x) = f'(x) - 1 > 0$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$: k est strictement croissante. $k(0) = -1$ et $\lim\limits_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} k = +\infty$: l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

$k\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}} - 1 - \frac{\pi}{6} \approx 1{,}5197 - 1 - 0{,}5236 = -0{,}004 < 0$ et $k\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$. Donc $\alpha \in \left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right[$.

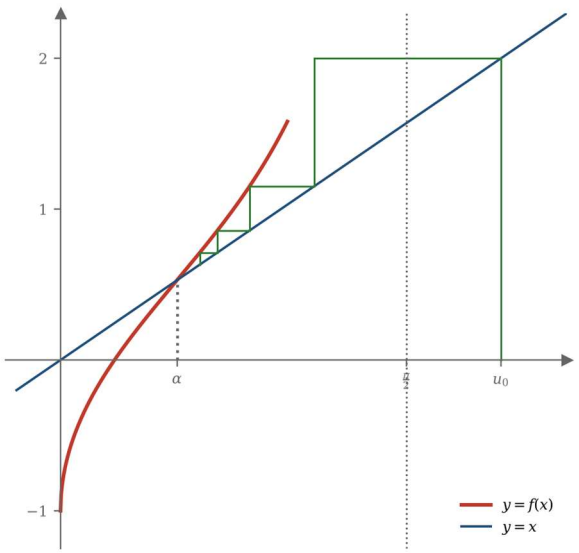
5. k étant strictement croissante et nulle en α : $f(x) - x < 0$ sur $[0,\alpha[$, $f(\alpha) - \alpha = 0$, $f(x) - x > 0$ sur $\left]\alpha,\frac{\pi}{2}\right[$.

6. f^{-1} est définie, continue et strictement croissante sur J, à valeurs dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\subset J$: la suite est bien définie. De plus $f(\alpha) = \alpha$ donne $f^{-1}(\alpha) = \alpha$.

a) $u_0 = 2 \geq \alpha$. Si $u_n \geq \alpha$, alors $u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \geq f^{-1}(\alpha) = \alpha$.

b) $u_1 = f^{-1}(2) < \frac{\pi}{2} < 2 = u_0$. Pour $n \geq 1$, $u_n \in \left[\alpha,\frac{\pi}{2}\right[$, donc $f(u_n) \geq u_n$ d'après 5. ; en appliquant f^{-1}, croissante : $u_n \geq f^{-1}(u_n) = u_{n+1}$. La suite est décroissante.

c) Décroissante et minorée par α, (u_n) converge vers un réel ℓ avec $\alpha \leq \ell \leq u_1 < \frac{\pi}{2}$. f^{-1} étant continue, $\ell = f^{-1}(\ell)$, soit $f(\ell) = \ell$; d'après 4. et $f(0) \neq 0$, $\ell = \alpha$.



Exercice 15, partie II : construction des termes $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ à partir de la courbe de f.

Partie III

1. $\varphi = \frac{f+1}{2}$: d'après II.2, φ est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(0) = 0$ et $\lim\limits_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \varphi = +\infty$.

φ admet une réciproque définie sur $J' = [0, +\infty[$.

2. Sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\varphi'(y) = \frac{1+\tan^2 y}{2\sqrt{\tan y}} \neq 0$: φ^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$ et $y = \varphi^{-1}(x)$: $\sqrt{\tan y} = x$ et $\tan y = x^2$, d'où

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{2x}{1+x^4}.$$

3. $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, donc $\varphi^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$. Soit $\Phi(x) = \varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0, +\infty[$. Φ est dérivable et

$$\Phi'(x) = \frac{2x}{1+x^4} - \frac{1}{x^2} \times \frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^4}} = \frac{2x}{1+x^4} - \frac{2x}{x^4+1} = 0.$$

Φ est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, égale à $\Phi(1) = 2\varphi^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$.

Corrigé de l'exercice 16

Partie I

1. f est dérivable sur $]-1,1[$ et $f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} > 0$. f est strictement croissante, $\lim\limits_{(-1)^+} f = -\infty$ et $\lim\limits_{1^-} f = +\infty$.

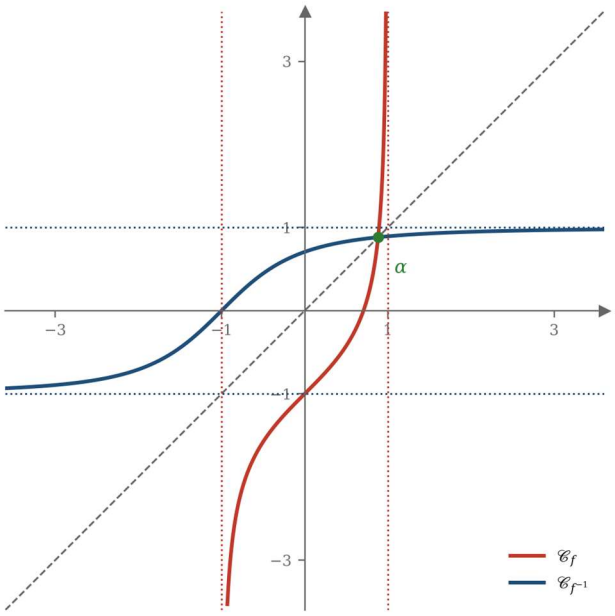
2. Soit $k(x) = f(x) - x$. $k'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - 1 \geq 0$, avec égalité seulement en 0 : k est strictement croissante sur $]-1,1[$. $\lim\limits_{(-1)^+} k = -\infty$ et $\lim\limits_{1^-} k = +\infty$: l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α.

$k\left(\frac{4}{5}\right) = -1 + \frac{4/5}{3/5} - \frac{4}{5} = -1 + \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = -\frac{7}{15} < 0 = k(\alpha)$, donc $\alpha > \frac{4}{5}$.

3. $f(x) - x < 0$ sur $]-1, \alpha[$, nul en α, > 0 sur $]\alpha, 1[$.

4. f est continue et strictement croissante sur $]-1,1[$; d'après les limites aux bornes, f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1,1[$. $y = f(x) \Leftrightarrow y + 1 = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$: x et $y+1$ ont le même signe et $(y+1)^2(1-x^2) = x^2$, soit $x^2 = \frac{(y+1)^2}{1+(y+1)^2}$. Donc $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$.



Exercice 16 : courbes de f et de f^{-1} ; elles se coupent sur la droite $y = x$ au point d'abscisse α.

Partie II. f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\alpha) = \alpha$ et $f^{-1}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1. a) $0 \leq u_0 \leq \alpha$. Si $0 \leq u_n \leq \alpha$, alors $f^{-1}(0) \leq u_{n+1} \leq f^{-1}(\alpha)$, soit $0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

b) Pour $x \in [0, \alpha]$, $f(x) \leq x$ (I.3) ; en appliquant f^{-1} : $x \leq f^{-1}(x)$. Donc $u_n \leq u_{n+1}$.

c) Croissante et majorée par α, (u_n) converge vers $\ell \in [0, \alpha]$; f^{-1} étant continue, $\ell = f^{-1}(\ell)$, soit $f(\ell) = \ell$ et $\ell = \alpha$.

2. f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et le même calcul qu'en I.1 donne $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(1+(x+1)^2)\sqrt{1+(x+1)^2}}$. Pour $x \geq 0$, $1 + (x+1)^2 \geq 2$, donc $0 < (f^{-1})'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

3. u_n et α sont dans $[0, +\infty[$; d'après le corollaire des accroissements finis : $|u_{n+1} - \alpha| = |f^{-1}(u_n) - f^{-1}(\alpha)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$.

4. Par récurrence, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|$. Comme $0 < \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1$, le majorant tend vers 0 : $\lim u_n = \alpha$.

Partie III

1. Pour $x \in]-1,1[$, $\frac{\pi x}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; posons $s = \sin\frac{\pi x}{2} \in]-1,1[$. $\sqrt{1-s^2} = \cos\frac{\pi x}{2}$ (cosinus positif), donc $h(x) = f(-s) = -1 - \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} = -1 - \tan\frac{\pi x}{2}$.

2. $h'(x) = -\frac{\pi}{2}\left(1 + \tan^2\frac{\pi x}{2}\right) < 0$: h est continue et strictement décroissante sur $]-1,1[$, $\lim\limits_{(-1)^+} h = +\infty$ et $\lim\limits_{1^-} h = -\infty$. h est une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$.

3. h' ne s'annule pas : h^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y = h^{-1}(x)$: $\tan\frac{\pi y}{2} = -(x+1)$, donc $h'(y) = -\frac{\pi}{2}(1+(x+1)^2)$ et $(h^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi(1+(x+1)^2)}$.

4. a) H est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme et composée de fonctions dérivables, et

$$H'(x) = \frac{-2}{\pi(1+x^2)} - \frac{1}{x^2} \times \frac{-2}{\pi\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{-2}{\pi(1+x^2)} + \frac{2}{\pi(x^2+1)} = 0.$$

b) $H\left(\frac{1}{2}\right) = h^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + h^{-1}(1)$. Posons $\theta_1 = \frac{\pi}{2}h^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{2}h^{-1}(1)$: ce sont les réels de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tels que $\tan\theta_1 = -\frac{1}{2}$ et $\tan\theta_2 = -2$; ils sont dans $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$. Or $\tan\left(-\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = \frac{1}{\tan\theta_1} = -2$ et $-\frac{\pi}{2} - \theta_1 \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, donc $\theta_2 = -\frac{\pi}{2} - \theta_1$. Ainsi $\theta_1 + \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ et $H\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi}(\theta_1 + \theta_2) = -1$.

De même $H\left(-\frac{1}{2}\right) = h^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) + h^{-1}(-3)$ avec $\tan\theta_1 = \frac{1}{2}$, $\tan\theta_2 = 2$, $\theta_1, \theta_2 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1$: $H\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

$H' = 0$ sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$: H est constante sur chacun d'eux. Donc $H(x) = -1$ si $x > 0$ et $H(x) = 1$ si $x < 0$.

5. a) $1 + \frac{1}{k} > 0$, donc $H\left(1+\frac{1}{k}\right) = -1$. Or $H\left(1+\frac{1}{k}\right) = h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(\frac{k}{k+1} - 1\right) = h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right)$. D'où l'égalité demandée.

b) D'après a), $h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) = -1 - h^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right)$. Donc

$$v_n = \sum_{k=1}^{n}\left[-1 - h^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)\right] = -n + h^{-1}(-1) - h^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$$

(somme télescopique). Comme $h(0) = -1$, $h^{-1}(-1) = 0$ et $v_n = -n - h^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$.

Alors $w_n = -1 - \frac{1}{n}h^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$. Comme h^{-1} prend ses valeurs dans $]-1,1[$, $\left|\frac{1}{n}h^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)\right| \leq \frac{1}{n}$, donc (w_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -1$.

Chapitre 5 — Primitives



Cours • 14 exercices • Corrigés détaillés

Ce que vous devez savoir faire à la fin du chapitre
– Vérifier qu'une fonction F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle.
– Déterminer les primitives des fonctions usuelles et reconnaître les formes $u'u^n$, $\frac{u'}{u^n}$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $u'\cos u$, $u'\sin u$, $u'v+uv'$, $\frac{u'v-uv}{v^2}$.
– Déterminer la primitive qui prend une valeur donnée en un réel donné.
– Transformer une expression (linéarisation, décomposition) pour en trouver une primitive.

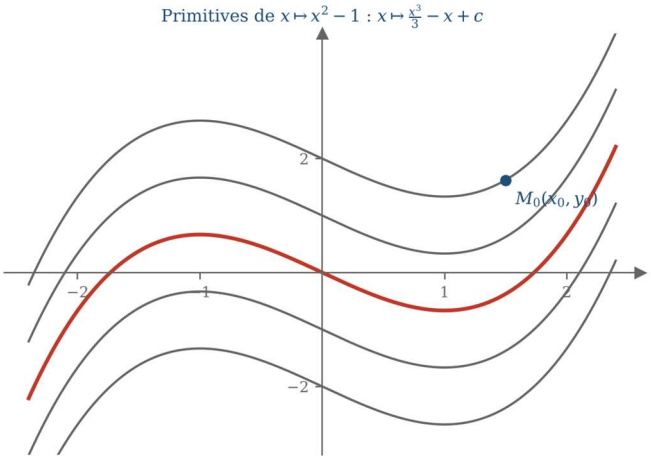
Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 1, chapitre 5). Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle.

Cours

I. Primitives d'une fonction continue

Définition. Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que F est une **primitive** de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $F'(x)=f(x)$ pour tout x de I.

Théorème (admis). Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.
Théorème. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors la fonction $F-G$ est constante sur I.
Ainsi, si F est une primitive de f sur I, les primitives de f sur I sont les fonctions $x\mapsto F(x)+c$, où c est une constante réelle.
Corollaire. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel de I et y_0 un réel. Il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que $F(x_0)=y_0$.



Les courbes des primitives d'une même fonction se déduisent l'une de l'autre par des translations de vecteur colinéaire à $\vec{j}$; une seule passe par un point M_0 donné.

Attention. Ces résultats ne sont valables que sur un **intervalle**. Ainsi les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ se déterminent séparément sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

II. Primitives des fonctions usuelles

Dans ce tableau, c désigne une constante réelle, a, ω et φ des réels avec $\omega \neq 0$.

Fonction f	Intervalle I	Primitives F
$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto ax + c$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \geq 2$	$]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x + c$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos x + c$
$x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\omega}\sin(\omega x + \varphi) + c$
$x \mapsto \sin(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\frac{1}{\omega}\cos(\omega x + \varphi) + c$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$x \mapsto \tan x + c$

III. Opérations sur les primitives

Théorème. Soit F et G deux primitives respectives de f et g sur un intervalle I.
– La fonction $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
– Pour tout réel λ, la fonction λF est une primitive de λf sur I.

Attention. Il n'existe pas de formule pour la primitive d'un produit ou d'un quotient : FG n'est pas une primitive de fg.

Les formules de dérivation, lues « à l'envers », donnent le tableau suivant, où u et v sont des fonctions dérivables sur I.

Fonction	Une primitive	Condition
$\boldsymbol{u'u^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\dfrac{u'}{u^n}, \boldsymbol{n \geq 2}$	$\dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	u ne s'annule pas sur I
$\dfrac{\boldsymbol{u'}}{\sqrt{\boldsymbol{u}}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\boldsymbol{u'\sqrt{u}}$	$\dfrac{2}{3}u\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\boldsymbol{u'\cos u}$	$\sin u$	
$\boldsymbol{u'\sin u}$	$-\cos u$	
$\boldsymbol{u'v + uv'}$	uv	
$\dfrac{\boldsymbol{u'v - uv'}}{\boldsymbol{v^2}}$	$\dfrac{u}{v}$	v ne s'annule pas sur I
$\boldsymbol{u' \times (v' \circ u)}$	$v \circ u$	v dérivable sur un intervalle contenant $u(I)$

Méthode — déterminer une primitive.

1. Chercher une forme du tableau en identifiant u puis en calculant u' ; ajuster la constante multiplicative : si $f = k\,u'u^n$, alors $F = k\frac{u^{n+1}}{n+1}$.
2. À défaut, transformer l'expression : développer, décomposer, ou **linéariser** un produit trigonométrique à l'aide de

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)], \qquad \sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)],$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)], \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos}{2}.$$

3. Toujours vérifier en dérivant le résultat.

Exemple 1. $f(x) = x(x^2+1)^4$ sur $\mathbb{R}$. Avec $u(x) = x^2+1$, $u'(x) = 2x$: $f = \frac{1}{2}u'u^4$. Les primitives de f sont $x \mapsto \frac{(x^2+1)^5}{10} + c$.

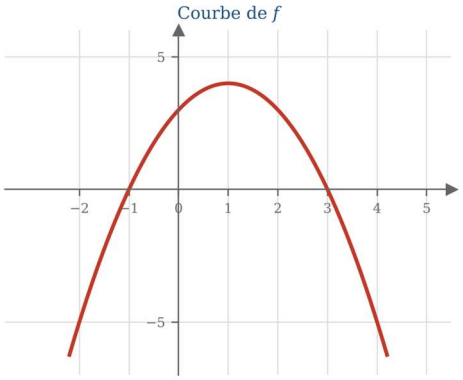
Exemple 2. $f(x) = \sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$. $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, donc les primitives sont $x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c$.

Exemple 3. La primitive F de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$ telle que $F(1) = 3$: $F(x) = -\frac{1}{x} + c$ et $F(1) = -1 + c = 3$ donne $c = 4$, soit $F(x) = 4 - \frac{1}{x}$.

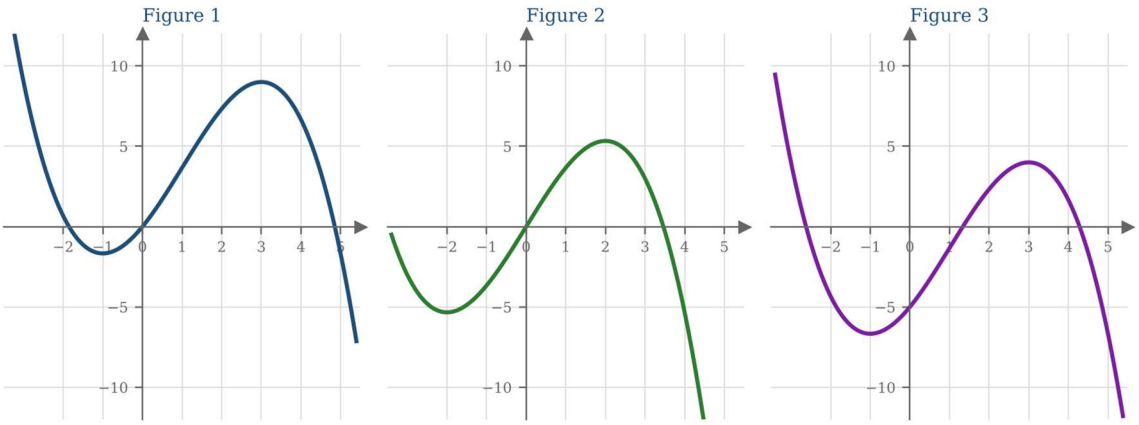
Exercices

Exercice 1

La parabole ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré f dans un repère orthogonal.



Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une courbe ne représente pas une primitive de la fonction f. Laquelle ? Justifier la réponse.



Exercice 2

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I.

1. $f: x \mapsto \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$; $I = \mathbb{R}$
2. $f: x \mapsto (2x+1)(x^2+x+1)$; $I = \mathbb{R}$
3. $f: x \mapsto \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; $I = \mathbb{R}$
4. $f: x \mapsto (2x+1)\sin(x^2+x+1)$; $I = \mathbb{R}$
5. $f: x \mapsto \sin x + x\cos x$; $I = \mathbb{R}$
6. $f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $I =]-1,1[$
7. $f: x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$; $I =]0,\pi[$
8. $f: x \mapsto \cos x \cos 2x$; $I = \mathbb{R}$
9. $f: x \mapsto \frac{x\cos x - \sin}{x^2}$; $I =]0,+\infty[$
10. $f: x \mapsto \frac{x+1}{(x^2+2x)^3}$; $I =]-2,0[$

Exercice 3

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel x : $x^2 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$.
2. En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2(x-1)^{2009}$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos x$.

1. Déterminer la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\sin x$.
2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\cos x + b\cos^3 x$, où a et b sont deux réels.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Exprimer $f''(x) + 9f(x)$ en fonction de $\cos x$. En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{8x}{(x^2-4)^2}$.

1. Prouver qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$: $f(x) = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x+2)^2}$.
2. En déduire les primitives de f sur $]-2,2[$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-\infty, 2[$ par $f(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x de I : $f(x) = a + \frac{b}{(x-2)^2}$.
2. En déduire la primitive de f sur I qui s'annule en 1.

Exercice 8

1. Déterminer une primitive sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$.
2. On considère la fonction G définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $G(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$. Montrer que G est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et que $G'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.
3. En déduire une primitive sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\cos^4 x}$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$ par $f(x) = (x^2 + x + 1)\sqrt{3 - 2x}$.

1. Montrer que, pour tout réel x : $x^2 = \frac{(3-2x)^2}{4} - \frac{3(3-2x)}{2} + \frac{9}{4}$.
2. Déterminer alors la primitive de f sur $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$ qui s'annule en 1.

Exercice 10

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On note F la primitive de f vérifiant $F(0) = 0$.
2. Étudier la parité de F et préciser le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.

3. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire qu'il existe une constante c telle que, pour tout $x > 0$: $F(x) = c - F\left(\frac{1}{x}\right)$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = c$.
6. On pose, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \tan x$.
   a) Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto F \circ g(x) - x$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $\varphi'(x)$.
   b) En déduire que, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: $F \circ g(x) = x$.
   c) Déterminer alors $F(1)$, $F\left(\sqrt{3}\right)$ et $F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
   d) Montrer que $c = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

1.
   a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
   b) Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.
2. Soit F la primitive de f sur $[0, +\infty[$ telle que $F(0) = 0$. On ne cherchera pas à exprimer $F(x)$.
   a) Pourquoi peut-on affirmer l'existence de F sur $[0, +\infty[$?
   b) Quelles sont les variations de F sur $[0, +\infty[$?
3. On définit sur $[0, +\infty[$ les fonctions H et K par $H(x) = F(x) - x$ et $K(x) = F(x) - \frac{2}{3}x$.
   a) Étudier, sur $[0, +\infty[$, les variations de H et K.
   b) En déduire que, pour tout $x \geq 0$: $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.
   c) En déduire la limite de F en $+\infty$.
4.
   a) Démontrer que l'équation $F(x) = \pi$ admet une solution unique α sur $[0, +\infty[$.
   b) Montrer que l'on peut préciser : $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$.

Exercice 12 (type bac)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$.

1. Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
2. Montrer que, pour tout réel x, $0 \leq F(x) < \frac{1}{2}$.

Exercice 13 (type bac)

1. Montrer que, pour tout réel x, $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$.
2. En déduire une primitive de $x \mapsto \sin^3 x$ sur $\mathbb{R}$.

3. Retrouver ce résultat en écrivant $\sin^3 x = \sin x - \sin x \cos^2 x$, et vérifier que les deux primitives obtenues sont égales.

Exercice 14 (type bac)

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
2. Soit g définie sur $]-1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{x+2}{(x+1)^3}$.
   a. Déterminer deux réels a et b tels que $g(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3}$.
   b. En déduire la primitive G de g sur $]-1, +\infty[$ telle que $G(0) = 0$.

Corrigés détaillés

Corrigé de l'exercice 1

Lecture graphique. La parabole coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 3, et f est positive entre ces deux valeurs :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conséquence pour une primitive. Si F est une primitive de f, alors $F' = f$: F est décroissante sur $]-\infty, -1]$, croissante sur $[-1,3]$ et décroissante sur $[3, +\infty[$. Elle admet donc un minimum local en -1 et un maximum local en 3.

Examen des figures. Les courbes des figures 1 et 3 ont bien un minimum local en -1 et un maximum local en 3 ; de plus la figure 3 se déduit de la figure 1 par la translation de vecteur $-5\vec{j}$, ce qui est cohérent avec le fait que deux primitives diffèrent d'une constante. La courbe de la figure 2 a ses extrema en -2 et 2 : la fonction qu'elle représente est croissante sur $[-2, -1]$ alors que f y est négative.

Conclusion. La courbe de la **figure 2** ne représente pas une primitive de f.

Complément. On lit $f(0) = 3$, donc $f(x) = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3$ et les primitives de f sont $x \mapsto -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + c$; la figure 1 correspond à $c = 0$ et la figure 3 à $c = -5$.

Corrigé de l'exercice 2

Dans chaque cas, c désigne une constante réelle. On pose $u(x) = x^2 + x + 1$ dans les questions 1 à 4 : $u'(x) = 2x + 1$ et $u(x) > 0$ pour tout réel x (discriminant $-3 < 0$).

1. $f = \frac{u'}{u^2}$: $F(x) = -\frac{1}{x^2+x+1} + c$.

2. $f = u'u$: $F(x) = \frac{(x^2+x+1)^2}{2} + c$.

3. $f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u > 0$ sur $\mathbb{R}$: $F(x) = 2\sqrt{x^2 + x + 1} + c$.

4. $f = u' \sin u$: $F(x) = -\cos(x^2 + x + 1) + c$.

5. f est de la forme $u'v + uv'$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sin x$: $F(x) = x \sin x + c$.

6. Avec $u(x) = 1 - x^2 > 0$ sur $]-1,1[$ et $u'(x) = -2x$: $f = -\frac{1}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$, donc $F(x) = -\sqrt{1 - x^2} + c$.

7. Sur $]0,\pi[$, la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$ a pour dérivée $\frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$. Donc $F(x) = -\frac{\cos x}{\sin x} + c = -\operatorname{cotan} x + c$.

8. On linéarise : $\cos x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)$. Donc $F(x) = \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin x + c$.

9. f est de la forme $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = \sin x$ et $v(x) = x$ (non nul sur I) : $F(x) = \frac{\sin x}{x} + c$.

10. Avec $u(x) = x^2 + 2x$, qui ne s'annule pas sur $]-2,0[$, et $u'(x) = 2(x+1)$: $f = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u^3}$, donc

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2u(x)^2} + c = \frac{-1}{4(x^2+2x)^2} + c.$$

Corrigé de l'exercice 3

1. $a(x-1)^2 + b(x-1) + c = ax^2 + (b-2a)x + (a-b+c)$. Par identification : $a = 1$, $b - 2a = 0$, $a - b + c = 0$, d'où $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$:

$$x^2 = (x-1)^2 + 2(x-1) + 1.$$

2. Pour tout réel x : $f(x) = (x-1)^{2011} + 2(x-1)^{2010} + (x-1)^{2009}$. Chaque terme est de la forme $u'u^n$ avec $u(x) = x - 1$ et $u'(x) = 1$. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions

$$F : x \mapsto \frac{(x-1)^{2012}}{2012} + \frac{2(x-1)^{2011}}{2011} + \frac{(x-1)^{2010}}{2010} + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 4

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \sin x + x\cos x$.

2. Pour tout réel x : $f(x) = x\cos x = g'(x) - \sin x$. Une primitive de g' est g et une primitive de $x \mapsto -\sin x$ est $x \mapsto \cos x$. Donc la fonction

$$F : x \mapsto x\sin x + \cos x$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. (Vérification : $F'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$.)

Corrigé de l'exercice 5

1. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = -a\sin x - 3b\cos^2 x \sin x,$$

$$f''(x) = -a\cos x - 3b(-2\cos x \sin^2 x + \cos^3 x) = -a\cos x + 6b\cos x(1 - \cos^2 x) - 3b\cos^3 x$$
$$= (6b - a)\cos x - 9b\cos^3 x.$$

2. $f''(x) + 9f(x) = (6b-a)\cos x - 9b\cos^3 x + 9a\cos x + 9b\cos^3 x = (8a + 6b)\cos x$.

Donc, pour tout réel x : $f(x) = \frac{1}{9}[(8a+6b)\cos x - f''(x)]$. Une primitive de f'' est f' et une primitive de cos est sin ; les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc

$$F(x) = \frac{1}{9}[(8a+6b)\sin x - f'(x)] + c = \frac{1}{9}[(8a+6b)\sin x + a\sin x + 3b\cos^2 x \sin x] + c,$$

soit

$$F(x) = \left(a + \frac{2b}{3}\right)\sin x + \frac{b}{3}\cos^2 x \sin x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Vérification. $(\cos^2 x \sin x)' = \cos^3 x - 2\sin^2 x \cos x = 3\cos^3 x - 2\cos x$, donc $F'(x) = \left(a + \frac{2b}{3}\right)\cos x + b\cos^3 x - \frac{2b}{3}\cos x = f(x)$.

Corrigé de l'exercice 6

1. Pour $x \notin \{-2,2\}$: $\frac{a}{(x-2)^2}+\frac{b}{(x+2)^2}=\frac{a(x+2)^2+b(x-2)^2}{(x^2-4)^2}=\frac{(a+b)x^2+4(a-b)x+4(a+b)}{(x^2-4)^2}$.

L'égalité avec $f(x)$ a lieu pour tout x si $a+b=0$ et $4(a-b)=8$, soit $a=1$ et $b=-1$:

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x+2)^2}.$$

2. Sur $]-2,2[$, chaque terme est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u'=1$. Les primitives de f sont

$$F(x)=-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}+c=\frac{4}{4-x^2}+c, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

Remarque. On pouvait aussi écrire directement $f=\frac{4u'}{u^2}$ avec $u(x)=x^2-4$.

Corrigé de l'exercice 7

1. $x(x-4)=x^2-4x=(x-2)^2-4$, donc $f(x)=1-\frac{4}{(x-2)^2}$: $a=1$ et $b=-4$.

2. Les primitives de f sur I sont $F(x)=x+\frac{4}{x-2}+c$. La condition $F(1)=0$ donne $1-4+c=0$, soit $c=3$:

$$F(x)=x+3+\frac{4}{x-2}.$$

Corrigé de l'exercice 8

1. $x\mapsto \tan x$ est une primitive de $x\mapsto\frac{1}{\cos^2 x}$ sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

2. G est le quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, donc G est dérivable et

$$G'(x)=\frac{\cos x\cos^3 x+3\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^6 x}=\frac{\cos^2 x+3\sin^2 x}{\cos^4 x}=\frac{3-2\cos^2 x}{\cos^4 x}=\frac{3}{\cos^4 x}-\frac{2}{\cos^2 x}.$$

3. D'après 2. : $\frac{1}{\cos^4 x}=\frac{1}{3}G'(x)+\frac{2}{3}\times\frac{1}{\cos^2 x}$. Une primitive de f sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ est donc

$$F(x)=\frac{1}{3}G(x)+\frac{2}{3}\tan x=\frac{\sin x}{3\cos^3 x}+\frac{2}{3}\tan x.$$

Corrigé de l'exercice 9

1. $\frac{(3-2x)^2}{4}-\frac{3(3-2x)}{2}+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}-3x+x^2-\frac{9}{2}+3x+\frac{9}{4}=x^2$.

2. Posons $u(x)=3-2x$: $u>0$ sur $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[$, $u'=-2$ et $x=\frac{3-u}{2}$. D'après 1. :

$$x^2+x+1=\frac{u^2}{4}-\frac{3u}{2}+\frac{9}{4}+\frac{3-u}{2}+1=\frac{u^2}{4}-2u+\frac{19}{4}.$$

Donc $f=\frac{1}{4}u^2\sqrt{u}-2u\sqrt{u}+\frac{19}{4}\sqrt{u}$.

Pour tout entier $k\geq 0$, la fonction $u^{k+1}\sqrt{u}$ a pour dérivée $(k+1)u'u^k\sqrt{u}+u^{k+1}\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\left(k+\frac{3}{2}\right)u'u^k\sqrt{u}$. Comme $u'=-2$, une primitive de $u^k\sqrt{u}$ est $-\frac{u^{k+1}\sqrt{u}}{2k+3}$. On obtient les primitives de f :

$$F(x)=-\frac{u^3\sqrt{u}}{28}+\frac{2u^2\sqrt{u}}{5}-\frac{19\,u\sqrt{u}}{12}+c, \qquad u=3-2x.$$

Pour $x = 1, u = 1 : F(1) = -\frac{1}{28} + \frac{2}{5} - \frac{19}{12} + c = \frac{-15+168-665}{420} + c = -\frac{128}{105} + c$. Donc $c = \frac{128}{105}$ et

$$F(x) = \sqrt{3-2x}\left[-\frac{(3-2x)^3}{28} + \frac{2(3-2x)^2}{5} - \frac{19(3-2x)}{12}\right] + \frac{128}{105}.$$

Corrigé de l'exercice 10

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) : elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et une seule, F, s'annule en 0.

2. Soit $G(x) = -F(-x)$. G est dérivable sur $\mathbb{R}$, $G'(x) = F'(-x) = f(-x) = f(x)$ et $G(0) = 0$: par unicité de la primitive de f nulle en 0, $G = F$. Donc $F(-x) = -F(x)$: F est impaire. $F' = f > 0$: F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $\psi(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0, +\infty[$. ψ est dérivable et

$$\psi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

ψ est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

4. En notant c cette constante : pour tout $x > 0$, $F(x) = c - F\left(\frac{1}{x}\right)$.

5. Lorsque $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$ et F est continue en 0, donc $F\left(\frac{1}{x}\right) \to F(0) = 0$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = c$.

6. a) g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et F est dérivable sur $\mathbb{R}$: φ est dérivable et

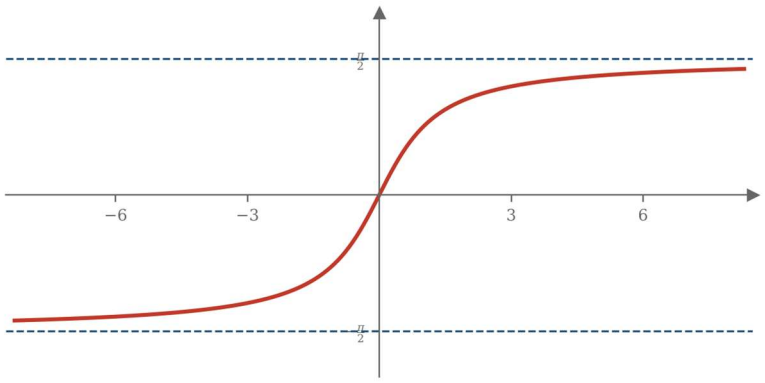
$$\varphi'(x) = g'(x)\,F'\big(g(x)\big) - 1 = (1+\tan^2 x) \times \frac{1}{1+\tan^2 x} - 1 = 0.$$

b) φ est constante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, égale à $\varphi(0) = F(0) - 0 = 0$. Donc $F(\tan x) = x$.

c) $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$: $F(1) = \frac{\pi}{4}$, $F\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$, $F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$.

d) Pour $x = 1$ dans la relation de la question 4 : $c = 2F(1) = \frac{\pi}{2}$. (On vérifie : $F\left(\sqrt{3}\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.)

Remarque. F est la réciproque de la restriction de la tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (voir l'exercice 9 du chapitre 4).



Exercice 10 : courbe de F ; les droites $y = \frac{\pi}{2}$ et $y = -\frac{\pi}{2}$ sont asymptotes.

Corrigé de l'exercice 11

1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$

b) $f'(x) = \frac{2x(x^2+x+1)-(x^2+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}.$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{2}{3}$	↗	1

2. a) f est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$: elle y admet une unique primitive qui s'annule en 0.

b) $F' = f$ et $f(x) \geq \frac{2}{3} > 0$: F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

3. a) $H'(x) = f(x) - 1 = \frac{-x}{x^2+x+1} \leq 0$: H est décroissante sur $[0, +\infty[$.

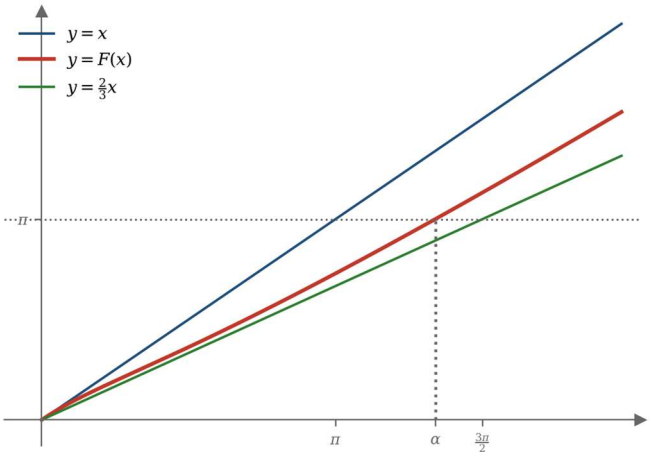
$K'(x) = f(x) - \frac{2}{3} = \frac{3x^2+3-2x^2-2x-2}{3(x^2+x+1)} = \frac{(x-1)^2}{3(x^2+x+1)} \geq 0$: K est croissante sur $[0, +\infty[$.

b) $H(0) = K(0) = 0$. Pour $x \geq 0$: $H(x) \leq H(0) = 0$ et $K(x) \geq K(0) = 0$, soit $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.

c) $F(x) \geq \frac{2}{3}x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{3}x = +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

4. a) F est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, $F(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F = +\infty$: F réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Comme $\pi \geq 0$, l'équation $F(x) = \pi$ admet une solution unique α.

b) D'après 3. b) appliqué à α : $\frac{2}{3}\alpha \leq F(\alpha) \leq \alpha$, c'est-à-dire $\frac{2}{3}\alpha \leq \pi \leq \alpha$. Donc $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$.



Exercice 11 : la courbe de F est comprise entre les droites $y = \frac{2}{3}x$ et $y = x$.

Corrigé de l'exercice 12

1. $f(x) = \frac{1}{2}\,u'(x)\,u(x)^{-2}$ avec $u(x) = x^2 + 1$; une primitive est $-\frac{1}{2(x^2+1)}$. La condition $F(0) = 0$ donne

$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(x^2+1)} = \frac{x^2}{2(x^2+1)}.$$

2. $x^2 \geq 0$ donne $F(x) \geq 0$, et $\frac{x^2}{x^2+1} < 1$ donne $F(x) < \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 13

1. $\sin 3x = \sin(2x + x) = 2\sin x\cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = 2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, d'où le résultat.

2. Une primitive est $F_1(x) = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x$.

3. $\sin x\cos^2 x = -u'(x)u(x)^2$ avec $u = \cos$: une primitive de $\sin^3 x$ est $F_2(x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$. Avec $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$: $F_1(x) = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{4}\cos x = F_2(x)$.

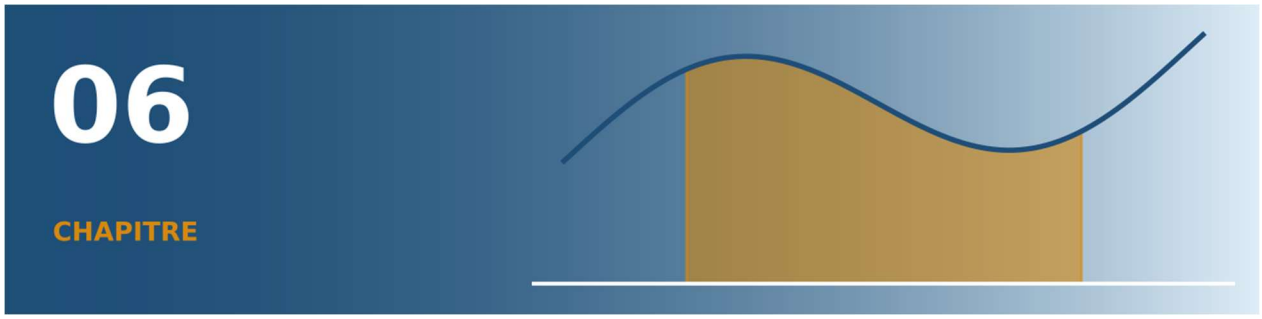
Corrigé de l'exercice 14

1. $f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1 > 0$: une primitive est $2\sqrt{x^2 + x + 1}$.

2. a. $\frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3} = \frac{a(x+1)+b}{(x+1)^3}$: par identification, $a = 1$ et $a + b = 2$, soit $b = 1$.

b. Une primitive est $-\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2}$, qui vaut $-\frac{3}{2}$ en 0. Donc $G(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2}$.

Chapitre 6 — Intégrales



Cours • 22 exercices • Corrigés détaillés

Ce que vous devez savoir faire à la fin du chapitre
– Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive ou d'une intégration par parties.
– Utiliser la linéarité, la relation de Chasles, la positivité et la comparaison.
– Encadrer une intégrale, étudier une suite définie par une intégrale.
– Étudier une fonction définie par une intégrale $x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$.
– Calculer une aire plane, une valeur moyenne, le volume d'un solide de révolution.

Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 1, chapitre 6).

Cours

I. Intégrale d'une fonction continue

Définition. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I. On appelle **intégrale de f entre a et b** le réel

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Ce réel ne dépend pas de la primitive choisie. La variable est « muette » : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

Conséquences immédiates. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$; $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Relation de Chasles. Pour tous réels a, b, c de I : $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.

Linéarité. Si f et g sont continues sur $[a,b]$, pour tous réels α et β : $\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$.

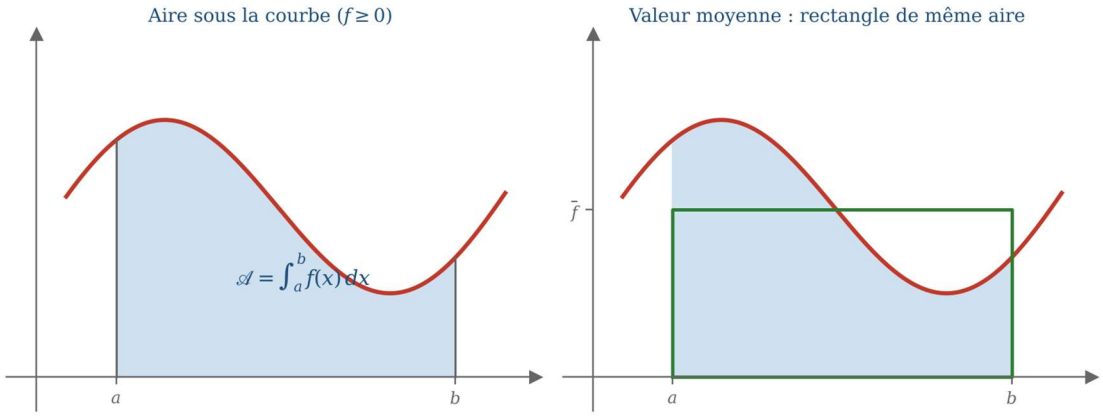
II. Intégrale et aire

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; l'unité d'aire (u.a.) est l'aire du rectangle construit sur $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

Définition. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a < b)$. L'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

En particulier, si f est positive sur $[a, b]$, $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\, dx$.
Si f et g sont continues sur $[a, b]$, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes de f et g et les droites $x = a, x = b$ est $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$.



Intégrale, aire et valeur moyenne.

III. Intégrales et inégalités

Dans ce paragraphe, $a \leq b$.

Positivité. Si f est continue et positive sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$.
Corollaire. Si $a < b$, si f est continue, positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\, dx > 0$.
Comparaison. Si f et g sont continues sur $[a, b]$ et $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$.
Valeur absolue. Si f est continue sur $[a, b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$.

Attention. Ces résultats supposent les bornes « dans le bon sens » ($a \leq b$). Si $a > b$, les inégalités changent de sens.

IV. Valeur moyenne

Définition. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ ($a < b$). La **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ est le réel $\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$.

Inégalité de la moyenne. Si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x de $[a, b]$, alors $m \leq \overline{f} \leq M$, c'est-à-dire

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b - a).$$

Corollaire (formule de la moyenne). Si f est continue sur $[a, b]$ ($a < b$), il existe $c \in [a, b]$ tel que $\overline{f} = f(c)$, c'est-à-dire $\int_a^b f(x)\, dx = (b - a)f(c)$.

V. Intégration par parties

Théorème. Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ dont les dérivées u' et v' sont continues sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u\,(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u\,'(x)v(x)\,dx.$$

Exemple. $\int_0^\pi x\sin x\,dx$: on pose $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$, d'où $u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$. Alors

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx = [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi + 0 = \pi.$$

Méthode. On choisit pour u le facteur qui se simplifie par dérivation (polynôme) et pour v' celui dont on connaît une primitive. Pour une suite d'intégrales (I_n), une intégration par parties fournit en général une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} ou I_{n-2}.

VI. Fonctions définies par une intégrale

Théorème. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I. La fonction $F: x \mapsto \int_a^x f\,(t)\,dt$ est **la primitive de f sur I qui s'annule en a** : elle est dérivable sur I et $F'(x)=f(x)$.

Théorème. Soit de plus u une fonction dérivable sur un intervalle J telle que $u(J)\subset I$. La fonction $G: x \mapsto \int_a^{u(x)} f\,(t)\,dt$ est dérivable sur J et

$$G'(x) = u'(x)\,f\big(u(x)\big).$$

Parité, périodicité. Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0 et $a \in I$.
– Si f est impaire, $\int_{-a}^a f\,(t)\,dt = 0$. – Si f est paire, $\int_{-a}^a f\,(t)\,dt = 2\int_0^a f\,(t)\,dt$.
– Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T, $\int_a^{a+T} f\,(t)\,dt = \int_0^T f\,(t)\,dt$ pour tout réel a.

VII. Calcul de volumes

Solide de révolution. L'espace est muni d'un repère orthonormé. Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. Le volume (en unités de volume) du solide engendré par la rotation autour de l'axe $(O,\vec{\imath})$ de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites $x=a$ et $x=b$ est

$$V = \pi\int_a^b f\,(x)^2\,dx.$$

Plus généralement (admis). Si un solide est compris entre les plans d'équations $z=a$ et $z=b$ et si l'aire $S(z)$ de sa section par le plan de cote z est une fonction continue de z, alors $V = \int_a^b S\,(z)\,dz$.

Exercices

Exercices 1 à 6 : calculs d'intégrales et d'aires. Exercices 7 à 11 : suites d'intégrales. Exercices 12 à 16 : inégalités et fonctions définies par une intégrale. Exercices 17 et 18 : volumes. Exercices 19 à 22 : sommes et intégrales, problèmes de synthèse.

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^4 |t-2|\ dt$ **b)** $\int_{-1}^2 (x-|x-1|)\ dx$ **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\ dt$ **d)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\ dx$ **f)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(tx)\ dt$ (x réel fixé) **g)** $\int_{-1}^1 \frac{x^{2009}}{x^{14}+1}\ dx$ **h)** $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ dx$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t\ dt$ **j)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t\ dt$ **k)** $\int_0^1 t\sqrt{1-t}\ dt$ **l)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\ dx$

m) $\int_0^1 (2t+1)\sin\left(\pi(t^2+t+1)\right)dt$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^4 x$.

1. Exprimer $\sin^2 x$ ainsi que $\cos^2 x$ en fonction de $\cos 2x$.
2. Exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos 2x$ et $\cos 4x$.
3. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)\ dx$.

Exercice 3

1. Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ dont la dérivée f' est continue sur $[a,b]$. Montrer que $\int_a^b x\, f'(x)\ dx + \int_a^b f(x)\ dx = bf(b) - af(a)$.
2. Calculer $\int_0^1 \sqrt{x+1}\ dx$ et en déduire $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\ dx$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par $f(x) = 4\sqrt{x} - x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}, que l'on calculera.
2. Soit $a \in [0,4]$. Calculer les intégrales $I(a) = \int_0^a f(x)\ dx$ et $J(a) = \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\ dy$.
3. Vérifier que $I(a) + J(a) = af(a)$. Interpréter géométriquement cette relation.

Exercice 5

On considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\ dx$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier l'existence de I_n et déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Calculer I_n en fonction de n.
4. En écrivant $x^n = (1-(1-x))^n$ et en utilisant la formule du binôme, donner une autre expression de I_n.

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$. Étudier f et construire sa courbe ζ_1.
2. Soit g la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $g(x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2}\ dt$.

a) Montrer que g est dérivable sur $[0,\pi]$ et que $g'(x) = -4\sin^2 x$.

b) Calculer $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$. En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de x.

3. On note ζ_2 l'image de ζ_1 par la symétrie centrale de centre O et l'on pose $\zeta = \zeta_1 \cup \zeta_2$. Construire ζ_2 et donner une équation cartésienne de ζ.

Exercice 7

La suite de Wallis est définie par $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, dt$, où n est un entier naturel.

1. Calculer w_0 et w_1.
2. Montrer que la suite (w_n) est décroissante.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n : $w_n \geq 0$. En déduire que la suite (w_n) est convergente.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_{2n} = \frac{\pi\, C_{2n}^n}{2\times 4^n}$ et $w_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.
6. Montrer que, pour tout entier naturel n : $0 < \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{w_{2n+1}}{w_{2n}} \leq 1$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{w_{2n+1}}{w_{2n}} = 1$.
7. Établir la formule de Wallis : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2\times4\times6\times\ldots\times2n}{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}\right)^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$.
8. Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = (n+1) w_n w_{n+1}$ est constante. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Exercice 8

Soit $I_n = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n \, dx$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $(2n+1) I_n = -2n I_{n-1}$.
2. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

Exercice 9

p et q étant deux entiers naturels, on pose $B(p,q) = \int_0^1 t^p \, (1-t)^q \, dt$.

1. Comparer $B(p,q)$ et $B(q,p)$.
2. Établir la relation $B(p,q) = \frac{p}{q+1} B(p-1, q+1)$ pour $p \geq 1$.
3. Calculer $B(0,n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; en déduire $B(p,q)$.

Exercice 10

Pour n entier naturel non nul, on définit la suite (S_n) par $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

1. Justifier, pour k entier naturel non nul, l'encadrement $\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$.
2. En déduire l'encadrement $\int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \leq S_n \leq \int_1^n \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + 1$.
3. Que peut-on dire de la suite (S_n) ?

4. À l'aide d'encadrements analogues, montrer que la suite (T_n) définie par $T_n = 1 + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$ est convergente.

Exercice 11

On définit la suite (u_n) par $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} t\, dt$, $n \in \mathbb{N}$.

1.
   a) Rappeler la dérivée de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   b) Calculer alors u_0.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{2n+3}$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2(2n+3)} \leq u_n \leq \frac{1}{2(2n+1)}$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_n$.
5. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$.
   b) En déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(y) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(xy)}{x}\, dx$.

1. Justifier l'existence de $f(y)$ pour tout réel y.
2. Montrer, en utilisant la formule de la moyenne, que si a et b sont deux réels tels que $a < b$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\frac{\sin b - \sin a}{b-a} = \cos c$.
3. Montrer que, pour tous réels a et b : $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$ et $|\cos b - \cos a| \leq |b - a|$.
4. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. On pose $A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(xy_0)\, dx$. Montrer que $\lim\limits_{y\to y_0} \left(\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} - A\right) = 0$. En déduire que f est dérivable en y_0 et exprimer $f'(y_0)$.

Exercice 13

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ $(a < b)$.

1.
   a) Quel est le signe de $\int_a^b [f(t) + xg(t)]^2 dt$, où x désigne un nombre réel ?
   b) En déduire l'inégalité suivante, dite de Schwarz : $\left[\int_a^b f(t) g(t)\, dt\right]^2 \leq \int_a^b f(t)^2\, dt \times \int_a^b g(t)^2\, dt$.
2. Démontrer que si f et g sont positives sur $[a, b]$ et si, pour tout x de $[a, b]$, $f(x)\, g(x) \geq 1$, alors $\int_a^b f(x)\, dx \times \int_a^b g(x)\, dx \geq (b-a)^2$.

Exercice 14

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ $(a < b)$.

1. Justifier l'existence de deux réels m et M tels que, pour tout x de $[a,b]$: $m \leq f(x) \leq M$.
2. Démontrer que si g garde un signe constant sur $[a,b]$ et si $\int_a^b g(t)\,dt \neq 0$, alors $m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \leq M$.

Exercice 15

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, avec $a < b$.

1. Justifier l'existence d'un réel M tel que, pour tout x de $[a,b]$, $|f(x)| \leq M$, et d'un réel x_0 de $[a,b]$ tel que $|f(x_0)| = M$.

Par la suite, on suppose que $M > 0$ et l'on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_a^b |f(t)|^n\ dt$.

2. Prouver que $J_n \leq (b-a)M^n$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt[n]{J_n} \leq M\sqrt[n]{b-a}$.
4. Démontrer que, quel que soit le réel ε tel que $0 < \varepsilon < M$, il existe un intervalle $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, avec $\alpha < \beta$, tel que, pour tout x de $[\alpha,\beta]$: $|f(x)| \geq M - \varepsilon$.
5. En déduire que $J_n \geq (M-\varepsilon)^n(\beta-\alpha)$.
6. Montrer que, pour tout réel $c > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{c} = 1$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{J_n} = M$.

Exercice 16

Soit a un entier naturel non nul. On pose $f(a) = \int_0^1 \sqrt{1-x^a}\ dx$.

1. Prouver que, pour tout $x \in [0,1]$: $1 - x^a \leq \sqrt{1-x^a} \leq 1 - \frac{1}{2}x^a$.
2. En déduire que $\frac{a}{1+a} < f(a) < \frac{2a+1}{2a+2}$. Calculer $\lim\limits_{a\to+\infty} f(a)$.

Exercice 17

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

1. Soit $C = \{M(x,y)\ ;\ y = \sqrt{1-x^2},\ -1 \leq x \leq 1\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.
2. Soit $C = \{M(x,y)\ ;\ xy = 1,\ 1 \leq 2x \leq 2\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.
3. Déterminer le volume du cylindre engendré par la rotation autour de l'axe (Ox) du segment d'équation $y = R$, $0 \leq x \leq h$, avec $h > 0$ et $R > 0$.

Exercice 18

L'espace est muni d'un repère orthonormé. Calculer le volume du solide S dans chacun des cas suivants.

1. S est défini par : $|x| + |y| \leq 2 - \frac{2}{3}z$ et $0 \leq z \leq 3$.
2. S est défini par : $\sup(|x|,|y|) \leq 1$ et $0 \leq z \leq 1$.
3. S est défini par : $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
4. S est une boule de rayon R.

Exercice 19

On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x^3}$ et l'on pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $s_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

1. Vérifier que f est décroissante et positive.
2. Montrer que (s_n) est croissante.
3. Calculer $\int_1^n f(t)\,dt$ pour $n\geq 1$; en déduire que $0\leq\int_1^n f(t)\,dt\leq\frac{1}{2}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n f(t)\,dt$.
4. Montrer que, pour tout entier $k\geq 2$: $\int_k^{k+1} f(t)\,dt\leq f(k)\leq\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$.
5. En déduire que, pour $n\geq 2$: $\int_2^{n+1} f(t)\,dt\leq s_n-f(1)\leq\int_1^n f(t)\,dt$.
6. En déduire que (s_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 20

Soit f une fonction continue et croissante sur $[0,+\infty[$. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $I_n=\int_0^{1+\frac{1}{n}} f(x)\,dx$ et $s_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=\int_0^1 f(x)\,dx$.
2. Montrer que, pour tout entier k vérifiant $0\leq k\leq n$: $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.
3. En déduire l'encadrement $I_n+\frac{1}{n}\left[f(0)-f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\leq s_n\leq I_n$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=\int_0^1 f(x)\,dx$.
4. Application. On prend $f(x)=x^p$, où p est un entier tel que $p\geq 2$. Établir que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$.

Exercice 21

Pour tout entier naturel n, on définit les nombres $x_n=\int_0^1 t^n\cos t\,dt$ et $y_n=\int_0^1 t^n\sin t\,dt$.

1. Calculer x_0 et x_1.
2. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont décroissantes et positives.
3. Montrer, à l'aide de deux intégrations par parties, que pour tout entier naturel n : $x_{n+1}=-(n+1)y_n+\sin 1$ et $y_{n+1}=(n+1)x_n-\cos 1$.
4. En déduire que $\lim y_n=\lim x_n=0$, $\lim nx_n=\cos 1$ et $\lim ny_n=\sin 1$.

Exercice 22

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\,]0,\pi]$. On pose $s_n=1+e^{it}+\cdots+e^{i(n-1)t}$.
   a) Donner, en fonction de n et t, une autre expression de s_n.
   b) En déduire que $\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\cos\frac{(n+1)t}{2}$.
   c) En déduire que $\sum_{k=1}^{n}\cos kt=-\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\,dt$.

   a) Calculer $\int_0^\pi t\cos(nt)\,dt$. b) Calculer $\int_0^\pi t^2\cos(nt)\,dt$. c) En déduire que $I_n = \frac{1}{n^2}$.

3. Montrer que $\int_0^\pi (\sum_{k=1}^n \cos kt)\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

4. Soit $x > 0$ et φ une fonction dérivable sur $[0,\pi]$ dont la dérivée φ' est continue sur $[0,\pi]$.

   a) Intégrer une fois par parties $\int_0^\pi \varphi\,(t)\sin(xt)\,dt$.

   b) Montrer que $\left|\int_0^\pi \varphi\,'(t)\cos(xt)\,dt\right| \le \int_0^\pi |\varphi'(t)|\,dt$.

   c) En déduire que $\left|\int_0^\pi \varphi\,(t)\sin(xt)\,dt\right| \le \frac{1}{x}\left[|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| + \int_0^\pi |\varphi'(t)|\,dt\right]$.

   d) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^\pi \varphi\,(t)\sin(xt)\,dt = 0$.

5. On pose $\varphi(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{\sin\frac{t}{2}}$ si $t \in]0,\pi]$ et $\varphi(0) = -2$.

   a) Montrer que φ est continue sur $[0,\pi]$.

   b) On admet que φ est dérivable sur $[0,\pi]$ et que sa dérivée φ' est continue sur $[0,\pi]$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi\,(t)\sin\frac{(2n+1)t}{2}\,dt.$$

   c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$.

Corrigés détaillés

Corrigé de l'exercice 1

a) $|t-2| = 2 - t$ sur $[0,2]$ et $t - 2$ sur $[2,4]$. Par la relation de Chasles :

$$\int_0^4 |t-2|\,dt = \int_0^2 (2-t)\,dt + \int_2^4 (t-2)\,dt = \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t\right]_2^4 = 2 + 2 = 4.$$

b) Sur $[-1,1]$, $x - |x-1| = 2x - 1$; sur $[1,2]$, $x - |x-1| = 1$. Donc l'intégrale vaut $[x^2 - x]_{-1}^1 + [x]_1^2 = (0-2) + 1 = -1$.

c) $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

d) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

e) $\tan^2 x = (1 + \tan^2 x) - 1$: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx = [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$.

f) La variable d'intégration est t. Si $x = 0$, l'intégrale est nulle. Si $x \neq 0$: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(tx)\,dt = \left[-\frac{\cos(tx)}{x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1-\cos\frac{\pi x}{2}}{x}$.

g) La fonction $x \mapsto \frac{x^{2009}}{x^{14}+1}$ est continue et impaire sur $[-1,1]$: l'intégrale est nulle.

h) Forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x)=x^2+1$: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=\sqrt{2}-1$.

i) Par parties avec $u(t)=t$, $v'(t)=\sin t$: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt=[-t\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=0+1=1$.

j) Par parties avec $u(t)=t^2$, $v'(t)=\sin t$: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\sin t\,dt=[-t^2\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt$. Une seconde intégration par parties donne $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt=[t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=\frac{\pi}{2}-1$. L'intégrale vaut $\pi-2$.

k) Par parties avec $u(t)=t$ et $v'(t)=\sqrt{1-t}$, $v(t)=-\frac{2}{3}(1-t)\sqrt{1-t}$:

$$\int_0^1 t\sqrt{1-t}\,dt=\left[-\frac{2}{3}t(1-t)\sqrt{1-t}\right]_0^1+\frac{2}{3}\int_0^1(1-t)\sqrt{1-t}\,dt=0+\frac{2}{3}\left[-\frac{2}{5}(1-t)^2\sqrt{1-t}\right]_0^1=\frac{4}{15}.$$

l) $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ est la dérivée de $\frac{\sin x}{x}$: l'intégrale vaut $\left[\frac{\sin x}{x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}=\frac{2(1-\sqrt{2})}{\pi}$.

m) Forme $u'\sin(\pi u)$ avec $u(t)=t^2+t+1$: $\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi(t^2+t+1))\right]_0^1=\frac{-\cos 3\pi+\cos}{\pi}=0$.

Corrigé de l'exercice 2

1. $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ et $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$.

2. $\sin^4 x=\frac{(1-\cos 2x)^2}{4}=\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}$ et $\cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2}$, donc

$$\sin^4 x=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)\,dx=\left[\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}\right]_0^{\frac{\pi}{8}}=\frac{3\pi}{64}-\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{32}$.

Corrigé de l'exercice 3

1. La fonction $x\mapsto xf(x)$ est dérivable sur $[a,b]$, de dérivée $x\mapsto f(x)+xf'(x)$, continue. Donc

$$\int_a^b\big(xf'(x)+f(x)\big)\,dx=[xf(x)]_a^b=bf(b)-af(a).$$

2. $\int_0^1\sqrt{x+1}\,dx=\left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_0^1=\frac{2}{3}\big(2\sqrt{2}-1\big)$.

Appliquons 1. à $f(x)=\sqrt{x+1}$ sur $[0,1]$ ($f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ est continue) : $\int_0^1\frac{x}{2\sqrt{x+1}}\,dx+\int_0^1\sqrt{x+1}\,dx=\sqrt{2}$. Donc

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx=2\left(\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{2}-2}{3}\right)=\frac{4-2\sqrt{2}}{3}.$$

Corrigé de l'exercice 4

1. f est continue sur $[0,4]$, dérivable sur $]0,4]$ et $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-1>0$ pour $0<x<4$: f est strictement croissante sur $[0,4]$, $f(0)=0$, $f(4)=4$. Elle réalise une bijection de $[0,4]$ sur $[0,4]$.

Soit $y\in[0,4]$ et $s=\sqrt{x}\in[0,2]$: $y=4s-s^2\Leftrightarrow s^2-4s+y=0\Leftrightarrow s=2-\sqrt{4-y}$ (seule racine dans $[0,2]$). Donc

$$f^{-1}(y)=\big(2-\sqrt{4-y}\big)^2=8-y-4\sqrt{4-y}.$$

2. $I(a) = \left[\frac{8}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{8}{3}a\sqrt{a} - \frac{a^2}{2}$.

Posons $s = \sqrt{a}$ et $b = f(a) = 4s - s^2$, de sorte que $4 - b = (2-s)^2$ et $\sqrt{4-b} = 2 - s$. Alors

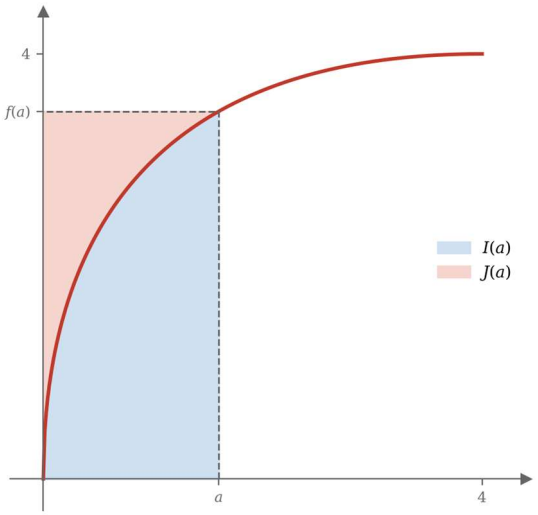
$$J(a) = \left[8y - \frac{y^2}{2} + \frac{8}{3}(4-y)\sqrt{4-y}\right]_0^b = 8b - \frac{b^2}{2} + \frac{8}{3}(2-s)^3 - \frac{64}{3}.$$

En développant : $8b = 32s - 8s^2$, $\frac{b^2}{2} = 8s^2 - 4s^3 + \frac{s^4}{2}$, $\frac{8}{3}(2-s)^3 = \frac{64}{3} - 32s + 16s^2 - \frac{8}{3}s^3$, d'où

$$J(a) = \frac{4}{3}s^3 - \frac{s^4}{2} = \frac{4}{3}a\sqrt{a} - \frac{a^2}{2}.$$

3. $I(a) + J(a) = 4a\sqrt{a} - a^2 = a\left(4\sqrt{a} - a\right) = af(a)$.

Interprétation. $I(a)$ est l'aire du domaine situé sous la courbe de f entre les abscisses 0 et a ; $J(a)$ est l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des ordonnées et la droite $y = f(a)$ (par symétrie par rapport à la droite $y = x$). Leur réunion est le rectangle de côtés a et $f(a)$.



Exercice 4 : $I(a) + J(a)$ est l'aire du rectangle de côtés a et $f(a)$.

Corrigé de l'exercice 5

1. La fonction $x \mapsto x^n\sqrt{1-x}$ est continue sur $[0,1]$: I_n existe.

Soit $n \geq 1$. On intègre par parties avec $u(x) = x^n$ et $v'(x) = \sqrt{1-x}$, $v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$ (u' et v' sont continues sur $[0,1]$) :

$$I_n = \left[-\frac{2}{3}x^n(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}\,dx = \frac{2n}{3}(I_{n-1} - I_n).$$

D'où $(2n+3)I_n = 2nI_{n-1}$, soit $I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$.

2. $I_0 = \left[-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$ et $I_1 = \frac{2}{5}I_0 = \frac{4}{15}$.

3. Par récurrence : $I_n = \frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{7}\times\ldots\times\frac{2n}{2n+3} = \frac{2^{n+1}\,n!}{3\times5\times7\times\ldots\times(2n+3)}$.

Comme $3\times5\times\ldots\times(2n+3) = \frac{(2n+3)!}{2\times4\times\ldots\times(2n+2)} = \frac{(2n+3)!}{2^{n+1}(n+1)!}$:

$$I_n = \frac{2^{2n+2}\,n!\,(n+1)!}{(2n+3)!}.$$

4. $x^n = (1-(1-x))^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\, C_n^k (1-x)^k$, donc $I_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\, C_n^k \int_0^1 (1-x)^k \sqrt{1-x}\, dx$. Or $x \mapsto -\frac{2}{2k+3}(1-x)^{k+1}\sqrt{1-x}$ est une primitive de $x \mapsto (1-x)^k\sqrt{1-x}$, donc cette dernière intégrale vaut $\frac{2}{2k+3}$ et

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2(-1)^k C_n^k}{2k+3}.$$

Corrigé de l'exercice 6

1. f est définie et continue sur $[-2,2]$, dérivable sur $]-2,2[$ et $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Si $x \le 0$, $f'(x) > 0$; si $x > 0$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} > x \Leftrightarrow x < \sqrt{2}$.

x	-2		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	-2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

En 2 : $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1 - \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \to -\infty$; en -2 : $\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = 1 + \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} \to +\infty$. La courbe ζ_1 admet des demi-tangentes verticales aux points $(2,2)$ et $(-2,-2)$.

2. a) La fonction $h: t \mapsto \sqrt{4-t^2}$ est continue sur $[-2,2]$ et $u: x \mapsto 2\cos x$ est dérivable sur $[0,\pi]$, à valeurs dans $[-2,2]$. Donc g est dérivable sur $[0,\pi]$ et

$$g'(x) = u'(x)\, h\big(u(x)\big) = -2\sin x\sqrt{4-4\cos^2 x} = -4\sin x\,|\sin x| = -4\sin^2 x,$$

car $\sin x \ge 0$ sur $[0,\pi]$.

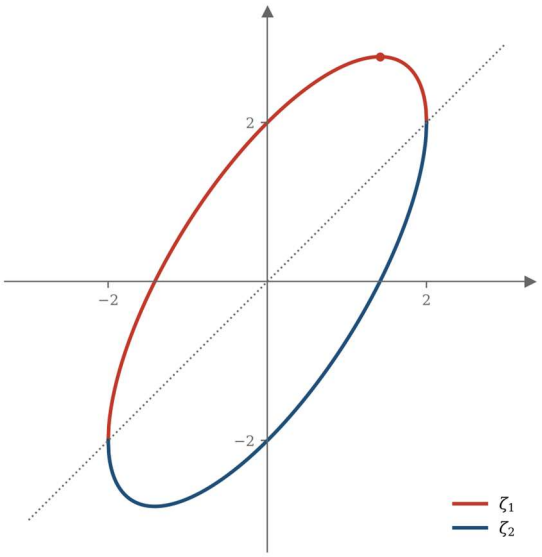
b) $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^0 \sqrt{4-t^2}\, dt = 0$. g est donc la primitive de $x \mapsto -4\sin^2 x = -2 + 2\cos 2x$ qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$:

$$g(x) = [-2t + \sin 2t]_{\frac{\pi}{2}}^{x} = \pi - 2x + \sin 2x.$$

(On retrouve $g(0) = \pi$, aire du quart de disque de rayon 2.)

3. $M(x,y) \in \zeta_1 \Leftrightarrow y - x = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow (y \ge x \text{ et } (y-x)^2 + x^2 = 4)$. La symétrie de centre O transforme (x,y) en $(-x,-y)$: $M(x,y) \in \zeta_2 \Leftrightarrow (y \le x \text{ et } (y-x)^2 + x^2 = 4)$. Donc

$$\zeta:\ (y-x)^2 + x^2 = 4, \qquad \text{soit} \qquad 2x^2 - 2xy + y^2 = 4.$$



Exercice 6 : la courbe $\zeta = \zeta_1 \cup \zeta_2$.

Corrigé de l'exercice 7

1. $w_0 = \frac{\pi}{2}$ et $w_1 = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

2. Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos t \leq 1$, donc $(\cos t)^{n+1} \leq (\cos t)^n$; par comparaison, $w_{n+1} \leq w_n$.

3. $(\cos t)^n \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $w_n \geq 0$. Décroissante et minorée par 0, la suite converge.

4. On intègre par parties avec $u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t$:

$$w_{n+2} = [(\cos t)^{n+1}\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \sin^2 t\, dt = (n+1)(w_n - w_{n+2}),$$

car $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$. D'où $(n+2)w_{n+2} = (n+1)w_n$.

5. Par récurrence. Pour $n = 0$: $w_0 = \frac{\pi}{2}$ et $w_1 = 1$, ce qui convient. Supposons les formules vraies au rang n. D'après 4. :

$$w_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} w_{2n} = \frac{\pi C_{2n}^n}{2 \times 4^n} \times \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} = \frac{\pi C_{2n+2}^{n+1}}{2 \times 4^{n+1}},$$

puisque $C_{2n+2}^{n+1} = C_{2n}^n \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}$; et

$$w_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} w_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \times \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}.$$

6. D'après 5., $w_n > 0$ pour tout n. La suite étant décroissante : $w_{2n+2} \leq w_{2n+1} \leq w_{2n}$, et $w_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} w_{2n}$. En divisant par $w_{2n} > 0$: $0 < \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{w_{2n+1}}{w_{2n}} \leq 1$. Par encadrement, $\lim \frac{w_{2n+1}}{w_{2n}} = 1$.

7. Posons $P_n = \frac{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}$. On a $2 \times 4 \times \ldots \times 2n = 2^n n!$ et $1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$, donc $P_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = \frac{4^n}{C_{2n}^n}$. D'après 5. :

$$\frac{w_{2n+1}}{w_{2n}} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \times \frac{2 \times 4^n}{\pi C_{2n}^n} = \frac{2}{\pi} \times \frac{P_n^2}{2n+1}.$$

Donc $\frac{P_n^2}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{w_{2n+1}}{w_{2n}} \to \frac{\pi}{2}$.

8. $u_{n+1} = (n+2)w_{n+1}w_{n+2} = (n+2)w_{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} w_n = u_n$: la suite est constante, égale à $u_0 = w_0 w_1 = \frac{\pi}{2}$.

Comme $0 < w_{n+1} \leq w_n$: $w_{n+1}^2 \leq w_n w_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$, donc $0 < w_{n+1} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}}$ et $\lim w_n = 0$.

Corrigé de l'exercice 8

1. Soit $n \geq 1$. On intègre par parties avec $u(x) = (x^2-1)^n$ et $v'(x) = 1$, $v(x) = x$:

$$I_n = [x(x^2-1)^n]_{-1}^1 - 2n \int_{-1}^1 x^2 (x^2-1)^{n-1} dx = -2n \int_{-1}^1 x^2 (x^2-1)^{n-1} dx.$$

En écrivant $x^2 = (x^2-1) + 1$, on obtient $I_n = -2n(I_n + I_{n-1})$.

D'où $(2n+1)I_n = -2nI_{n-1}$.

2. $I_0 = 2$ et $I_n = -\frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$, donc

$$I_n = (-1)^n 2 \times \frac{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}{3 \times 5 \times \ldots \times (2n+1)} = \frac{(-1)^n 2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Corrigé de l'exercice 9

1. Soit $\Phi(x) = \int_0^x t^p (1-t)^q \, dt$ et $\Psi(x) = \int_{1-x}^1 t^q (1-t)^p \, dt = -\int_1^{1-x} t^q (1-t)^p \, dt$ pour $x \in [0,1]$. Ces fonctions sont dérivables, $\Phi'(x) = x^p(1-x)^q$ et, par le théorème de dérivation de $x \mapsto \int_a^{u(x)}$ avec $u(x) = 1-x$: $\Psi'(x) = -(-1)(1-x)^q x^p = \Phi'(x)$. Comme $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$, $\Phi = \Psi$ sur $[0,1]$; pour $x = 1$: $B(p,q) = B(q,p)$.

2. Pour $p \geq 1$, par parties avec $u(t) = t^p$ et $v'(t) = (1-t)^q$, $v(t) = -\frac{(1-t)^{q+1}}{q+1}$:

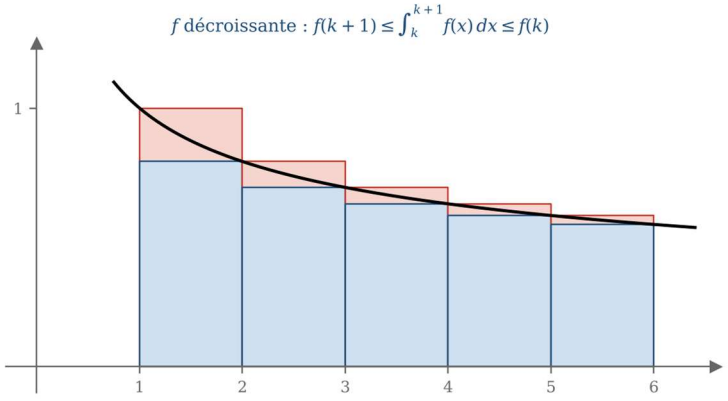
$$B(p,q) = \left[-\frac{t^p(1-t)^{q+1}}{q+1}\right]_0^1 + \frac{p}{q+1} \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q+1} \, dt = \frac{p}{q+1} B(p-1, q+1).$$

3. $B(0,n) = \int_0^1 (1-t)^n \, dt = \frac{1}{n+1}$. En appliquant p fois la relation de la question 2 :

$$B(p,q) = \frac{p}{q+1} \times \frac{p-1}{q+2} \times \ldots \times \frac{1}{q+p} B(0, p+q) = \frac{p!\, q!}{(p+q)!} \times \frac{1}{p+q+1} = \frac{p!\, q!}{(p+q+1)!}.$$

Corrigé de l'exercice 10

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour $x \in [k, k+1]$: $\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$; on intègre sur $[k, k+1]$, intervalle de longueur 1.



Comparaison d'une somme et d'une intégrale pour une fonction décroissante.

2. En sommant l'inégalité de droite pour $k = 1, \dots, n$ (relation de Chasles) : $\int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \leq S_n$. En sommant celle de gauche pour $k = 1, \dots, n-1$: $S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

3. La fonction $x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ sur $]0, +\infty[$. Donc $S_n \geq \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2} - 1\right)$, qui tend vers $+\infty$: $\lim S_n = +\infty$, la suite (S_n) est divergente.

4. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$; pour $k \geq 2$: $\frac{1}{k\sqrt[3]{k}} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$. En sommant pour $k = 2, \dots, n$: $T_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$ est $x \mapsto \frac{-3}{\sqrt[3]{x}}$, donc

$$T_n \leq 1 + 3\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \leq 4.$$

La suite (T_n) est croissante ($T_{n+1} - T_n > 0$) et majorée par 4 : elle est convergente.

Corrigé de l'exercice 11

1. a) $\tan'(t) = 1 + \tan^2 t$. **b)** $u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t \, dt = [\tan t - t]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$.

2. Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leq \tan t \leq 1$, donc $\tan^{2n+4} t \leq \tan^{2n+2} t$ et $u_{n+1} \leq u_n$.

3. $u_{n+1} + u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} t(1 + \tan^2 t)dt = \left[\frac{\tan^{2n+3} t}{2n+3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2n+3}$.

4. La suite étant décroissante : $2u_{n+1} \leq u_n + u_{n+1} \leq 2u_n$. Donc $u_n \geq \frac{1}{2(2n+3)}$ pour tout n, et $u_{n+1} \leq \frac{1}{2(2n+3)}$, c'est-à-dire $u_n \leq \frac{1}{2(2n+1)}$ pour $n \geq 1$; pour $n = 0$, $u_0 = 1 - \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{2}$.

Par encadrement, $\lim u_n = 0$. De plus $\frac{n}{2n+3} \leq 2nu_n \leq \frac{n}{2n+1}$, donc $\lim 2nu_n = \frac{1}{2}$.

5. a) Par récurrence. $S_0 = 1 = \frac{\pi}{4} + u_0$. Si $S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$, alors, d'après 3. :

$$S_{n+1} = S_n + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_n + (-1)^{n+1}(u_n + u_{n+1}) = \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} u_{n+1}.$$

b) $\left|S_n - \frac{\pi}{4}\right| = u_n \to 0$: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$.

Corrigé de l'exercice 12

1. Pour y fixé, la fonction $x \mapsto \frac{\sin(xy)}{x}$ est continue sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$: $f(y)$ existe.

2. La fonction cosinus est continue sur $[a, b]$; d'après la formule de la moyenne, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b \cos t\, dt = (b-a)\cos c$, c'est-à-dire $\sin b - \sin a = (b-a)\cos c$.

3. Si $a < b$: $|\sin b - \sin a| = |b-a|\,|\cos c| \leq |b-a|$. De même, la formule de la moyenne appliquée au sinus donne $\cos a - \cos b = (b-a)\sin c'$, d'où $|\cos b - \cos a| \leq |b-a|$. Les inégalités sont symétriques en a et b et évidentes si $a = b$.

4. Soit $y \neq y_0$. Par linéarité :

$$\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} - A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} h(x)\, dx, \qquad h(x) = \frac{\sin(xy)-\sin(xy_0)}{x(y-y_0)} - \cos(xy_0).$$

Fixons $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. D'après 2. appliqué aux réels distincts xy_0 et xy, il existe c_x compris entre xy_0 et xy tel que $\sin(xy) - \sin(xy_0) = (xy - xy_0)\cos c_x$. Donc $h(x) = \cos c_x - \cos(xy_0)$ et, d'après 3. :

$$|h(x)| \leq |c_x - xy_0| \leq |xy - xy_0| \leq \pi |y - y_0|.$$

h étant continue sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$:

$$\left|\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} - A\right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |h(x)|\, dx \leq \frac{\pi^2}{2}|y-y_0|.$$

Le majorant tend vers 0 lorsque $y \to y_0$, d'où la limite annoncée.

Ainsi f est dérivable en y_0 et $f'(y_0) = A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(xy_0)\, dx$, soit

$$f'(y_0) = \frac{\sin(\pi y_0) - \sin\frac{\pi y_0}{2}}{y_0} \text{ si } y_0 \neq 0, \qquad f'(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Corrigé de l'exercice 13

1. a) La fonction $t \mapsto [f(t) + xg(t)]^2$ est continue et positive sur $[a, b]$, avec $a < b$: son intégrale est positive ou nulle.

b) En développant, pour tout réel x :

$$P(x) = x^2 \int_a^b g^2 + 2x \int_a^b f\, g + \int_a^b f^2 \geq 0.$$

• Si $\int_a^b g^2 \neq 0$, P est un trinôme du second degré de signe constant : son discriminant est négatif ou nul, soit $4\left(\int_a^b f\, g\right)^2 - 4\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \leq 0$.

• Si $\int_a^b g^2 = 0$, la fonction affine $x \mapsto 2x\int_a^b f\, g + \int_a^b f^2$ est positive sur $\mathbb{R}$, ce qui impose $\int_a^b f\, g = 0$; l'inégalité est encore vraie.

2. Les fonctions $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$ sont continues sur $[a, b]$. D'après l'inégalité de Schwarz :

$$\left(\int_a^b \sqrt{f(x)g(x)}\, dx\right)^2 \leq \int_a^b f(x)\, dx \times \int_a^b g(x)\, dx.$$

Or $\sqrt{f(x)g(x)} \geq 1$, donc $\int_a^b \sqrt{f(x)g(x)}\, dx \geq b - a > 0$, et le membre de gauche est supérieur ou égal à $(b-a)^2$.

Corrigé de l'exercice 14

1. f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$: $f([a,b]) = [m,M]$, où m et M sont le minimum et le maximum de f.

2. • Si $g \geq 0$ sur $[a,b]$: pour tout t, $m\,g(t) \leq f(t)g(t) \leq M\,g(t)$, donc $m\int_a^b g \leq \int_a^b f\,g \leq M\int_a^b g$. Comme $\int_a^b g \geq 0$ et $\neq 0$, on divise par ce réel strictement positif.

• Si $g \leq 0$ sur $[a,b]$: $M\,g(t) \leq f(t)g(t) \leq m\,g(t)$, donc $M\int_a^b g \leq \int_a^b f\,g \leq m\int_a^b g$; en divisant par $\int_a^b g < 0$, les inégalités changent de sens et l'on obtient le même encadrement.

Corrigé de l'exercice 15

1. La fonction $|f|$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$: elle y admet un maximum M, atteint en un réel x_0.

2. Pour tout $t \in [a,b]$, $0 \leq |f(t)|^n \leq M^n$; par comparaison, $J_n \leq (b-a)M^n$.

3. La fonction racine n-ième est croissante sur $[0,+\infty[$: $\sqrt[n]{J_n} \leq \sqrt[n]{(b-a)M^n} = M\sqrt[n]{b-a}$.

4. $|f|$ est continue en x_0 et $|f(x_0)| = M$: il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [a,b]$ vérifiant $|x - x_0| \leq \eta$, $||f(x)| - M| \leq \varepsilon$, donc $|f(x)| \geq M - \varepsilon$. L'ensemble $[a,b] \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ est un intervalle $[\alpha,\beta]$ avec $\alpha < \beta$ (puisque $a < b$), qui convient.

5. $|f|^n \geq 0$ et $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, donc $J_n \geq \int_\alpha^\beta |f(t)|^n\,dt \geq (M-\varepsilon)^n(\beta-\alpha)$, car $M - \varepsilon > 0$.

6. *Limite de $\sqrt[n]{c}$.* Si $c \geq 1$, posons $h_n = \sqrt[n]{c} - 1 \geq 0$; par l'inégalité de Bernoulli, $c = (1+h_n)^n \geq 1 + nh_n$, donc $0 \leq h_n \leq \frac{c-1}{n}$ et $h_n \to 0$. Si $0 < c < 1$, $\sqrt[n]{c} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/c}} \to 1$.

Conclusion. Soit $\varepsilon \in]0,M[$. D'après 3. et 5. : $(M-\varepsilon)\sqrt[n]{\beta-\alpha} \leq \sqrt[n]{J_n} \leq M\sqrt[n]{b-a}$. Les deux termes extrêmes tendent vers $M - \varepsilon$ et M : il existe un rang N à partir duquel $M - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{J_n} \leq M + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout ε assez petit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{J_n} = M$.

Corrigé de l'exercice 16

1. Soit $x \in [0,1]$ et $u = x^a \in [0,1]$. Comme $0 \leq 1-u \leq 1$, $1-u \leq \sqrt{1-u}$. D'autre part $1 - \frac{u}{2} \geq 0$ et $\left(1-\frac{u}{2}\right)^2 = 1 - u + \frac{u^2}{4} \geq 1 - u$, donc $\sqrt{1-u} \leq 1 - \frac{u}{2}$.

2. Les fonctions $x \mapsto \sqrt{1-x^a} - (1-x^a)$ et $x \mapsto 1 - \frac{1}{2}x^a - \sqrt{1-x^a}$ sont continues, positives sur $[0,1]$ et ne s'annulent respectivement qu'en 0 et 1, et qu'en 0. Leurs intégrales sont donc strictement positives :

$$\int_0^1 (1-x^a)\,dx < f(a) < \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^a\right)dx, \qquad \text{soit} \qquad \frac{a}{a+1} < f(a) < \frac{2a+1}{2a+2}.$$

Les deux bornes tendent vers 1 : $\lim\limits_{a\to+\infty} f(a) = 1$.

Remarque. Le résultat et sa démonstration restent valables pour a réel strictement positif, une fois définie la fonction $x \mapsto x^a$ (chapitre 8).

Corrigé de l'exercice 17

On applique $V = \pi\int_a^b f\,(x)^2\,dx$.

1. $V = \pi \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}$ (boule de rayon 1).

2. C est la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$: $V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^2} = \pi\left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \pi$.

3. $V = \pi \int_0^h R^2\ dx = \pi R^2 h$.

Corrigé de l'exercice 18

On applique $V = \int_a^b S(z)\,dz$, où $S(z)$ est l'aire de la section du solide par le plan de cote z.

1. Pour $z \in [0,3]$, la section est le carré $|x| + |y| \le c$ avec $c = 2 - \frac{2}{3}z \ge 0$; ses diagonales mesurent $2c$, son aire est $2c^2$. Donc

$$V = \int_0^{32}\left(2 - \frac{2}{3}z\right)^2 dz = 2\left[4z - \frac{4}{3}z^2 + \frac{4}{27}z^3\right]_0^3 = 2(12 - 12 + 4) = 8.$$

(S est une pyramide de base d'aire 8 et de hauteur 3 : $V = \frac{1}{3} \times 8 \times 3$.)

2. La section est le carré $|x| \le 1, |y| \le 1$, d'aire 4 : $V = \int_0^{14}\ dz = 4$.

3. Pour $z \in [-1,1]$, la section est le disque $x^2 + y^2 \le 1 - z^2$, d'aire $\pi(1-z^2)$: $V = \int_{-1}^{1} \pi\,(1 - z^2)dz = \frac{4\pi}{3}$.

4. De même, pour une boule de rayon R centrée en O : $V = \int_{-R}^{R} \pi\,(R^2 - z^2)dz = \pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Corrigé de l'exercice 19

1. Sur $[1, +\infty[$: $f(x) > 0$ et $f'(x) = -\frac{3}{x^4} < 0$.

2. $s_{n+1} - s_n = f(n+1) > 0$: la suite (s_n) est strictement croissante.

3. $\int_1^n \frac{dt}{t^3} = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, de limite $\frac{1}{2}$.

4. Soit $k \ge 2$. f étant décroissante : $f(t) \le f(k)$ sur $[k, k+1]$ et $f(t) \ge f(k)$ sur $[k-1, k]$. En intégrant sur ces intervalles de longueur 1 : $\int_k^{k+1} f(t)\,dt \le f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$.

5. On somme pour $k = 2, \ldots, n$ et l'on applique la relation de Chasles : $\int_2^{n+1} f(t)\,dt \le s_n - f(1) \le \int_1^n f(t)\,dt$.

6. D'après 5. et 3. : $s_n \le 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Croissante et majorée, (s_n) converge vers un réel ℓ. De plus $\int_2^{n+1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \to \frac{1}{8}$. En passant à la limite dans 5. :

$$\frac{9}{8} \le \ell \le \frac{3}{2}.$$

Corrigé de l'exercice 20

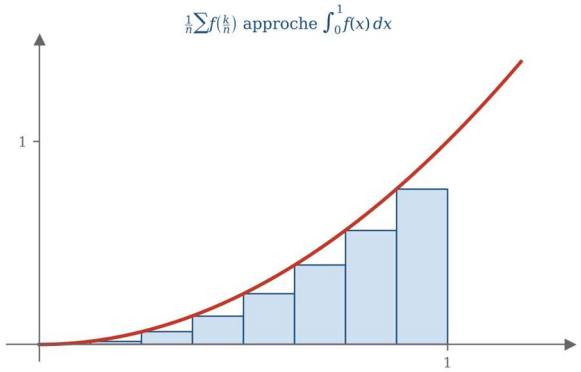
1. $I_n - \int_0^1 f(x)\,dx = \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x)\,dx$. Sur $\left[1, 1+\frac{1}{n}\right] \subset [1,2]$, $f(1) \le f(x) \le f(2)$, donc $\frac{f(1)}{n} \le \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x)\,dx \le \frac{f(2)}{n}$. Par encadrement, cette intégrale tend vers 0.

2. f étant croissante, pour $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$: $f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k+1}{n}\right)$. On intègre sur cet intervalle de longueur $\frac{1}{n}$.

3. En sommant pour $k = 0, \ldots, n$ (relation de Chasles) :

$$s_n \leq I_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = s_n - \frac{f(0)}{n} + \frac{1}{n} f\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

D'où $I_n + \frac{1}{n}\left[f(0) - f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \leq s_n \leq I_n$. Comme $f(1) \leq f\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq f(2)$, le terme $\frac{1}{n}\left[f(0) - f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$ tend vers 0 ; avec 1., $\lim s_n = \int_0^1 f(x)\,dx$.



Exercice 20 : somme de rectangles et aire sous la courbe.

4. $f : x \mapsto x^p$ est continue et croissante sur $[0, +\infty[$, et $s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{k^p}{n^p} = \frac{1+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}.$$

Corrigé de l'exercice 21

1. $x_0 = [\sin t]_0^1 = \sin 1$. Par parties : $x_1 = [t\sin t]_0^1 - \int_0^1 \sin t\,dt = \sin 1 + \cos 1 - 1$.

2. Pour $t \in [0,1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\cos t > 0$, $\sin t \geq 0$ et $0 \leq t^{n+1} \leq t^n$. Donc $0 \leq t^{n+1}\cos t \leq t^n \cos t$ et $0 \leq t^{n+1}\sin t \leq t^n \sin t$; par comparaison, $0 \leq x_{n+1} \leq x_n$ et $0 \leq y_{n+1} \leq y_n$.

3. Avec $u(t) = t^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t$: $x_{n+1} = [t^{n+1}\sin t]_0^1 - (n+1)\int_0^1 t^n \sin t\,dt = \sin 1 - (n+1)y_n$.

Avec $u(t) = t^{n+1}$ et $v'(t) = \sin t$: $y_{n+1} = [-t^{n+1}\cos t]_0^1 + (n+1)\int_0^1 t^n \cos t\,dt = -\cos 1 + (n+1)x_n$.

4. $0 \leq x_n \leq \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$ et de même $0 \leq y_n \leq \frac{1}{n+1}$: $\lim x_n = \lim y_n = 0$.

D'après 3. : $(n+1)x_n = y_{n+1} + \cos 1 \to \cos 1$ et $(n+1)y_n = \sin 1 - x_{n+1} \to \sin 1$. Comme $nx_n = \frac{n}{n+1}(n+1)x_n$: $\lim nx_n = \cos 1$ et $\lim ny_n = \sin 1$.

Corrigé de l'exercice 22

1. a) s_n est la somme de n termes d'une suite géométrique de raison $e^{it} \neq 1$ (car $0 < t \leq \pi$) :

$$s_n = \frac{1-e^{int}}{1-e^{it}} = \frac{e^{i\frac{nt}{2}}\left(e^{-i\frac{nt}{2}} - e^{i\frac{nt}{2}}\right)}{e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}\right)} = e^{i\frac{(n-1)t}{2}} \frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

b) $\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} = e^{it}s_n = e^{i\frac{(n+1)t}{2}}\,\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$. En prenant la partie réelle : $\sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\cos\frac{(n+1)t}{2}$.

c) $2\sin\frac{nt}{2}\cos\frac{(n+1)t}{2} = \sin\frac{(2n+1)t}{2} + \sin\left(-\frac{t}{2}\right) = \sin\frac{(2n+1)t}{2} - \sin\frac{t}{2}$. En divisant par $2\sin\frac{t}{2}$: $\sum_{k=1}^{n}\cos kt = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$.

2. a) Par parties : $\int_0^\pi t\cos(nt)\,dt = \left[\frac{t\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}[\cos(nt)]_0^\pi = \frac{(-1)^n-1}{n^2}$.

b) $\int_0^\pi t^2\cos(nt)\,dt = \left[\frac{t^2\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{n}\int_0^\pi t\sin(nt)\,dt$, et $\int_0^\pi t\sin(nt)\,dt = \left[-\frac{t\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nt)\,dt = -\frac{\pi(-1)^n}{n}$. Donc $\int_0^\pi t^2\cos(nt)\,dt = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}$.

c) $I_n = \frac{1}{2\pi}\times\frac{2\pi(-1)^n}{n^2} - \frac{(-1)^n-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}$.

3. Par linéarité : $\int_0^\pi (\sum_{k=1}^{n}\cos kt)\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt = \sum_{k=1}^{n} I_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

4. a) Avec $u = \varphi$ et $v'(t) = \sin(xt)$, $v(t) = -\frac{\cos(xt)}{x}$:

$$\int_0^\pi \varphi(t)\sin(xt)\,dt = \frac{\varphi(0) - \varphi(\pi)\cos(\pi x)}{x} + \frac{1}{x}\int_0^\pi \varphi'(t)\cos(xt)\,dt.$$

b) $\left|\int_0^\pi \varphi'(t)\cos(xt)\,dt\right| \le \int_0^\pi |\varphi'(t)|\,|\cos(xt)|\,dt \le \int_0^\pi |\varphi'(t)|\,dt$.

c) D'après a), l'inégalité triangulaire et b) : $\left|\int_0^\pi \varphi(t)\sin(xt)\,dt\right| \le \frac{1}{x}\left[|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| + \int_0^\pi |\varphi'(t)|\,dt\right]$.

d) Le crochet ne dépend pas de x : le majorant tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.

5. a) φ est continue sur $]0,\pi]$ (quotient de fonctions continues, $\sin\frac{t}{2} \neq 0$). En 0 : $\varphi(t) = \left(\frac{t}{2\pi} - 1\right)\times\frac{t}{\sin\frac{t}{2}} \to (-1)\times 2 = -2 = \varphi(0)$.

b) Pour $t \in]0,\pi]$, d'après 1. c) et la définition de φ :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) + \frac{1}{2}\varphi(t)\sin\frac{(2n+1)t}{2}.$$

Les deux membres sont des fonctions continues sur $[0,\pi]$ qui coïncident sur $]0,\pi]$, donc aussi en 0. En intégrant sur $[0,\pi]$ et en utilisant 3. :

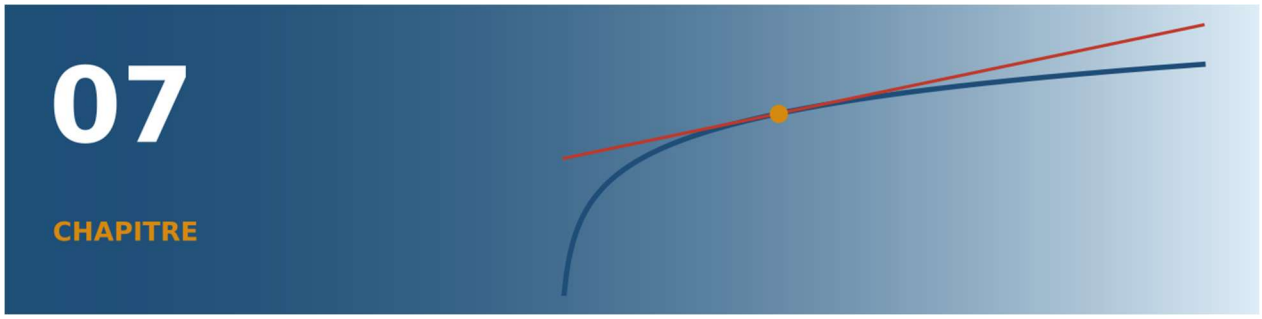
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt + \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(t)\sin\frac{(2n+1)t}{2}\,dt.$$

Or $\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{3}$, d'où la relation demandée.

c) D'après 4. d) appliqué avec $x = \frac{2n+1}{2} \to +\infty$, l'intégrale $\int_0^\pi \varphi(t)\sin\frac{(2n+1)t}{2}\,dt$ tend vers 0. Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Chapitre 7 — Fonction logarithme népérien



Cours • 14 exercices • Corrigés détaillés

Ce que vous devez savoir faire à la fin du chapitre

– Utiliser les propriétés algébriques du logarithme népérien ; résoudre des équations et des inéquations.

– Calculer des limites faisant intervenir ln, en particulier lever les indéterminations par les croissances comparées.

– Dériver $\ln u$, trouver les primitives de $\frac{u'}{u}$.

– Étudier une fonction comportant un logarithme, établir des inégalités.

– Étudier des suites à l'aide du logarithme et du calcul intégral.

Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 1, chapitre 7).

Cours

I. Définition et propriétés algébriques

Définition. La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 :

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \qquad x > 0.$$

Ainsi ln est dérivable (donc continue) sur $]0,+\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln 1 = 0$.

Propriétés algébriques. Pour tous réels strictement positifs a et b et tout entier relatif n :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \qquad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \qquad \ln\frac{1}{b} = -\ln b, \qquad \ln(a^n) = n\ln a, \qquad \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a.$$

Plus généralement, $\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n$ et, pour tout entier $n \geq 2$, $\ln\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\ln a$.

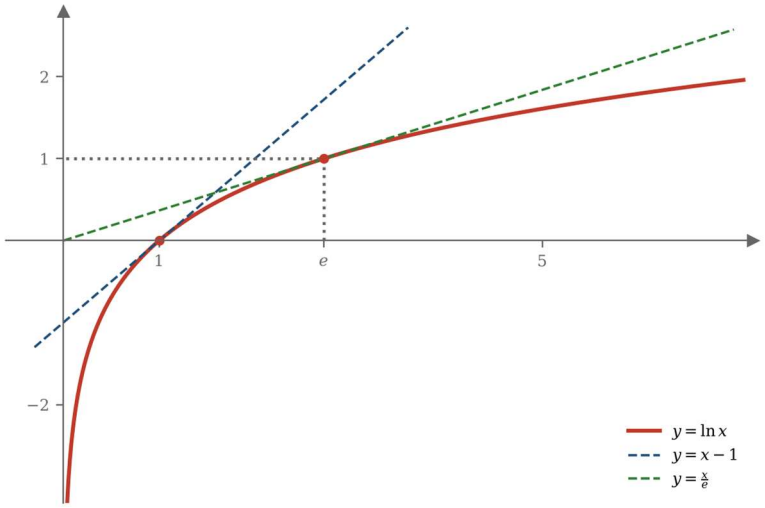
II. Étude de la fonction ln

Théorème.

– La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ et $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.

– $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$; $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
– $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
– ln réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. L'unique réel dont le logarithme vaut 1 est noté e : $\ln e = 1$ ($e \approx 2{,}718$).

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	‖			$+$			
$\ln x$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$



Courbe de la fonction ln, avec ses tangentes aux points d'abscisses 1 et e. L'axe des ordonnées est asymptote ; en $+\infty$, la courbe admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{\imath})$.

III. Limites usuelles

À retenir. Pour tous entiers naturels non nuls n et m :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^m} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^m (\ln x)^n = 0,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

Méthode. Les deux dernières limites sont des nombres dérivés ($\ln'(1) = 1$). Les quatre premières traduisent les **croissances comparées** : en $+\infty$ et en 0^+, « les puissances de x l'emportent sur le logarithme ». Pour les utiliser, on met en facteur le terme prépondérant.

Exemple. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

IV. Dérivées et primitives

Théorème. Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. La fonction $\ln u : x \mapsto \ln\big(u(x)\big)$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
Plus généralement, si u est dérivable et ne s'annule pas sur I, alors $\ln|u|$ est dérivable sur I et $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$.
Primitives. Si u est dérivable et ne s'annule pas sur un intervalle I, les primitives de $\dfrac{u'}{u}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln|u(x)| + c$.

La fonction $x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de ln sur $]0,+\infty[$.

Exemples. $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = [\ln(x^2+1)]_0^1 = \ln 2$; sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, une primitive de $\tan x = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}$ est $-\ln(\cos x)$.

V. Logarithme décimal

Définition. La fonction **logarithme décimal**, notée log, est définie sur $]0,+\infty[$ par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$. On a $\log 10 = 1$ et, pour tout entier relatif n, $\log(10^n) = n$. Elle possède les mêmes propriétés algébriques que ln.

Exercices

Exercice 1

1. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x\ln x - x + 1$.
   a) Étudier le sens de variation de g.
   b) En déduire le signe de g.
2. On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$.
   a) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en 1.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
   c) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

Exercice 2

1. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$.
   a) Étudier les variations de f.
   b) En déduire que, pour tout $x \geq 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1)$.
2. Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$.
   a) Étudier les variations de h.
   b) En déduire que, pour tout $x \geq 0$: $\ln(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
3. Étudier la limite éventuelle en 0^+ de $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = (1-x^2)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Montrer que f est continue. Étudier la parité de f et montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $[-1,1]$.

Exercice 4

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ par $g(x) = \frac{x\ln x}{x-1}$ et prolongée par continuité en 0 et en 1.

1. Que valent $g(0)$ et $g(1)$?

2. Étudier la branche infinie de la courbe $\mathcal{C}_g$.

Exercice 5

Soit n un entier naturel et g_n la fonction définie sur $]0,1[$ par $g_n(x) = x\left(\ln\frac{1}{x}\right)^n$.

1. Montrer que g_n est continue sur $]0,1[$.
2. Montrer que g_n admet un prolongement par continuité f_n sur $[0,1]$.

Exercice 6

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n\ln(1+x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$.

1. Étudier le sens de variation des fonctions h_n.
2. Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de h_n.
3. Étude du cas particulier $n = 1$.
   a) Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $]-1,+\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
   b) En déduire les variations de f_1 sur $]-1,+\infty[$.
4. Soit $n \geq 2$.
   a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]-1,+\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
   b) En déduire les variations de f_n sur $]-1,+\infty[$. On précisera les limites aux bornes.

Exercice 7

I. On pose, pour tout entier $n \geq 1$: $v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1}\frac{dt}{t}$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n \leq \ln n + 1$.

II. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1.
   a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est bien défini et strictement positif.
   b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
2.
   a) Pour tout entier k, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2.
   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}$.
   c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n^2 \geq 2n + 1$. En déduire la limite de la suite (u_n).
3.
   a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$: $u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}v_{n-1}$.
   b) En utilisant la partie I, établir que, pour tout entier $n \geq 2$: $u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$.

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
2. Montrer que, pour tout entier $k\geq 3$: $f(k)\leq\int_{k-1}^{k}f(x)\,dx\leq f(k-1)$.

Pour tout entier $n\geq 2$, on note $S_n=\sum_{k=2}^{n}f(k)$.

3.
   a) Montrer que, pour tout entier $n\geq 2$: $S_n-\frac{1}{2\ln 2}\leq\int_2^n f(x)\,dx\leq S_n-\frac{1}{n\ln n}$.
   b) En déduire que, pour tout entier $n\geq 2$: $\ln(\ln n)-\ln(\ln 2)\leq S_n\leq\ln(\ln n)-\ln(\ln 2)+\frac{1}{2\ln 2}$.
   c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\ln(\ln n)}$.
4. Pour tout entier $n\geq 2$, on note $u_n=S_n-\ln\big(\ln(n+1)\big)$ et $v_n=S_n-\ln(\ln n)$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
5.
   a) Montrer que, pour tout entier $n\geq 2$: $0\leq v_n-\ell\leq\frac{1}{n\ln n}$.
   b) En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.

Exercice 9

On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$.

1.
   a) Montrer que, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$: $\int_p^{p+1}\frac{dt}{t}\geq\frac{1}{p+1}$.
   b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n\leq 1+\ln n$.
2. On considère la fonction φ_1 définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi_1(0)=0$ et $\varphi_1(x)=x(1+\ln x)$ si $x>0$. Montrer que φ_1 est continue sur $[0,+\infty[$.
3. Pour tout réel $x\geq 0$ et tout entier $n\geq 1$, on pose $\varphi_{n+1}(x)=\int_0^x\varphi_n(t)\,dt$.
   a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction φ_n est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$. Que vaut $\varphi_n(0)$?
   b) Vérifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ telles que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x>0$: $\varphi_n(x)=x^n(a_n+b_n\ln x)$. On montrera que $a_{n+1}=\frac{a_n}{n+1}-\frac{b_n}{(n+1)^2}$ et $b_{n+1}=\frac{b_n}{n+1}$.
4. Calculer b_n.
5. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $c_n=n!\,a_n$.
   a) Montrer que $c_n=2-u_n$.
   b) En déduire que, pour tout entier $n\geq 2$: $|c_n|\leq 1+\ln n$.
   c) Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

Exercice 10

1. Soit $x > -1$. Démontrer que $\ln(1+x) \leq x$.
2. Soit $k \in]0,1[$ et (u_n) la suite définie par $u_n = \prod_{p=0}^{n}(1+k^p)$.
   a) Montrer que (u_n) est croissante.
   b) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n)$ est majorée.
   c) Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 11

Soit (u_n) et (v_n) les deux suites définies pour $n \geq 1$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes. On sera amené à étudier les variations, puis le signe, des fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}$ et $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \frac{1}{x+1}$.

Exercice 12 (type bac)

1. Étudier les variations de $f(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0,+\infty[$ et en déduire que $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$: $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.
3. On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Montrer que $H_n \geq \ln(n+1)$ et en déduire la limite de (H_n).

Exercice 13 (type bac)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

1. Étudier les variations de f (limites en 0 et en $+\infty$ comprises).
2. En déduire que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leq \frac{x}{e}$.
3. Comparer, sans calculatrice, les nombres e^{π} et π^{e}.

Exercice 14 (type bac)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x\ln x - x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est continue à droite en 0. Est-elle dérivable à droite en 0 ? Interpréter.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et dresser le tableau de variation de f. Résoudre $f(x) = 0$.
3. En déduire la valeur de $\int_1^e \ln x \, dx$.

Corrigés détaillés

Corrigé de l'exercice 1

1. a) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$. Donc g est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$.

b) g admet en 1 un minimum égal à $g(1) = 0$: $g(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, et $g(x) > 0$ si $x \neq 1$.

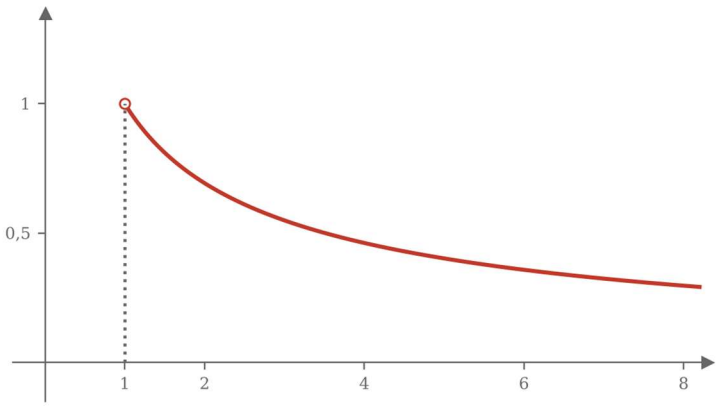
2. a) • En $+\infty$: $f(x) = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x-1}$, produit de deux fonctions de limites 0 et 1 : $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

• En 1 : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln}{x-1}=1$ (nombre dérivé de ln en 1).

b) Pour $x>1$: $f'(x)=\frac{\frac{x-1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}=\frac{-g(x)}{x(x-1)^2}<0$ d'après 1. b).

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	
$f(x)$	1	↘	0

c) L'axe des abscisses est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$; la courbe se prolonge par le point (1,1), exclu.



Exercice 1 : courbe de f.

Corrigé de l'exercice 2

1. a) f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $f'(x)=\frac{1}{x+1}-1+x=\frac{x^2}{x+1}\geq 0$: f est croissante.

b) $f(0)=0$, donc $f(x)\geq 0$ pour $x\geq 0$: $x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(x+1)$.

2. a) $h'(x)=\frac{1}{x+1}-1+x-x^2=\frac{1-(1+x)+x(1+x)-x^2(1+x)}{1+x}=\frac{-x^3}{1+x}\leq 0$: h est décroissante sur $[0,+\infty[$.

b) $h(0)=0$, donc $h(x)\leq 0$ pour $x\geq 0$: $\ln(x+1)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

3. Pour $x>0$, d'après 1. b) et 2. b) : $-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)-x\leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$, d'où, en divisant par $x^2>0$:

$$-\frac{1}{2}\leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\leq -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}.$$

Par encadrement, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 3

Continuité. Pour $x\in\,]-1,1[$, $\frac{1+x}{1-x}>0$; la fonction $x\mapsto\frac{1+x}{1-x}$ est continue sur $]-1,1[$ et ln est continue sur $]0,+\infty[$. Par composition et produit, f est continue sur $]-1,1[$.

Parité. $]-1,1[$ est centré en 0 et $f(-x)=(1-x^2)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=-(1-x^2)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=-f(x)$: f est impaire.

Prolongement. Pour $x\in\,]-1,1[$: $f(x)=(1-x^2)\ln(1+x)-(1+x)(1-x)\ln(1-x)$. Lorsque $x\to 1^-$: le premier terme tend vers $0\times\ln 2=0$; en posant $t=1-x\to 0^+$, $(1-x)\ln(1-x)=t\ln t\to 0$, donc le second terme tend vers 0. Ainsi $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0$ et, f étant impaire, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=0$.

La fonction F définie sur $[-1,1]$ par $F(x) = f(x)$ si $|x| < 1$ et $F(1) = F(-1) = 0$ est continue sur $[-1,1]$ et prolonge f.

Corrigé de l'exercice 4

1. • $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1) = -1$, donc $g(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$.

• $g(x) = x \times \frac{\ln x}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$, donc $g(1) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1$.

2. $g(x) = \frac{x}{x-1}\ln x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. De plus $\frac{g(x)}{x} = \frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x-1} \to 0$. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{\imath})$.

Corrigé de l'exercice 5

Pour $x \in]0,1[$, $\ln\frac{1}{x} = -\ln x > 0$ et $g_n(x) = x(-\ln x)^n$.

1. g_n est le produit de fonctions continues sur $]0,1[$: elle est continue.

2. • En 0^+ : si $n = 0$, $g_0(x) = x \to 0$; si $n \geq 1$, $g_n(x) = (-1)^n x(\ln x)^n \to 0$ (croissances comparées).

• En 1^- : si $n = 0$, $g_0(x) \to 1$; si $n \geq 1$, $(-\ln x)^n \to 0$ donc $g_n(x) \to 0$.

g_n admet donc un prolongement continu f_n sur $[0,1]$, défini par $f_n(x) = g_n(x)$ pour $0 < x < 1$, $f_n(0) = 0$, et $f_n(1) = 0$ si $n \geq 1$, $f_0(1) = 1$.

Corrigé de l'exercice 6

1. h_n est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et $h_n'(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} > 0$: h_n est strictement croissante.

2. $h_n(0) = 0$. Donc $h_n(x) < 0$ sur $]-1,0[$ et $h_n(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$.

3. a) f_1 est le produit de deux fonctions dérivables sur $]-1, +\infty[$ $(1 + x > 0)$: $f_1'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = h_1(x)$.

b) D'après 2., f_1 est strictement décroissante sur $]-1,0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, avec $f_1(0) = 0$. $\lim\limits_{x\to(-1)^+} x\ln(1+x) = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f_1 = +\infty$.

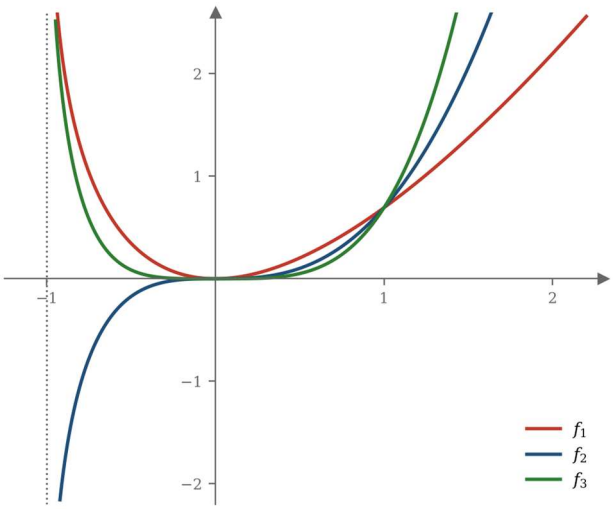
x	-1		0		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

4. a) De même, f_n est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et

$$f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(1+x) + \frac{x^n}{1+x} = x^{n-1}h_n(x).$$

b) • n **impair** $(n-1$ pair$)$: $x^{n-1} \geq 0$, donc $f_n'(x)$ a le signe de $h_n(x)$; f_n est strictement décroissante sur $]-1,0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. $\lim\limits_{(-1)^+} f_n = +\infty$ (car $x^n \to -1$ et $\ln(1+x) \to -\infty$), $f_n(0) = 0$, $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$.

• n **pair** $(n-1$ impair$)$: x^{n-1} et $h_n(x)$ ont le même signe (négatif sur $]-1,0[$, positif sur $]0, +\infty[$), donc $f_n'(x) \geq 0$ et ne s'annule qu'en 0 : f_n est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$. $\lim\limits_{(-1)^+} f_n = -\infty$ (car $x^n \to 1$), $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$.



Exercice 6 : courbes de f_1, f_2 et f_3.

Corrigé de l'exercice 7

Partie I

1. Pour $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{k+1}$; en intégrant sur cet intervalle de longueur 1 : $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{k+1}$.

2. Pour $n \geq 2$, en sommant pour $k = 1, \ldots, n-1$: $v_n - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n$. Pour $n = 1$: $v_1 = 1 = \ln 1 + 1$.

Partie II

1. a) $u_0 = 1 > 0$. Si u_n est défini et strictement positif, alors $\frac{1}{u_n}$ existe et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} > 0$.

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$: la suite est strictement croissante.

2. a) $u_{k+1}^2 = u_k^2 + 2 + \frac{1}{u_k^2}$, donc $u_{k+1}^2 - u_k^2 = 2 + \frac{1}{u_k^2}$.

b) En sommant pour $k = 0, \ldots, n-1$ (somme télescopique) : $u_n^2 - u_0^2 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$, et $u_0^2 = 1$.

c) La somme étant positive, $u_n^2 \geq 2n + 1$, donc $u_n \geq \sqrt{2n+1}$ et $\lim u_n = +\infty$.

3. a) Soit $n \geq 2$. On isole le terme $k = 0$ et l'on utilise $u_k^2 \geq 2k + 1 > 2k$ pour $k \geq 1$:

$$u_n^2 = 2n + 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq 2n + 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} = 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}.$$

b) D'après I.2, $v_{n-1} \leq \ln(n-1) + 1$, donc $u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$.

c) Pour $n \geq 2$: $2 + \frac{1}{n} \leq \frac{u_n^2}{n} \leq 2 + \frac{5}{2n} + \frac{\ln(n-1)}{2n}$, et $0 \leq \frac{\ln(n-1)}{n} \leq \frac{\ln n}{n} \to 0$. Par encadrement, $\lim \frac{u_n^2}{n} = 2$; la fonction racine carrée étant continue en 2 et $u_n > 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$.

Corrigé de l'exercice 8

1. Sur $]1, +\infty[$, $x \ln x > 0$ et $f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2} < 0$: f est strictement décroissante. $\lim\limits_{1^+} f = +\infty$ (asymptote $x = 1$) et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ (asymptote $y = 0$).

2. Soit $k \geq 3$. Pour $x \in [k-1, k] \subset]1, +\infty[$, $f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$; on intègre sur cet intervalle de longueur 1.

3. a) Pour $n \geq 3$, on somme les encadrements de la question 2 pour $k = 3, \ldots, n$:

$$S_n - f(2) \leq \int_2^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=3}^{n} f(k-1) = S_{n-1} = S_n - f(n).$$

Avec $f(2) = \frac{1}{2\ln 2}$ et $f(n) = \frac{1}{n\ln n}$, c'est l'encadrement demandé ; pour $n = 2$, les trois membres sont nuls.

b) $f = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln x > 0$: $\int_2^n f(x)\,dx = [\ln(\ln x)]_2^n = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$. D'après a) :

$$\ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{n\ln n} \leq S_n \leq \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{2\ln 2},$$

ce qui donne l'encadrement annoncé.

c) $\ln(\ln n) \to +\infty$; pour $n \geq 3$, $\ln(\ln n) > 0$ et, en divisant : $1 - \frac{\ln(\ln 2)}{\ln(\ln n)} \leq \frac{S_n}{\ln(\ln n)} \leq 1 + \frac{\frac{1}{2\ln 2} - \ln(\ln 2)}{\ln(\ln n)}$. Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln n)} = 1$.

4. Notons $L(x) = \ln(\ln x)$, primitive de f. Comme f est décroissante, $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f = L(n+1) - L(n) \leq f(n)$.

• $v_{n+1} - v_n = f(n+1) - [L(n+1) - L(n)] \leq 0$: (v_n) est décroissante.

• $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - [L(n+2) - L(n+1)] \geq 0$: (u_n) est croissante.

• $v_n - u_n = L(n+1) - L(n)$ est compris entre 0 et $f(n) = \frac{1}{n\ln n}$, donc $u_n \leq v_n$ et $\lim(v_n - u_n) = 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

5. a) $u_n \leq \ell \leq v_n$, donc $0 \leq v_n - \ell \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{n\ln n}$.

b) $\frac{1}{n\ln n} \leq 10^{-2}$ dès que $n\ln n \geq 100$, ce qui a lieu pour $n = 30$ ($30\ln 30 \approx 102{,}04$). La calculatrice donne $u_{30} \approx 0{,}7899$ et $v_{30} \approx 0{,}7995$, donc $0{,}789 \leq \ell \leq 0{,}800$: $\ell \approx 0{,}79$ **à 10^{-2} près**.

Corrigé de l'exercice 9

1. a) Pour $t \in [p, p+1]$, $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{p+1}$; on intègre sur cet intervalle de longueur 1.

b) Pour $n \geq 2$: $u_n - 1 = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p+1} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n$; pour $n = 1$, $u_1 = 1$.

2. φ_1 est continue sur $]0, +\infty[$ (produit de fonctions continues). En 0 : $\varphi_1(x) = x + x\ln x \to 0 = \varphi_1(0)$. Donc φ_1 est continue sur $[0, +\infty[$.

3. a) Par récurrence : φ_1 est continue sur $[0, +\infty[$. Si φ_n est continue sur $[0, +\infty[$, alors φ_{n+1} est bien définie : c'est la primitive de φ_n qui s'annule en 0 ; elle est dérivable, donc continue. Pour tout $n \geq 1$, $\varphi_n(0) = 0$.

b) Par récurrence. Pour $n = 1$: $\varphi_1(x) = x(1 + \ln x)$, donc $a_1 = b_1 = 1$. Supposons $\varphi_n(x) = x^n(a_n + b_n \ln x)$ pour $x > 0$. La fonction G définie sur $]0, +\infty[$ par

$$G(x) = x^{n+1}\left(\frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2} + \frac{b_n}{n+1}\ln x\right)$$

a pour dérivée $x^n\left(a_n - \frac{b_n}{n+1} + b_n \ln x\right) + x^n \frac{b_n}{n+1} = \varphi_n(x)$. Les fonctions G et φ_{n+1} sont deux primitives de φ_n sur $]0,+\infty[$: elles diffèrent d'une constante. Or $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = 0$ (car $x^{n+1}\ln x \to 0$) et $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi_{n+1}(x) = \varphi_{n+1}(0) = 0$: la constante est nulle. Donc $\varphi_{n+1}(x) = x^{n+1}(a_{n+1} + b_{n+1}\ln x)$ avec

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2}, \qquad b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}.$$

4. $b_1 = 1$ et $b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}$: par récurrence, $b_n = \frac{1}{n!}$.

5. a) $c_{n+1} = (n+1)!\, a_{n+1} = n!\, a_n - \frac{n!\, b_n}{n+1} = c_n - \frac{1}{n+1}$, et $c_1 = 1$. Donc $c_n = 1 - \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = 2 - u_n$.

b) Pour $n \geq 2$: $u_n \geq \frac{3}{2}$, donc $c_n \leq \frac{1}{2} \leq 1 + \ln n$; d'après 1. b), $-c_n = u_n - 2 \leq \ln n - 1 \leq 1 + \ln n$. Donc $|c_n| \leq 1 + \ln n$.

c) $|a_n| = \frac{|c_n|}{n!} \leq \frac{1+\ln n}{n}$ (car $n! \geq n$), et $\lim \frac{1+\ln n}{n} = 0$. Donc $\lim a_n = 0$.

Corrigé de l'exercice 10

1. Soit $\psi(x) = x - \ln(1+x)$ sur $]-1,+\infty[$: $\psi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, négatif sur $]-1,0]$ et positif sur $[0,+\infty[$. ψ admet en 0 un minimum égal à 0 : $\ln(1+x) \leq x$.

2. a) $u_n > 0$ (produit de réels strictement positifs) et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + k^{n+1} > 1$: la suite est strictement croissante.

b) $v_n = \sum_{p=0}^{n} \ln(1+k^p) \leq \sum_{p=0}^{n} k^p = \frac{1-k^{n+1}}{1-k} \leq \frac{1}{1-k}$, d'après 1. La suite (v_n) est majorée par $A = \frac{1}{1-k}$.

c) ln étant une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, il existe un réel $M > 0$ tel que $\ln M = A$. Pour tout n, $\ln u_n \leq \ln M$, donc $u_n \leq M$ puisque ln est strictement croissante. La suite (u_n) est croissante et majorée : elle est convergente.

Corrigé de l'exercice 11

Étude de f. $f(x) = \ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - x(x+1) - x}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0.$$

f est strictement croissante et $\lim\limits_{+\infty} f = \ln 1 + 0 = 0$, donc $f(x) < 0$ pour tout $x > 0$.

Étude de g. $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x+2) + \frac{1}{x+1}$ et

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)(x+2) - (x+1)^2 - (x+2)}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{-1}{(x+1)^2(x+2)} < 0.$$

g est strictement décroissante et $\lim\limits_{+\infty} g = 0$, donc $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

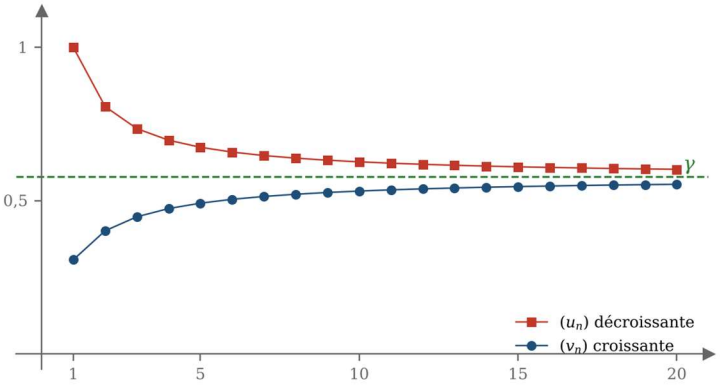
Monotonie des suites. Pour $n \geq 1$:

• $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = f(n) < 0$: (u_n) est décroissante.

• $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = g(n) > 0$: (v_n) est croissante.

Différence. $u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$, et $\lim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$.

Conclusion. (v_n) est croissante, (u_n) est décroissante, $v_n \le u_n$ et $\lim(u_n - v_n) = 0$: les suites sont adjacentes. Leur limite commune, notée γ, est la constante d'Euler ($\gamma \approx 0{,}577$).



Exercice 11 : les deux suites encadrent la constante d'Euler.

Corrigé de l'exercice 12

1. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$: f décroît sur $]0,1]$ et croît sur $[1,+\infty[$; son minimum est $f(1) = 0$. Donc $f(x) \ge 0$, soit $\ln x \le x - 1$.

2. Avec $x = 1 + \frac{1}{n}$: $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n}$. Avec $x = \frac{n}{n+1}$: $\ln\frac{n}{n+1} \le -\frac{1}{n+1}$, soit $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\ln\frac{n}{n+1} \ge \frac{1}{n+1}$.

3. $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ge \sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k+1}{k} = \ln(n+1)$ (somme télescopique). Comme $\ln(n+1) \to +\infty$, $\lim H_n = +\infty$.

Corrigé de l'exercice 13

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ ($\ln x \to -\infty$, $\frac{1}{x} \to +\infty$) ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (croissances comparées). $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$: f croît sur $]0,e]$, décroît sur $[e,+\infty[$, de maximum $f(e) = \frac{1}{e}$.

2. $f(x) \le \frac{1}{e}$ pour tout $x > 0$, d'où $\ln x \le \frac{x}{e}$.

3. $\pi > e$ et f décroît sur $[e,+\infty[$, donc $f(\pi) < f(e)$: $\frac{\ln}{\pi} < \frac{1}{e}$, soit $e\ln\pi < \pi$, puis $\pi^e < e^\pi$ (exp croissante).

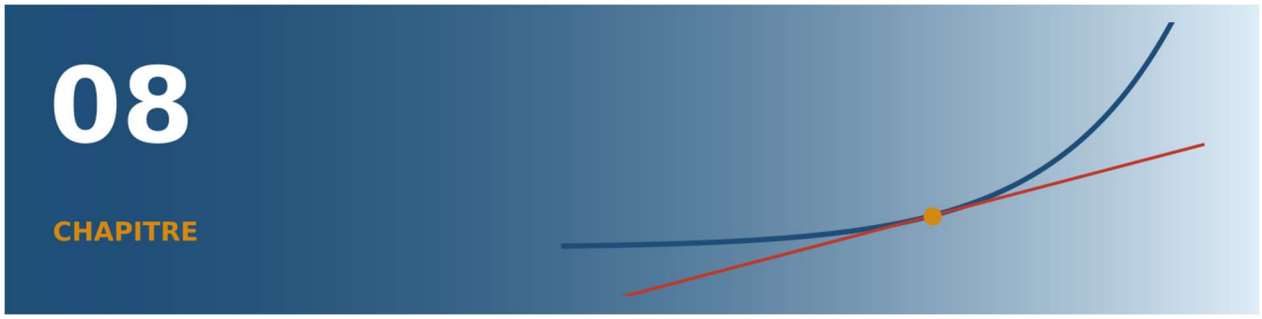
Corrigé de l'exercice 14

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$: f est continue à droite en 0. $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \ln x - 1 \underset{x\to 0^+}{\to} -\infty$: f n'est pas dérivable à droite en 0 ; la courbe a une demi-tangente verticale en O.

2. $f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$: f décroît sur $]0,1]$ et croît sur $[1,+\infty[$; minimum $f(1) = -1$; $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = e$.

3. f est une primitive de ln sur $]0,+\infty[$: $\int_1^e \ln x\, dx = f(e) - f(1) = 0 - (-1) = 1$.

Chapitre 8 — Fonction exponentielle



Cours • 12 exercices • Corrigés détaillés

Ce que vous devez savoir faire à la fin du chapitre
– Utiliser les propriétés algébriques de l'exponentielle ; résoudre des équations et des inéquations.
– Calculer des limites à l'aide des croissances comparées.
– Dériver e^u, trouver les primitives de $u'e^u$.
– Manipuler les puissances réelles $a^b = e^{b\ln a}$ et les fonctions $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto x^r$.
– Étudier des fonctions et des suites faisant intervenir l'exponentielle.

Cours

I. Définition et propriétés

Définition. La fonction ln est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est la **fonction exponentielle**, notée exp ou $x \mapsto e^x$:

pour tout réel x et tout réel $y > 0$: $\quad y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$.

En particulier $e^0 = 1$, $e^1 = e$, $e^x > 0$ pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x et $e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$.

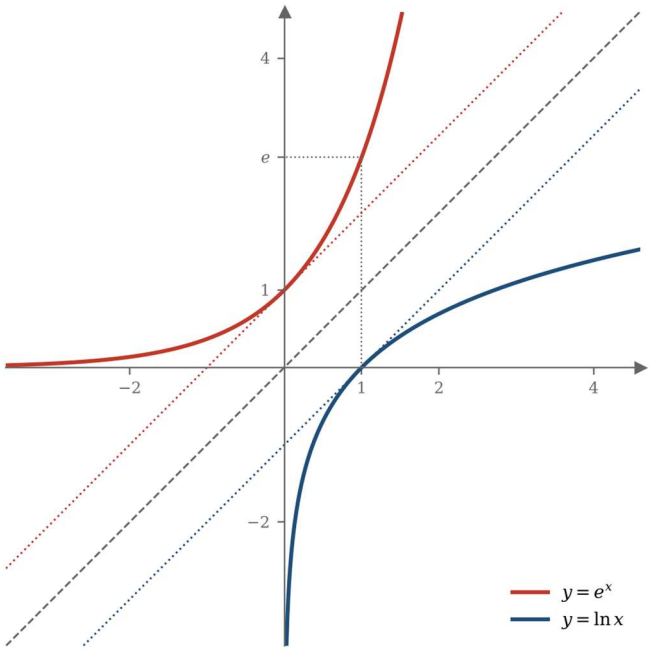
Propriétés algébriques. Pour tous réels a et b et tout entier relatif n :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b, \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \qquad e^{na} = (e^a)^n.$$

Pour tout entier $q \geq 2$ et tout entier relatif p : $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$ et $e^{\frac{p}{q}a} = \sqrt[q]{e^{pa}}$.

II. Étude de la fonction exponentielle

Théorème.
– La fonction exponentielle est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $(e^x)' = e^x$.
– Pour tous réels a et b : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ et $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.
– $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.



Les courbes de exp et de ln sont symétriques par rapport à la droite $y = x$. Tangentes : $y = x + 1$ et $y = x - 1$.

Limites usuelles. Pour tous entiers naturels non nuls m et n :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{nx}}{x^m} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^m e^{nx} = 0, \quad \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

À retenir. En $+\infty$, « l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x ». Deux inégalités très utiles (exercice 1) : pour tout réel x, $e^x \geq 1 + x$; pour tout $x > -1$, $\ln(1 + x) \leq x$.

III. Dérivées et primitives

Théorème. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
– La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.
– Les primitives sur I de $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Exemples. $\left(e^{-x^2}\right)' = -2xe^{-x^2}$; $\int_0^1 e^{-2t}\, dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-2}}{2}$.

IV. Puissances réelles

Définition. Pour tout réel $a > 0$ et tout réel b, on pose $a^b = e^{b\ln a}$. Ainsi $\ln\left(a^b\right) = b\ln a$.

Propriétés. Pour tous réels strictement positifs a et b et tous réels c et d :

$$a^{c+d} = a^c \times a^d, \quad a^{c-d} = \frac{a^c}{a^d}, \quad (a^c)^d = a^{cd}, \quad a^c \times b^c = (ab)^c, \quad \frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c.$$

Fonction exponentielle de base a $(a > 0)$. La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto (\ln a)\, a^x$.
– Si $a > 1$: elle est strictement croissante, $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.
– Si $0 < a < 1$: elle est strictement décroissante, $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

Fonction puissance (r rationnel). La fonction $x \mapsto x^r = e^{r\ln x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto rx^{r-1}$. Si $r \neq -1$, ses primitives sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1} + k$.
– Si $r > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r = 0$. – Si $r < 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r = +\infty$.

Croissances comparées. Pour tout rationnel $r > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty.$$

Attention. Pour étudier une expression de la forme $u(x)^{v(x)}$, on revient toujours à la définition : $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$, avec $u(x) > 0$.

Exercices

Exercice 1

Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$ si $t > 0$ et $g(0) = 1$.

1.
   a) Établir que g est continue en 0.
   b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2.
   a) Pour tout $t > 0$, calculer $g'(t)$.
   b) Prouver que, pour tout $t \geq 0$: $1 + t \leq e^t$.
   c) En déduire le signe de g' et le sens de variation de g.
3. On se propose d'étudier la dérivabilité de g en 0. À cet effet, on introduit la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par $h(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t}$.
   a) Calculer h' et h'', ainsi que les valeurs de $h(0)$ et $h'(0)$.
   b) Prouver que, pour tout $t \geq 0$: $0 \leq h(t) \leq \frac{t^3}{6}$ (I). Pour cela, on établira d'abord que $0 \leq h''(t) \leq t$ et l'on en déduira un encadrement de h' puis de h.
   c) Déduire de la relation (I) un encadrement de $\frac{1-e^{-t}-t}{t^2}$. Prouver finalement que g est dérivable en 0 et donner $g'(0)$.
4. Construire la courbe représentative de g, le plan étant rapporté à un repère orthonormé.

Exercice 2

Partie A. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^x$ et l'on appelle C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Étudier les variations de f. Préciser les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de x.
3. Tracer la courbe C.

Partie B. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \ln\left|e^{\frac{x}{2}} - e^x\right|$. On note G sa courbe représentative.

1. Préciser les limites de g en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0.
2. Calculer $g'(x)$ et déterminer le signe de $g'(x)$ en utilisant le signe de $f'(x)$ et le signe de $f(x)$. Dresser le tableau de variation de g.
3. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif : $g(x) - x = \ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)$. Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe G. Étudier la position de G par rapport à D pour $x > 0$.
4. Démontrer que, pour tout réel x strictement négatif : $g(x) - \frac{x}{2} = \ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$. Montrer que la droite d d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe G. Étudier la position de G par rapport à d pour $x < 0$.
5. Construire G, D et d.

Exercice 3

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt$.

1. Soit φ la fonction définie sur $[0,2]$ par $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$.
   a) Étudier les variations de φ sur $[0,2]$.
   b) Montrer que, pour tout réel t de $[0,2]$: $\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t)e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$.
   c) Par intégration, en déduire que $\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) \leq u_n \leq \frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)$.
   d) Montrer que, si (u_n) possède une limite ℓ, alors $3 \leq \ell \leq \frac{7}{2}$.
2.
   a) Calculer l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}}I$. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite ℓ.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.

1.
   a) Étudier la parité de f.
   b) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
   c) Montrer que f admet 0 pour limite en $+\infty$ et en $-\infty$.
2.
   a) Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.
   b) Étudier les variations de f. Préciser les points où f admet un extremum.
   c) Calculer $f''(x)$ et déterminer son signe.
   d) Construire la courbe de f (on admettra que le maximum de f est sensiblement égal à 0,3).

Exercice 5

On note, pour tout réel $a > 0$ et tout entier naturel n : $u_n(a) = \int_0^1 x^n\, e^{a(1-x)}\, dx$.

1. Calculer $u_0(a)$.
2. Soit $a > 0$ donné.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n(a) < \frac{e^a}{n+1}$.
   b) Montrer que la suite $\big(u_n(a)\big)$ est décroissante.
   c) Déterminer la limite de $u_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.
3.
   a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a\, u_{n+1}(a) = -1 + (n+1)u_n(a)$.
   b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n(a) = \frac{n!}{a^{n+1}}\left[e^a - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right]$.

Exercice 6

On considère la suite (U_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = \int_0^1 (1-t)^n\, e^t\, dt$.

1. Montrer que la fonction $f : t \mapsto (2-t)e^t$ est une primitive de $g : t \mapsto (1-t)e^t$ sur $[0,1]$. En déduire la valeur de U_1.
2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout n non nul : $U_{n+1} = (n+1)U_n - 1$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $U_n \geq 0$.
4.
   a) Montrer que, pour tout réel t de $[0,1]$ et tout entier naturel non nul n : $(1-t)^n e^t \leq e\,(1-t)^n$.
   b) En déduire que, pour tout n non nul : $U_n \leq \frac{e}{n+1}$.
5. Déterminer la limite de la suite (U_n).

Exercice 7

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 3 cm).

Partie A. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$. On désigne par (C) sa courbe représentative.

1.
   a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$: $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$. En déduire que la courbe (C) admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation $y = x$.
   c) Étudier la position relative de (C) et (Δ).
2. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3. Tracer la droite (Δ) et la courbe (C).

Partie B. Pour tout $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t})dt$.

1. Soit n un entier naturel. Donner une interprétation géométrique de $F(n)$.

2. Étudier le sens de variation de F sur $[0,+\infty[$.
3. Démontrer que, pour tout réel a strictement positif : $\frac{a}{a+1} \leq \ln(1+a) \leq a$.
4. Soit x un réel strictement positif. Déduire de la question 3 que $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.
5. On admet que la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ existe et est un réel noté I. Établir que $\frac{1}{2}\ln 2 \leq I \leq \frac{1}{2}$.
6. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t})dt$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel n : $\ln\left(1+e^{-2(n+1)}\right) \leq U_n \leq \ln(1+e^{-2n})$.
   b) En déduire que la suite (U_n) est décroissante.
   c) Déterminer la limite de la suite (U_n).
7. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.
   a) Exprimer S_n à l'aide de F et n.
   b) La suite (S_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, donner sa limite.

Exercice 8

On considère la fonction f définie pour tout $x \geq 0$ par $f(x) = 1 - e^{-x}$.

Partie I

1.
   a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$: $f(x) \leq x$, l'égalité ayant lieu seulement pour $x = 0$.
2.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel n et tout réel x : $e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t}\, dt$.
   b) En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$, puis pour $n = 3$, montrer que, pour tout $x \geq 0$: $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq x - f(x) \leq \frac{x^2}{2}$.

Partie II. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in]0,1]$.
   b) Montrer que (u_n) est décroissante.
   c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^2} = \frac{1}{2}$.
3. On pose $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2$. Montrer que la suite (T_n) est convergente et que sa limite L vérifie $2 \leq L \leq 3$.

Partie III

1. On note φ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(0)=1$ et, pour $x>0$, $\varphi(x)=\frac{f(x)}{x}$. Montrer que φ est continue sur $[0,+\infty[$.
2. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(0)=1$ et, pour $x>0$, $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x \varphi(t)\,dt$.
   a) Montrer que g est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$.
   b) Montrer que, pour tout $x>0$: $1-\frac{x}{4}\leq g(x)\leq 1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{18}$.
   c) En déduire que g est continue en 0, dérivable en 0, puis donner $g'(0)$.
3.
   a) Montrer que, pour tout $x>1$: $\int_1^x \varphi(t)\,dt\leq \ln x$.
   b) En déduire que g a une limite finie en $+\infty$ et donner la valeur de cette limite.
4.
   a) Pour tout réel x strictement positif, calculer $g'(x)$ et l'écrire sous la forme $g'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$.
   b) Montrer alors que, pour $x>0$: $xh'(x)=(x+1)e^{-x}-1$.
   c) Étudier la fonction k définie sur $[0,+\infty[$ par $k(x)=(x+1)e^{-x}-1$.
   d) Donner le signe de k, puis les variations de h et enfin celles de g.
   e) Dresser le tableau de variation de g et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Exercice 9

Partie I. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n=\int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)}\,dx$.

1. Calculer u_0.
2. Justifier que $u_0+u_1=1$. En déduire u_1.
3. Montrer que la suite (u_n) est positive.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
5.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $u_{n+1}+u_n=\frac{1-e^{-n}}{n}$.
   b) Calculer alors u_2.
6. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

Partie II

1. Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on considère la fonction S_n définie sur $\mathbb{R}$ par $S_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}e^x}{e^{nx}(1+e^x)}-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. Montrer que $S_n(x)$ est la somme de $n-1$ termes consécutifs d'une suite géométrique.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$, où, pour tout entier naturel $n\geq 2$: $w_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(1-e^{-k}\right)$.

Exercice 10 (type bac)

1. Montrer que, pour tout réel x, $e^x \geq 1 + x$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 11 (type bac)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,e^{-x}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion que l'on précisera.
3. Vérifier que $F(x) = -(x+1)e^{-x}$ est une primitive de f ; calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 12 (type bac)

1. Montrer que l'équation $e^x = 2 - x$ admet une unique solution réelle α, et que $0 < \alpha < 1$.
2. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. Montrer que $\alpha = \ln(2 - \alpha)$.

Corrigés détaillés

Corrigé de l'exercice 1

1. a) Pour $t > 0$: $g(t) = \frac{e^{-t}-1}{-t}$. En posant $X = -t \to 0$, $\lim\limits_{X\to 0} \frac{e^X-1}{X} = 1$, donc $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = 1 = g(0)$: g est continue en 0.

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} (1 - e^{-t}) = 1$, donc $\lim\limits_{+\infty} g = 0$.

2. a) Pour $t > 0$: $g'(t) = \frac{te^{-t}-(1-e^{-t})}{t^2} = \frac{(1+t)e^{-t}-1}{t^2} = \frac{e^{-t}(1+t-e^t)}{t^2}$.

b) Soit $\psi(t) = e^t - 1 - t$: $\psi'(t) = e^t - 1 \geq 0$ sur $[0, +\infty[$ et $\psi(0) = 0$, donc $\psi(t) \geq 0$, avec égalité seulement en 0. (Sur $]-\infty, 0]$, $\psi' \leq 0$: l'inégalité $e^t \geq 1 + t$ est en fait vraie pour tout réel t.)

c) Pour $t > 0$, $1 + t - e^t < 0$, donc $g'(t) < 0$: g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

3. a) $h'(t) = -1 + t + e^{-t}$, $h''(t) = 1 - e^{-t}$; $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$.

b) Pour $t \geq 0$: $e^{-t} \leq 1$, donc $h''(t) \geq 0$; d'après 2. b) appliqué à $-t$, $e^{-t} \geq 1 - t$, donc $h''(t) \leq t$.

• $h'' \geq 0$: h' est croissante et $h'(0) = 0$, donc $h'(t) \geq 0$. La fonction $t \mapsto \frac{t^2}{2} - h'(t)$ a pour dérivée $t - h''(t) \geq 0$ et s'annule en 0, donc $h'(t) \leq \frac{t^2}{2}$.

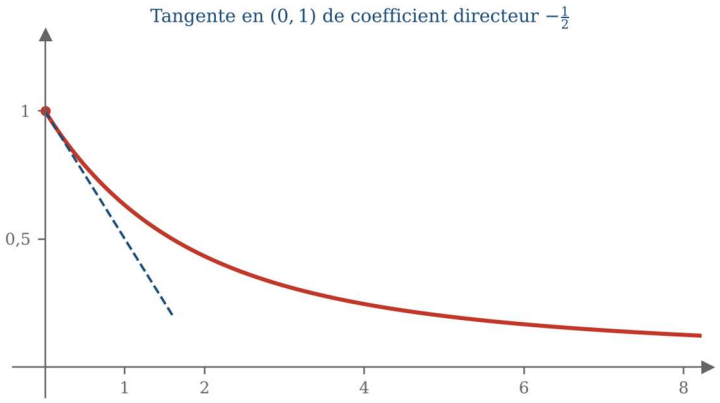
• De même, $h' \geq 0$ et $h(0) = 0$ donnent $h(t) \geq 0$; la fonction $t \mapsto \frac{t^3}{6} - h(t)$ a pour dérivée $\frac{t^2}{2} - h'(t) \geq 0$ et s'annule en 0, donc $h(t) \leq \frac{t^3}{6}$.

c) $1 - e^{-t} - t = h(t) - \frac{t^2}{2}$. Pour $t > 0$, (I) donne

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1 - e^{-t} - t}{t^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{t}{6}.$$

Or $\frac{g(t)-g(0)}{t} = \frac{1-e^{-t}-t}{t^2}$; par encadrement, cette quantité tend vers $-\frac{1}{2}$ lorsque $t \to 0^+$. Donc g est dérivable (à droite) en 0 et $g'(0) = -\frac{1}{2}$.

4. g décroît de 1 à 0 ; la courbe admet au point (0,1) une demi-tangente de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ et l'axe des abscisses pour asymptote.



Exercice 1 : courbe de g.

Corrigé de l'exercice 2

Partie A

1. $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - e^x = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2} - e^{\frac{x}{2}}\right)$. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq -2\ln 2$.

$\lim\limits_{-\infty} f = 0$; $f(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$ donne $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$; $f(-2\ln 2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

x	$-\infty$		$-2\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$

2. $f(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$ a le signe de $1 - e^{\frac{x}{2}}$: $f(x) > 0$ si $x < 0$, $f(0) = 0$, $f(x) < 0$ si $x > 0$.

Partie B. Pour $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$ et $g(x) = \ln|f(x)|$.

1. • $\lim\limits_{-\infty}|f| = 0^+$, donc $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$. • $\lim\limits_{0}|f| = 0^+$, donc $\lim\limits_{0} g = -\infty$ (l'axe des ordonnées est asymptote). • $\lim\limits_{+\infty}|f| = +\infty$, donc $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$.

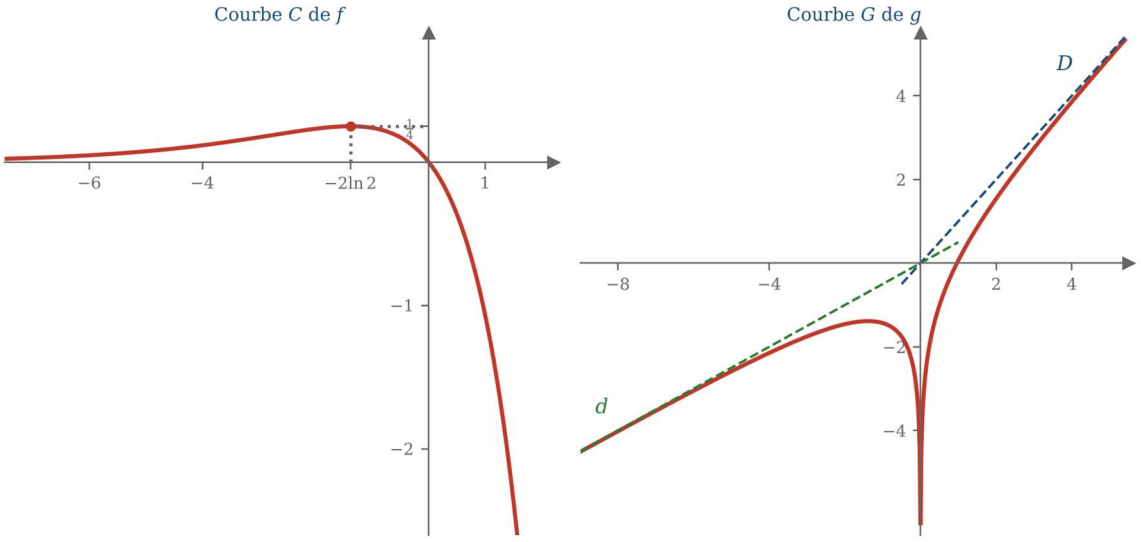
2. $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Pour $x < 0$, $f(x) > 0$: $g'(x)$ a le signe de $f'(x)$. Pour $x > 0$, $f(x) < 0$ et $f'(x) < 0$: $g'(x) > 0$. $g(-2\ln 2) = \ln\frac{1}{4} = -2\ln 2$.

x	$-\infty$		$-2\ln 2$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$-2\ln 2$	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. Pour $x > 0$: $|f(x)| = e^x - e^{\frac{x}{2}} = e^x\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)$, donc $g(x) = x + \ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right) = 0$, la droite $D: y = x$ est asymptote à G en $+\infty$. Pour $x > 0$, $0 < 1 - e^{-\frac{x}{2}} < 1$, donc $g(x) - x < 0$: G est en dessous de D.

4. Pour $x<0$: $|f(x)|=e^{\frac{x}{2}}\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$, donc $g(x)=\frac{x}{2}+\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)=0$: la droite $d: y=\frac{x}{2}$ est asymptote à G en $-\infty$, et G est en dessous de d pour $x<0$.

5.



Exercice 2 : les courbes C et G.

Corrigé de l'exercice 3

1. a) $\varphi(t)=2-\frac{1}{t+2}$, donc $\varphi'(t)=\frac{1}{(t+2)^2}>0$: φ est croissante sur $[0,2]$, de $\varphi(0)=\frac{3}{2}$ à $\varphi(2)=\frac{7}{4}$.

b) Pour $t\in[0,2]$: $\frac{3}{2}\le\varphi(t)\le\frac{7}{4}$; on multiplie par $e^{\frac{t}{n}}>0$.

c) $\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}\,dt=\left[ne^{\frac{t}{n}}\right]_0^2=n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$; on intègre l'encadrement de b) sur $[0,2]$.

d) $n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)=2\times\frac{e^h-1}{h}$ avec $h=\frac{2}{n}\to 0$, donc $\lim n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)=2$. En passant à la limite dans c) : $3\le\ell\le\frac{7}{2}$.

2. a) $I=\int_0^2\left(2-\frac{1}{t+2}\right)dt=[2t-\ln(t+2)]_0^2=4-\ln4+\ln2=4-\ln2$.

b) Pour $t\in[0,2]$: $1\le e^{\frac{t}{n}}\le e^{\frac{2}{n}}$ et $\varphi(t)>0$, donc $\varphi(t)\le\varphi(t)e^{\frac{t}{n}}\le e^{\frac{2}{n}}\varphi(t)$; en intégrant, $I\le u_n\le e^{\frac{2}{n}}I$. Comme $\lim e^{\frac{2}{n}}=1$, (u_n) converge et $\ell=I=4-\ln2\approx 3{,}31$ (ce qui est cohérent avec 1. d)).

Corrigé de l'exercice 4

Soit Φ la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction continue $t\mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en 0. Alors $f(x)=\Phi(2x)-\Phi(x)$.

1. a) La fonction $x\mapsto-\Phi(-x)$ a pour dérivée e^{-x^2} et s'annule en 0 : elle est égale à Φ, donc Φ est impaire. Par suite $f(-x)=\Phi(-2x)-\Phi(-x)=-f(x)$: f est impaire.

b) Si $x>0$, alors $x<2x$ et $e^{-t^2}>0$: $f(x)>0$. Par imparité, $f(x)<0$ si $x<0$; $f(0)=0$.

c) Pour $x>0$ et $t\in[x,2x]$: $0<e^{-t^2}\le e^{-x^2}$, donc $0<f(x)\le xe^{-x^2}$. Or $xe^{-x^2}=\frac{1}{x}\times x^2e^{-x^2}\to 0$ (car $\lim\limits_{X\to+\infty}Xe^{-X}=0$). Donc $\lim\limits_{+\infty}f=0$ et, par imparité, $\lim\limits_{-\infty}f=0$.

2. a) Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f aussi et $f'(x)=2\Phi'(2x)-\Phi'(x)=2e^{-4x^2}-e^{-x^2}$.

b) $f'(x) = e^{-x^2}\left(2e^{-3x^2} - 1\right)$. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-3x^2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{\ln}{3} \Leftrightarrow |x| \leq a$, avec $a = \sqrt{\frac{\ln 2}{3}} \approx 0{,}48$.

x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$f(-a)$	↗	$f(a)$	↘	0

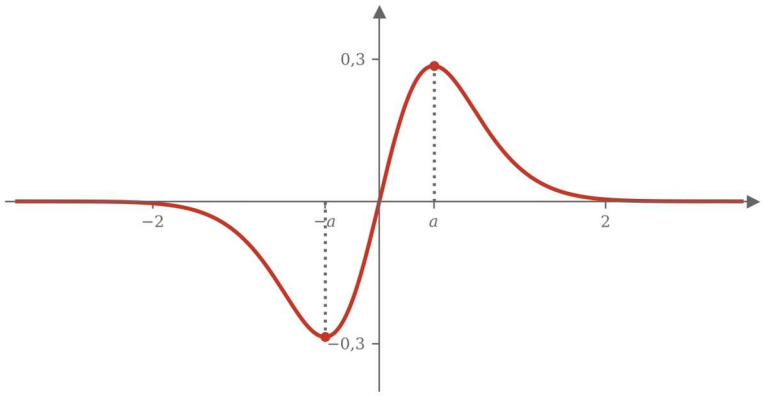
f admet un maximum en a et un minimum en $-a$, avec $f(-a) = -f(a)$.

c) $f''(x) = -16xe^{-4x^2} + 2xe^{-x^2} = 2xe^{-x^2}\left(1 - 8e^{-3x^2}\right)$. $1 - 8e^{-3x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 \geq \ln 8 \Leftrightarrow |x| \geq b$, avec $b = \sqrt{\ln 2} \approx 0{,}83$.

x	$-\infty$		$-b$		0		b		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

f'' s'annule en changeant de signe en $-b$, 0 et b : la courbe a trois points d'inflexion.

d)



Exercice 4 : courbe de f.

Corrigé de l'exercice 5

1. $u_0(a) = \int_0^1 e^{a(1-x)}\,dx = \left[-\frac{1}{a}e^{a(1-x)}\right]_0^1 = \frac{e^a - 1}{a}$.

2. a) Pour $x \in [0,1]$: $1 \leq e^{a(1-x)} \leq e^a$, donc $x^n \leq x^n e^{a(1-x)} \leq e^a x^n$. La fonction $x \mapsto x^n e^{a(1-x)}$ est continue, positive et non nulle sur $]0,1]$: $u_n(a) > 0$. La fonction $x \mapsto x^n\left(e^a - e^{a(1-x)}\right)$ est continue, positive et ne s'annule qu'en 0 : son intégrale est strictement positive, d'où $u_n(a) < e^a \int_0^1 x^n\,dx = \frac{e^a}{n+1}$.

b) Pour $x \in [0,1]$, $x^{n+1} \leq x^n$, donc $u_{n+1}(a) \leq u_n(a)$.

c) D'après a) et le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(a) = 0$.

3. a) Avec $u(x) = x^{n+1}$ et $v'(x) = e^{a(1-x)}$, $v(x) = -\frac{1}{a}e^{a(1-x)}$:

$$u_{n+1}(a) = \left[-\frac{x^{n+1}}{a}e^{a(1-x)}\right]_0^1 + \frac{n+1}{a}\int_0^1 x^n\,e^{a(1-x)}\,dx = -\frac{1}{a} + \frac{n+1}{a}u_n(a).$$

b) Pour $n = 0$: $\frac{0!}{a}[e^a - 1] = u_0(a)$. Supposons la formule vraie au rang n. D'après a) :

$$u_{n+1}(a) = \frac{(n+1)!}{a^{n+2}}\left[e^a - \sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\right] - \frac{1}{a} = \frac{(n+1)!}{a^{n+2}}\left[e^a - \sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!} - \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right],$$

ce qui est la formule au rang $n+1$.

Remarque. On en déduit $0 < e^a - \sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!} = \frac{a^{n+1}}{n!}u_n(a) < \frac{a^{n+1}e^a}{(n+1)!}$, quantité qui tend vers 0 : $e^a = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right)$.

Corrigé de l'exercice 6

1. $f'(t) = -e^t + (2-t)e^t = (1-t)e^t = g(t)$. Donc $U_1 = [(2-t)e^t]_0^1 = e - 2$.

2. Avec $u(t) = (1-t)^{n+1}$ et $v'(t) = e^t$: $U_{n+1} = [(1-t)^{n+1}e^t]_0^1 + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt = -1 + (n+1)U_n$.

3. Sur $[0,1]$, $(1-t)^n e^t \geq 0$, donc $U_n \geq 0$.

4. a) Pour $t \in [0,1]$, $e^t \leq e$ et $(1-t)^n \geq 0$.

b) Par comparaison : $U_n \leq e\int_0^1 (1-t)^n\,dt = e\left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{e}{n+1}$.

5. $0 \leq U_n \leq \frac{e}{n+1}$: $\lim U_n = 0$.

Corrigé de l'exercice 7

Partie A

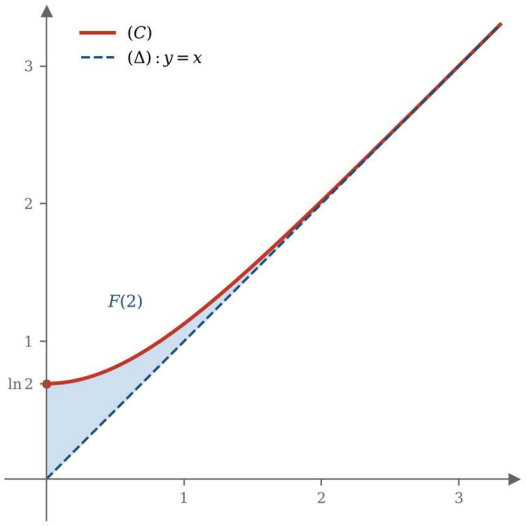
1. a) $\lim\limits_{+\infty}(e^x + e^{-x}) = +\infty$, donc $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

b) $e^x + e^{-x} = e^x(1 + e^{-2x})$, donc $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1 + e^{-2x}) = \ln 1 = 0$, la droite (Δ): $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

c) $f(x) - x = \ln(1 + e^{-2x}) > 0$: (C) est au-dessus de (Δ).

2. $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; pour $x \geq 0$, $e^x \geq e^{-x}$, donc $f'(x) \geq 0$ et $f'(x) = 0$ seulement pour $x = 0$. f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, de $f(0) = \ln 2$ à $+\infty$.

3.



Exercice 7 : la courbe (C), son asymptote (Δ) et le domaine d'aire $F(2)$.

Partie B

1. $\ln(1+e^{-2t}) = f(t) - t \geq 0$: $F(n)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par (C), (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$ (une unité d'aire vaut 9 cm^2).

2. $F'(x) = \ln(1+e^{-2x}) > 0$: F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

3. $\ln(1+a) = \int_1^{1+a} \frac{dt}{t}$; pour $t \in [1, 1+a]$, $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$. En intégrant sur cet intervalle de longueur a : $\frac{a}{a+1} \leq \ln(1+a) \leq a$.

4. Pour $t \geq 0$, avec $a = e^{-2t} > 0$: $\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} \leq \ln(1+e^{-2t}) \leq e^{-2t}$. On intègre sur $[0, x]$:

• $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\, dt = \left[-\frac{1}{2}\ln(1+e^{-2t})\right]_0^x = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x})$ (forme $\frac{u'}{u}$) ;

• $\int_0^x e^{-2t}\, dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

D'où l'encadrement demandé.

5. En faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'encadrement de la question 4 : $\frac{1}{2}\ln 2 \leq I \leq \frac{1}{2}$.

6. a) La fonction $t \mapsto \ln(1+e^{-2t})$ est décroissante ; sur $[n, n+1]$, elle est comprise entre ses valeurs en $n+1$ et en n. On intègre sur cet intervalle de longueur 1.

b) D'après a) appliqué aux rangs $n+1$ et n : $U_{n+1} \leq \ln\left(1+e^{-2(n+1)}\right) \leq U_n$.

c) Les deux termes encadrants de a) tendent vers $\ln 1 = 0$: $\lim U_n = 0$.

7. a) Par la relation de Chasles : $S_n = \int_0^{n+1} \ln(1+e^{-2t})dt = F(n+1)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = I$, donc (S_n) converge vers I.

Corrigé de l'exercice 8

Partie I

1. a) $f'(x) = e^{-x} > 0$: f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, de $f(0) = 0$ à $\lim\limits_{+\infty} f = 1$.

b) Soit $d(x) = x - f(x) = x - 1 + e^{-x}$: $d'(x) = 1 - e^{-x} > 0$ pour $x > 0$ et $d(0) = 0$. Donc $d(x) > 0$ pour $x > 0$: $f(x) \leq x$, avec égalité seulement en 0.

2. a) Notons $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t}\, dt$. Par récurrence sur n.

• Pour $n = 0$: $1 - R_0(x) = 1 - [-e^{-t}]_0^x = e^{-x}$.

• Par parties, avec $u(t) = e^{-t}$ et $v'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$, $v(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$:

$$R_n(x) = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-t}\, dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - R_{n+1}(x).$$

Donc $(-1)^{n+1}R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^{n+2}R_{n+1}(x)$: si la formule est vraie au rang n, elle l'est au rang $n+1$.

b) Pour $x \geq 0$, $R_n(x) \geq 0$ (intégrale d'une fonction positive, bornes dans le bon sens).

• $n = 2$: $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - R_2(x) \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$, donc $x - f(x) = x - 1 + e^{-x} \leq \frac{x^2}{2}$.

• $n = 3$: $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + R_3(x) \geq 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$, donc $x - f(x) \geq \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$.

Partie II

1. a) $u_0 = 1$. Si $0 < u_n \leq 1$, alors, f étant strictement croissante, $0 = f(0) < f(u_n) \leq f(1) = 1 - \frac{1}{e} < 1$.

b) D'après I.1. b) : $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$.

c) Décroissante et minorée par 0, (u_n) converge vers $\ell \in [0,1]$. f étant continue, $f(\ell) = \ell$, donc $\ell = 0$ d'après I.1. b).

2. D'après I.2. b) avec $x = u_n > 0$: $\frac{1}{2} - \frac{u_n}{6} \leq \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{2}$. Comme $u_n \to 0$, la limite vaut $\frac{1}{2}$.

3. (T_n) est croissante. Pour tout k, d'après I.2. b) et $0 < u_k \leq 1$:

$$\frac{1}{3}u_k^2 \leq u_k^2\left(\frac{1}{2} - \frac{u_k}{6}\right) \leq u_k - u_{k+1} \leq \frac{1}{2}u_k^2.$$

En sommant pour $k = 0, \ldots, n$ (somme télescopique, $u_0 = 1$) : $\frac{1}{3}T_n \leq 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}T_n$. Donc $T_n \leq 3$: croissante et majorée, (T_n) converge vers un réel L, et à la limite $\frac{1}{3}L \leq 1 \leq \frac{1}{2}L$, soit $2 \leq L \leq 3$. (Numériquement, $L \approx 2{,}42$.)

Partie III

1. φ est continue sur $]0, +\infty[$ (quotient). En 0 : $\varphi(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} \to 1 = \varphi(0)$ (exercice 1).

2. a) φ étant continue sur $[0, +\infty[$, $x \mapsto \int_0^x \varphi(t)\,dt$ est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$; g est donc définie, dérivable et continue sur $]0, +\infty[$.

b) D'après I.2. b), pour $t > 0$: $\frac{t}{2} - \frac{t^2}{6} \leq 1 - \varphi(t) \leq \frac{t}{2}$, soit $1 - \frac{t}{2} \leq \varphi(t) \leq 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6}$, encore vrai pour $t = 0$. En intégrant sur $[0, x]$ puis en divisant par $x > 0$:

$$1 - \frac{x}{4} \leq g(x) \leq 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}.$$

c) Par encadrement, $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1 = g(0)$: g est continue en 0. De plus $-\frac{1}{4} \leq \frac{g(x)-g(0)}{x} \leq -\frac{1}{4} + \frac{x}{18}$: g est dérivable en 0 et $g'(0) = -\frac{1}{4}$.

3. a) Pour $t \geq 1$: $\varphi(t) = \frac{1-e^{-t}}{t} \leq \frac{1}{t}$, donc $\int_1^x \varphi(t)\,dt \leq \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$.

b) $\varphi \geq 0$, donc pour $x > 1$: $0 \leq g(x) = \frac{1}{x}\left(\int_0^1 \varphi(t)\,dt + \int_1^x \varphi(t)\,dt\right) \leq \frac{1}{x}\int_0^1 \varphi(t)\,dt + \frac{\ln}{x}$. Le majorant tend vers 0 : $\lim\limits_{+\infty} g = 0$.

4. a) Pour $x > 0$: $g'(x) = \frac{x\varphi(x) - \int_0^x \varphi(t)\,dt}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$, avec $h(x) = f(x) - \int_0^x \varphi(t)\,dt$.

b) $h'(x) = f'(x) - \varphi(x) = e^{-x} - \frac{1-e^{-x}}{x}$, donc $xh'(x) = xe^{-x} - 1 + e^{-x} = (x+1)e^{-x} - 1$.

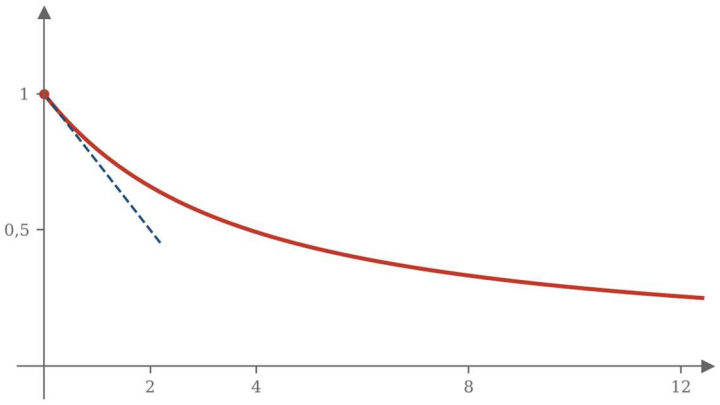
c) $k'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x} \leq 0$: k est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, $k(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} k = -1$.

d) $k(x) < 0$ pour $x > 0$, donc $h'(x) = \frac{k(x)}{x} < 0$: h est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$; comme $h(0) = 0$, $h(x) < 0$ pour $x > 0$ et $g'(x) < 0$. g est strictement décroissante.

e)

x	0		$+\infty$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-$	
$g(x)$	1	↘	0



Exercice 8 : allure de la courbe de g et sa tangente en $(0,1)$.

Corrigé de l'exercice 9

Partie I. On remarque que $u_n = \int_0^1 \frac{e^x e^{-nx}}{1+e^x}\,dx$.

1. $u_0 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln\frac{1+e}{2}$.

2. $u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{e^x+1}{1+e^x}\,dx = 1$, donc $u_1 = 1 - \ln\frac{1+e}{2}$.

3. La fonction intégrée est positive sur $[0,1]$: $u_n \geq 0$.

4. Pour $x \in [0,1]$, $e^{-(n+1)x} \leq e^{-nx}$, donc $u_{n+1} \leq u_n$.

5. a) $u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{e^x e^{-(n+1)x} + e^x e^{-nx}}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1+e^x)}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 e^{-nx}\,dx = \frac{1-e^{-n}}{n}$ pour $n \geq 1$.

b) Pour $n = 1$: $u_2 = 1 - \frac{1}{e} - u_1 = \ln\frac{1+e}{2} - \frac{1}{e}$.

6. Pour $n \geq 1$: $0 \leq u_n \leq u_n + u_{n+1} = \frac{1-e^{-n}}{n} \leq \frac{1}{n}$. Donc $\lim u_n = 0$.

Partie II

1. Soit $q = -e^{-x} \neq 1$. La somme des $n-1$ termes $q, q^2, \ldots, q^{n-1}$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n-1} q^k = \frac{q-q^n}{1-q} = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{(-1)^{n-1}e^{-nx}}{1+e^{-x}},$$

et $\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} = \frac{e^x e^{-nx}}{e^x+1} = \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$. Donc $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k e^{-kx}$: c'est la somme de $n-1$ termes de la suite géométrique de premier terme $-e^{-x}$ et de raison $-e^{-x}$.

2. On intègre S_n sur $[0,1]$ de deux façons.

• Terme à terme : $\int_0^1 S_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \frac{1-e^{-k}}{k} = -w_n$.

• Avec l'expression de l'énoncé : $\int_0^1 S_n(x)\,dx = (-1)^{n-1}u_n - \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = (-1)^{n-1}u_n + [\ln(1+e^{-x})]_0^1 = (-1)^{n-1}u_n + \ln\frac{1+e^{-1}}{2}$.

Donc $w_n = (-1)^n u_n + \ln\frac{2}{1+e^{-1}}$. Comme $\lim u_n = 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \ln\frac{2e}{e+1} = 1 - \ln\frac{1+e}{2} \approx 0{,}38.$$

Corrigé de l'exercice 10

1. $g(x) = e^x - 1 - x$: $g'(x) = e^x - 1$, négatif sur $]-\infty, 0]$, positif sur $[0, +\infty[$; minimum $g(0) = 0$. Donc $e^x \geq 1 + x$.

2. Avec $x = \frac{1}{n}$: $e^{1/n} \geq 1 + \frac{1}{n}$, d'où $e \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (puissance n, nombres positifs). Avec $x = -\frac{1}{n+1}$: $e^{-1/(n+1)} \geq \frac{n}{n+1}$, d'où $e^{1/(n+1)} \leq \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, puis $e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

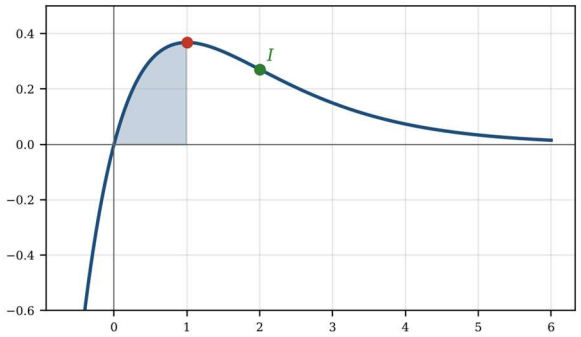
3. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{e}{1+\frac{1}{n}}$, qui tend vers e ; par encadrement, $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Corrigé de l'exercice 11

1. $\lim_{-\infty} f = -\infty$; $\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (croissances comparées). $f'(x) = (1-x)e^{-x}$: f croît sur $]-\infty, 1]$, décroît sur $[1, +\infty[$; maximum $f(1) = \frac{1}{e}$.

2. $f''(x) = (x-2)e^{-x}$ s'annule en changeant de signe en 2 : point d'inflexion $I\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$.

3. $F'(x) = -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = xe^{-x} = f(x)$. Sur $[0,1]$, $f \geq 0$, donc $\mathcal{A} = F(1) - F(0) = -\frac{2}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$ unités d'aire ($\approx 0{,}264$).



Exercice 11 : la courbe de $f(x) = xe^{-x}$, son maximum en 1, son point d'inflexion en 2 et l'aire $\mathcal{A}$.

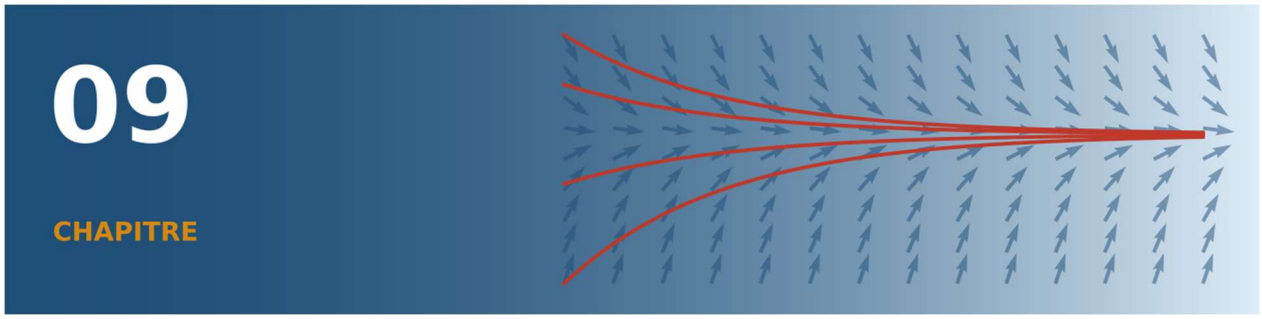
Corrigé de l'exercice 12

1. $h(x) = e^x + x - 2$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limites $-\infty$ et $+\infty$: elle s'annule une seule fois. $h(0) = -1 < 0$ et $h(1) = e - 1 > 0$, donc $0 < \alpha < 1$.

2. $h(0{,}44) \approx -0{,}0073 < 0$ et $h(0{,}45) \approx 0{,}018 > 0$: $0{,}44 < \alpha < 0{,}45$.

3. $e^\alpha = 2 - \alpha > 0$, donc $\alpha = \ln(2 - \alpha)$.

Chapitre 9 — Équations différentielles



Cours • 15 exercices • Corrigés détaillés

Ce que vous devez savoir faire à la fin du chapitre
– Résoudre les équations $y' = ay$, $y' = ay + b$ et $y'' + \omega^2 y = 0$, et déterminer la solution vérifiant des conditions initiales données.
– Résoudre une équation $y' = ay + \varphi(x)$ lorsqu'on en connaît (ou qu'on est guidé pour en trouver) une solution particulière.
– Exploiter un changement de fonction inconnue.
– Modéliser une situation simple par une équation différentielle.

Cours

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction (notée en général y) et dans laquelle figurent certaines des dérivées de y. **Résoudre** l'équation sur un intervalle I, c'est trouver toutes les fonctions qui la vérifient sur I.

I. Équation $y' = ay$

Théorème. Soit a un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions

$$x \mapsto ke^{ax}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Pour tous réels x_0 et y_0, il existe une **unique** solution telle que $y(x_0) = y_0$: c'est $x \mapsto y_0\, e^{a(x-x_0)}$.

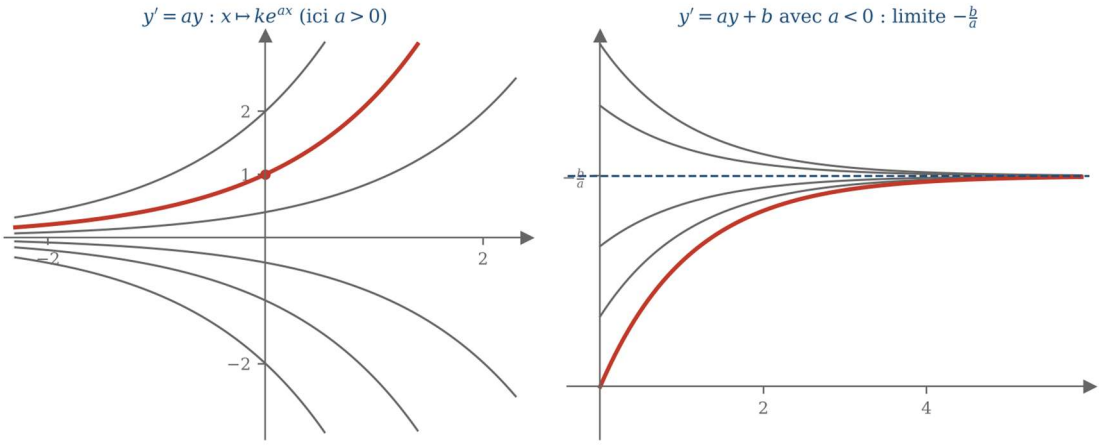
Démonstration. Les fonctions $x \mapsto ke^{ax}$ sont solutions. Réciproquement, si y est solution, la fonction $z : x \mapsto y(x)e^{-ax}$ a pour dérivée $\big(y'(x) - ay(x)\big)e^{-ax} = 0$: elle est constante sur $\mathbb{R}$, d'où $y(x) = ke^{ax}$.

II. Équation $y' = ay + b$

Théorème. Soit a et b deux réels, $a \neq 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions

$$x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

L'unique solution telle que $y(x_0) = y_0$ est $x \mapsto \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$.



Courbes de quelques solutions ; une seule passe par un point donné.

Méthode — équation $y' = ay + \varphi(x)$ avec second membre. C'est la démarche de la plupart des exercices :

1. on dispose d'une **solution particulière** u de l'équation (E) (donnée, ou cherchée sous une forme indiquée) ;
2. on montre qu'une fonction v est solution de (E) si, et seulement si, $v - u$ est solution de l'équation « sans second membre » $(E_0) : y' = ay$;
3. on en déduit les solutions de (E) : $x \mapsto u(x) + ke^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$;
4. on détermine k à l'aide de la condition initiale.

III. Équation $y'' + \omega^2 y = 0$

Théorème. Soit ω un réel non nul. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions

$$x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Pour tous réels x_0 et y_0, il existe une **unique** solution f telle que $f(0) = x_0$ et $f'(0) = y_0$: c'est $x \mapsto x_0\cos(\omega x) + \frac{y_0}{\omega}\sin(\omega x)$.

Transformation de $A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$. Si $(A, B) \neq (0,0)$, on pose $r = \sqrt{A^2 + B^2}$ et l'on choisit φ tel que $\cos\varphi = \frac{A}{r}$ et $\sin\varphi = -\frac{B}{r}$; alors

$$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) = r\cos(\omega x + \varphi).$$

Exercices

Exercices 1 à 6 : équations du premier ordre avec second membre. Exercices 7 à 9 : changements de fonction inconnue. Exercices 10 et 11 : modélisation, équation $y'' + \omega^2 y = 0$. Exercices 12 à 15 : problèmes de synthèse.

Exercice 1

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y' = 2y + 4x$.

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2x - 1$.
   a) Vérifier que h est une solution particulière de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

b) Démontrer qu'une fonction $f = g + h$ est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, g est solution sur $\mathbb{R}$ de $(E_2) : y' = 2y$.

2.

a) Déterminer les solutions g de l'équation différentielle (E_2) sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire les solutions f de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer la solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$.

Exercice 2

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 4e^{1-2x}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4xe^{1-2x}$ est une solution particulière de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + 2y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction v définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si, et seulement si, $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions v de l'équation (E).
5. Déterminer la fonction v_0, solution de (E), qui prend la valeur $-2e$ en 0.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = \frac{2e^{-x}}{1+2e^{x}}$.

1. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}\ln(1 + 2e^{x})$ est une solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
3. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

Exercice 4

On considère l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^{x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soit a et b deux réels et u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^{x}$.

a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

b) Montrer que v est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, $u + v$ est solution de (1).

c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).

Exercice 5

Résoudre l'équation différentielle : $y' + y = e^{-x}$.

Exercice 6

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = e^{2x}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{2x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' - 2y = 0$.

3. Démontrer qu'une fonction v définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si, et seulement si, $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
5. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 7

On se propose de trouver une fonction f définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, s'annulant pour $x = 1$ et vérifiant la propriété (E) : pour tout $x > 0$, $xf'(x) - 3f(x) = 3\ln x$.

1. Trouver toutes les fonctions polynômes P du troisième degré telles que, pour tout réel x : $xP'(x) - 3P(x) = 0$.
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que $f(1) = 0$; soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par la relation $f(x) = x^3 h(x)$.
   a) Calculer $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et de $h(x)$.
   b) Montrer que f vérifie la propriété (E) si, et seulement si, pour tout $x > 0$: $h'(x) = \frac{3}{x^4}\ln x$.
   c) On suppose que f vérifie la propriété (E). Montrer que h est définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4}\ln t\, dt$. Déterminer $h(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Montrer qu'il existe une fonction f et une seule, solution du problème posé, et en donner l'expression.

Exercice 8

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.

1. Déterminer le réel λ tel que la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = \lambda x^2 e^{-x}$ soit solution de l'équation (E).
2. Démontrer qu'une fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $z = y - y_0$ est solution de l'équation différentielle $(E_1) : z'' + 2z' + z = 0$.
3. Soit z une solution de (E_1) et $t = z' + z$. Montrer que $t' + t = 0$.
4. Résoudre alors l'équation différentielle (E_1).
5. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
6. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ passe par le point de coordonnées $(-1,0)$ et admet en ce point une tangente de vecteur directeur $\vec{\imath}$.

Exercice 9

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 5y' + 4y = 0$.

1. Soit y une solution de (E) et $r = y' - 4y$. Montrer que $r' - r = 0$.
2. Résoudre alors l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormé admet pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = -2x + 1$.
4. On pose $u(x) = 2e^x - e^{4x}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $u(x) > 0$.

5. On considère la partie de la courbe d'équation $y = u(x)$ pour $-1 \leq x \leq 0$. En la faisant tourner autour de l'axe des abscisses, on délimite un solide de volume V (en unités de volume). Calculer la valeur exacte de V.

Exercice 10

Une citerne calorifugée est chauffée par une résistance. La température $f(t)$ de la citerne vérifie l'équation différentielle $f' = a - bf$, avec $a = 2{,}088 \times 10^{-2}$ et $b = 2{,}32 \times 10^{-4}$, lorsque t est exprimé en secondes et $f(t)$ en °C.

1.
   a) Montrer que $y = f - 90$ est solution de l'équation différentielle (1) : $y' = -by$.
   b) Donner la solution générale de (1).
   c) En déduire l'expression de $f(t)$ sachant que $f(0) = 20$.
2. Au bout de combien de temps la température atteint-elle 80 °C ?

Exercice 11

1. Résoudre l'équation différentielle $4y'' + 49y = 0$.
2.
   a) Déterminer la solution f vérifiant $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$ et $f(\pi) = 1$.
   b) Déterminer deux réels r et θ strictement positifs et $\varphi \in]-\pi, \pi[$ tels que $f(x) = r\cos(\theta x + \varphi)$.

Exercice 12

Partie A. Soit (E_1) l'équation différentielle : $y' = 2y + 4x$.

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2x - 1$.
   a) Vérifier que h est une solution particulière de (E_1) sur $\mathbb{R}$.
   b) Démontrer qu'une fonction $f = g + h$ est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, g est solution sur $\mathbb{R}$ de $(E_2) : y' = 2y$.
2.
   a) Déterminer les solutions g de (E_2) sur $\mathbb{R}$. b) En déduire les solutions f de (E_1) sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$.

Partie B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 2x - 1$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.
   a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Démontrer que la droite d'équation $y = -2x - 1$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) et préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation complet.

Exercice 13

Partie A. Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 4e^{1-2x}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4xe^{1-2x}$ est une solution particulière de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + 2y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction v définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si, et seulement si, $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions v de l'équation (E).
5. Déterminer la fonction v_0, solution de (E), qui prend la valeur $-2e$ en 0.

Partie B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(2x-1)e^{1-2x}$ et C_f sa courbe dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

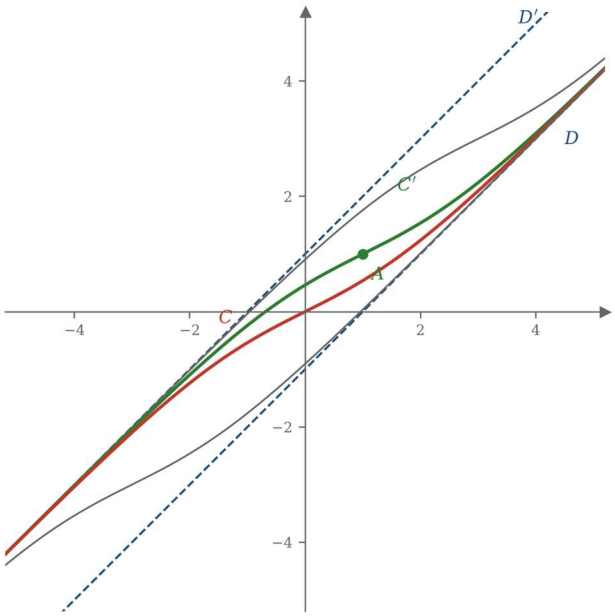
1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et en déduire que la courbe C_f admet une asymptote horizontale.
2. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation complet.
3. Justifier que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse $\frac{3}{2}$.
5. Déterminer une équation de la tangente au point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
6. Tracer la courbe C_f et les tangentes déterminées précédemment.

Partie C. Soit $y = g(x)$ l'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse a. On note $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.

1.
   a) Exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et $f'(a)$. b) Montrer que $\varphi''(x) = f''(x)$.
2. Résoudre $f''(x) = 0$.
3. Dans cette question, on pose $a = \frac{3}{2}$.
   a) Déterminer les variations de φ' et en déduire le signe de $\varphi'(x)$.
   b) Déterminer les variations de φ et en déduire le signe de $\varphi(x)$.
   c) Déterminer la position de C_f par rapport à sa tangente T.

Exercice 14

1. Pour tout réel k positif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x + \frac{1-ke^x}{1+ke^x}$.
   a) Justifier que, pour tout réel k positif ou nul, la fonction f_k est solution de l'équation différentielle (E) : $2y' = (y-x)^2 + 1$.
   b) En déduire le sens de variation de f_k sur $\mathbb{R}$.
2. On note C_k la courbe représentative de f_k dans un repère orthonormé. Sur la figure ci-dessous, on a représenté la droite D d'équation $y = x - 1$, la droite D' d'équation $y = x + 1$ et plusieurs courbes C_k. Déterminer le réel k associé à la courbe C passant par le point O, puis celui associé à la courbe C' passant par le point $A(1,1)$.



3. On remarque que, pour tout réel x : $f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1+ke^x}$ (1) et $f_k(x) = x + 1 - \frac{2ke^x}{1+ke^x}$ (2). En déduire, pour tout k strictement positif :

   – la position de la courbe C_k par rapport aux droites D et D' ;

   – les asymptotes de la courbe C_k.

Exercice 15

Partie I. On donne un entier naturel n strictement positif et l'on considère l'équation différentielle $(\mathrm{E}_n) : y' + y = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

1. On suppose que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout réel x : $g(x) = h(x)e^{-x}$.

   a) Montrer que g est solution de (E_n) si, et seulement si, pour tout réel x : $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$.

   b) En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$. Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

   a) Montrer que φ est solution de (E_n) si, et seulement si, $\varphi - g$ est solution de l'équation (F) : $y' + y = 0$.

   b) Résoudre (F).

   c) Déterminer la solution générale f de l'équation (E_n).

   d) Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

1. On pose, pour tout réel x : $f_0(x) = e^{-x}$ et $f_1(x) = xe^{-x}$.

   a) Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle $y' + y = f_0$.

   b) Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$. En utilisant la partie I, montrer par récurrence que, pour tout réel x et tout entier $n \geq 1$: $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

   a) Montrer que, pour tout entier naturel n et tout x de $[0,1]$: $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$.

   b) En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

   c) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul : $I_k - I_{k-1} = -\frac{1}{k!}e^{-1}$.

   d) Calculer I_0 et en déduire que $I_n = 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

   e) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e$.

Corrigés détaillés

Corrigé de l'exercice 1

1. a) $h'(x) = -2$ et $2h(x) + 4x = -4x - 2 + 4x = -2$: h est solution de (E_1).

b) Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f = g + h$. Comme $h' = 2h + 4x$:

$$f' = 2f + 4x \Leftrightarrow g' + h' = 2g + 2h + 4x \Leftrightarrow g' = 2g.$$

2. a) Les solutions de (E_2) sont les fonctions $g: x \mapsto ke^{2x}$, $k \in \mathbb{R}$.

b) Les solutions de (E_1) sont les fonctions $f: x \mapsto ke^{2x} - 2x - 1$, $k \in \mathbb{R}$.

c) $f(0) = k - 1 = 0$ donne $k = 1$: $f(x) = e^{2x} - 2x - 1$.

Corrigé de l'exercice 2

1. $u'(x) = 4e^{1-2x} - 8xe^{1-2x}$, donc $u'(x) + 2u(x) = 4e^{1-2x}$: u est solution de (E).

2. $y' = -2y$: les solutions de (E_0) sont les fonctions $x \mapsto ke^{-2x}$, $k \in \mathbb{R}$.

3. Comme $u' + 2u = 4e^{1-2x}$: $v' + 2v = 4e^{1-2x} \Leftrightarrow v' + 2v = u' + 2u \Leftrightarrow (v-u)' + 2(v-u) = 0$.

4. Les solutions de (E) sont les fonctions $v: x \mapsto 4xe^{1-2x} + ke^{-2x}$, $k \in \mathbb{R}$.

5. $v_0(0) = k = -2e$, donc $v_0(x) = 4xe^{1-2x} - 2e \times e^{-2x} = 2(2x-1)e^{1-2x}$.

Corrigé de l'exercice 3

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ $(1 + 2e^x > 0)$ et

$$f'(x) = -2e^{-2x}\ln(1 + 2e^x) + e^{-2x} \times \frac{2e^x}{1 + 2e^x} = -2f(x) + \frac{2e^{-x}}{1 + 2e^x}.$$

Donc $f' + 2f$ est égal au second membre : f est solution de (E).

2. Comme f est solution de (E) : φ est solution de (E) $\Leftrightarrow \varphi' + 2\varphi = f' + 2f \Leftrightarrow (\varphi - f)' + 2(\varphi - f) = 0$.

3. Les solutions de (E') sont les fonctions $x \mapsto ke^{-2x}$. Les solutions de (E) sont donc les fonctions

$$\varphi: x \mapsto e^{-2x}[\ln(1 + 2e^x) + k], \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 4

1. Les solutions de (2) sont les fonctions $x \mapsto ke^{2x}$, $k \in \mathbb{R}$.

2. a) $u'(x) = (ax + a + b)e^x$, donc $u'(x) - 2u(x) = (-ax + a - b)e^x$. u est solution de (1) si, et seulement si, $-ax + a - b = x$ pour tout réel x, soit $a = -1$ et $b = a = -1$: $u(x) = -(x + 1)e^x$.

b) $u' - 2u = xe^x$, donc $(u + v)' - 2(u + v) = xe^x \Leftrightarrow v' - 2v = 0$.

c) Toute solution w de (1) s'écrit $w = u + (w - u)$ avec $w - u$ solution de (2). Les solutions de (1) sont les fonctions $x \mapsto ke^{2x} - (x + 1)e^x$, $k \in \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 5

Recherche d'une solution particulière. Cherchons-la sous la forme $u(x) = h(x)e^{-x}$ avec h dérivable : $u'(x) + u(x) = h'(x)e^{-x}$. Il suffit que $h'(x) = 1$, par exemple $h(x) = x$: $u(x) = xe^{-x}$ est solution.

Résolution. Une fonction v est solution si, et seulement si, $(v - u)' + (v - u) = 0$, c'est-à-dire $v - u$: $x \mapsto ke^{-x}$. Les solutions sont les fonctions

$$x \mapsto (x + k)e^{-x}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 6

1. $u'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$, donc $u'(x) - 2u(x) = e^{2x}$.

2. Les solutions de (E_0) sont les fonctions $x \mapsto ke^{2x}$, $k \in \mathbb{R}$.

3. $v' - 2v = e^{2x} \Leftrightarrow v' - 2v = u' - 2u \Leftrightarrow (v - u)' - 2(v - u) = 0$.

4. Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto (x + k)e^{2x}$, $k \in \mathbb{R}$.

5. La condition $v(0) = 1$ donne $k = 1$: $v(x) = (x + 1)e^{2x}$.

Corrigé de l'exercice 7

1. Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$. $xP'(x) - 3P(x) = 3ax^3 + 2bx^2 + cx - 3ax^3 - 3bx^2 - 3cx - 3d = -bx^2 - 2cx - 3d$. Ce polynôme est nul si, et seulement si, $b = c = d = 0$. Les polynômes cherchés sont les P : $x \mapsto ax^3$, $a \neq 0$.

2. a) $f'(x) = 3x^2h(x) + x^3h'(x)$.

b) $xf'(x) - 3f(x) = 3x^3h(x) + x^4h'(x) - 3x^3h(x) = x^4h'(x)$. Donc f vérifie (E) si, et seulement si, $x^4h'(x) = 3\ln x$ pour tout $x > 0$, soit $h'(x) = \frac{3}{x^4}\ln x$.

c) $h(1) = f(1) = 0$: h est la primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction continue $t \mapsto \frac{3}{t^4}\ln t$ qui s'annule en 1, d'où $h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4}\ln t\, dt$.

Par parties avec $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = \frac{3}{t^4}$, $v(t) = -\frac{1}{t^3}$:

$$h(x) = \left[-\frac{\ln t}{t^3}\right]_1^x + \int_1^x \frac{dt}{t^4} = -\frac{\ln x}{x^3} + \left[-\frac{1}{3t^3}\right]_1^x = -\frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}.$$

3. D'après 2., si f est solution du problème, alors $f(x) = x^3h(x) = \frac{x^3}{3} - \ln x - \frac{1}{3}$: il y a au plus une solution. Réciproquement, cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$, $f(1) = 0$ et

$$xf'(x) - 3f(x) = x\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) - x^3 + 3\ln x + 1 = 3\ln x.$$

Le problème admet une solution unique : $f(x) = \frac{x^3 - 1}{3} - \ln x$.

Corrigé de l'exercice 8

1. $y_0'(x) = \lambda(2x - x^2)e^{-x}$ et $y_0''(x) = \lambda(2 - 4x + x^2)e^{-x}$. Donc

$$y_0'' + 2y_0' + y_0 = \lambda e^{-x}[2 - 4x + x^2 + 4x - 2x^2 + x^2] = 2\lambda e^{-x}.$$

y_0 est solution de (E) si, et seulement si, $\lambda = 1$: $y_0(x) = x^2e^{-x}$.

2. Comme $y_0'' + 2y_0' + y_0 = 2e^{-x}$: $y'' + 2y' + y = 2e^{-x} \Leftrightarrow (y - y_0)'' + 2(y - y_0)' + (y - y_0) = 0$.

3. $t' + t = z'' + z' + z' + z = z'' + 2z' + z = 0$.

4. D'après 3., $t(x) = ke^{-x}$, donc $z'(x) + z(x) = ke^{-x}$. La fonction $w: x \mapsto z(x)e^x$ a pour dérivée $\big(z'(x) + z(x)\big)e^x = k$, donc $w(x) = kx + c$ et $z(x) = (kx + c)e^{-x}$.

Réciproquement, si $z(x) = (kx + c)e^{-x}$, alors $z' + z = ke^{-x}$ puis $(z' + z)' + (z' + z) = 0$, c'est-à-dire $z'' + 2z' + z = 0$. Les solutions de (E_1) sont les fonctions $x \mapsto (kx + c)e^{-x}$, $(k, c) \in \mathbb{R}^2$.

5. Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto (x^2 + kx + c)e^{-x}$, $(k, c) \in \mathbb{R}^2$.

6. Les conditions sont $f(-1) = 0$ et $f'(-1) = 0$. Avec $f(x) = (x^2 + kx + c)e^{-x}$: $f'(x) = (-x^2 + (2 - k)x + k - c)e^{-x}$.

$f(-1) = 0 \Leftrightarrow 1 - k + c = 0$; $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -1 - 2 + k + k - c = 0 \Leftrightarrow 2k - c = 3$. D'où $k = 2$, $c = 1$:

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x} = (x + 1)^2e^{-x}.$$

Corrigé de l'exercice 9

1. $r' - r = y'' - 4y' - y' + 4y = y'' - 5y' + 4y = 0$.

2. D'après 1., $r(x) = ke^x$, soit $y'(x) - 4y(x) = ke^x$. La fonction $w: x \mapsto y(x)e^{-4x}$ a pour dérivée $\big(y'(x) - 4y(x)\big)e^{-4x} = ke^{-3x}$, donc $w(x) = -\frac{k}{3}e^{-3x} + B$ et $y(x) = Ae^x + Be^{4x}$ avec $A = -\frac{k}{3}$.

Réciproquement, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{4x}$ vérifient (E) ($1 - 5 + 4 = 0$ et $16 - 20 + 4 = 0$), donc toute fonction $x \mapsto Ae^x + Be^{4x}$ aussi. Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto Ae^x + Be^{4x}$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

3. La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)x + f(0)$: $f(0) = 1$ et $f'(0) = -2$, soit $A + B = 1$ et $A + 4B = -2$. D'où $B = -1$, $A = 2$: $f(x) = 2e^x - e^{4x}$.

4. $u(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^x > e^{4x} \Leftrightarrow e^{3x} < 2 \Leftrightarrow x < \frac{\ln}{3}$. $S = \left]-\infty, \frac{\ln}{3}\right[$.

5. Sur $[-1,0]$, $u > 0$ d'après 4. Donc

$$V = \pi \int_{-1}^{0} u\,(x)^2\,dx = \pi \int_{-1}^{0} (4e^{2x} - 4e^{5x} + e^{8x})\,dx = \pi \left[2e^{2x} - \frac{4}{5}e^{5x} + \frac{1}{8}e^{8x}\right]_{-1}^{0},$$

$$V = \pi\left(\frac{53}{40} - 2e^{-2} + \frac{4}{5}e^{-5} - \frac{1}{8}e^{-8}\right) \approx 3{,}33.$$

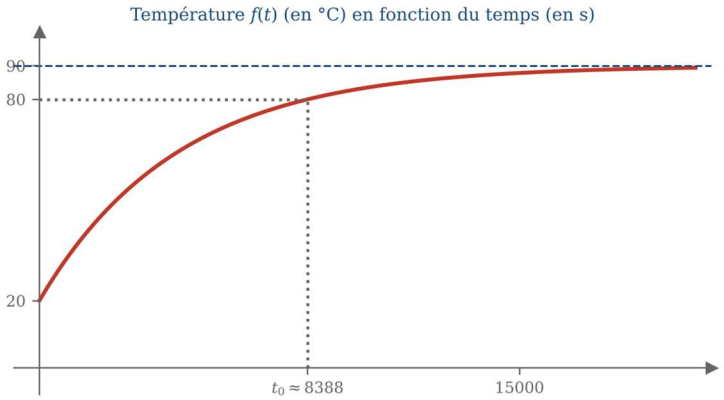
Corrigé de l'exercice 10

1. a) $\frac{a}{b} = \frac{2{,}088 \times 10^{-2}}{2{,}32 \times 10^{-4}} = 90$. Avec $y = f - 90$: $y' = f' = a - bf = -b\left(f - \frac{a}{b}\right) = -by$.

b) Les solutions de (1) sont les fonctions $t \mapsto ke^{-bt}$, $k \in \mathbb{R}$.

c) $f(t) = 90 + ke^{-bt}$ et $f(0) = 20$ donne $k = -70$: $f(t) = 90 - 70e^{-bt}$, avec $b = 2{,}32 \times 10^{-4}$.

2. $f(t) = 80 \Leftrightarrow 70e^{-b} = 10 \Leftrightarrow e^{bt} = 7 \Leftrightarrow t = \frac{\ln}{b} \approx 8388$ s, soit environ 2 h 20 min.



Exercice 10 : la température tend vers 90 °C.

Corrigé de l'exercice 11

1. L'équation s'écrit $y'' + \left(\frac{7}{2}\right)^2 y = 0$. Ses solutions sont les fonctions $x \mapsto A\cos\frac{7x}{2} + B\sin\frac{7x}{2}$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

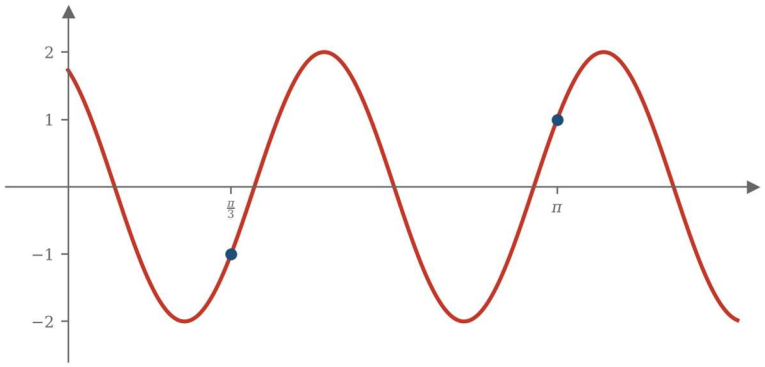
2. a) $\cos\frac{7\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{7\pi}{2} = -1$, donc $f(\pi) = -B = 1 : B = -1$.

$\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, donc $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}A + \frac{1}{2} = -1 : A = \sqrt{3}$.

$$f(x) = \sqrt{3}\cos\frac{7x}{2} - \sin\frac{7x}{2}.$$

b) $f(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{7x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{7x}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{7x}{2} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{7x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$.

Donc $r = 2$, $\theta = \frac{7}{2}$ et $\varphi = \frac{\pi}{6}$.



Exercice 11 : courbe de f et les deux conditions imposées.

Corrigé de l'exercice 12

Partie A. Voir le corrigé de l'exercice 1 : les solutions de (E_1) sont les fonctions $x \mapsto ke^{2x} - 2x - 1$, et celle qui s'annule en 0 est $f : x \mapsto e^{2x} - 2x - 1$.

Partie B

1. a) • En $-\infty$: $e^{2x} \to 0$ et $-2x - 1 \to +\infty$, donc $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

• En $+\infty$: $f(x) = e^{2x}\left(1 - \frac{2x+1}{e^{2x}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{e^{2x}} = 0$ (croissances comparées), donc $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

b) $f(x)-(-2x-1)=e^{2x}$, qui tend vers 0 en $-\infty$: la droite $y=-2x-1$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$. Comme $e^{2x}>0$, (C_f) est au-dessus de son asymptote.

2. $f'(x)=2e^{2x}-2=2(e^{2x}-1)$, du signe de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Corrigé de l'exercice 13

Partie A. Voir le corrigé de l'exercice 2 : les solutions de (E) sont les fonctions $v: x\mapsto 4xe^{1-2x}+ke^{-2x}$ et $v_0(x)=2(2x-1)e^{1-2x}$.

Partie B

1. • En $-\infty$: $2x-1\to-\infty$ et $e^{1-2x}\to+\infty$, donc $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$.

• En $+\infty$: $f(x)=2e\times\frac{2x-1}{e^{2x}}\to 0$ (croissances comparées). L'axe des abscisses est asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

2. $f'(x)=4e^{1-2x}-4(2x-1)e^{1-2x}=8(1-x)e^{1-2x}$, du signe de $1-x$; $f(1)=\frac{2}{e}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

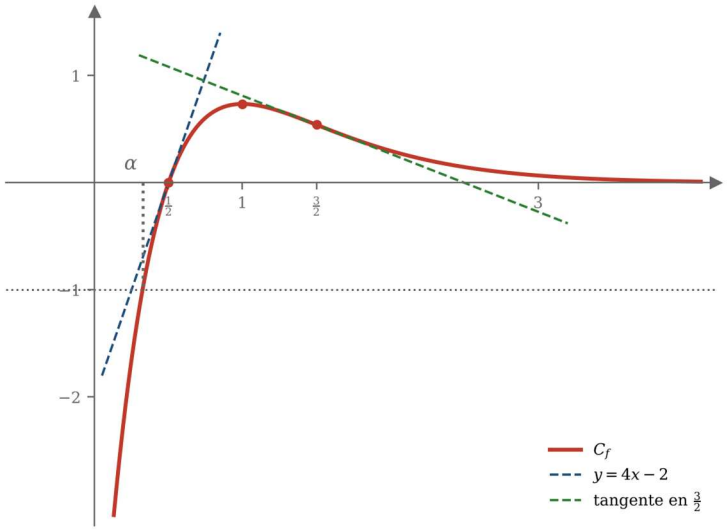
3. Sur $]-\infty,1]$, f est continue, strictement croissante, et $-1\in\left]-\infty,\frac{2}{e}\right]$: l'équation $f(x)=-1$ y a une solution unique α. Sur $[1,+\infty[$, $f(x)>0$: pas de solution. Donc α est l'unique solution sur $\mathbb{R}$.

$f(0{,}32)\approx-1{,}032<-1$ et $f(0{,}33)\approx-0{,}955>-1$, donc $0{,}32<\alpha<0{,}33$: $\alpha\approx 0{,}32$ à 10^{-2} près.

4. $f\left(\frac{3}{2}\right)=4e^{-2}$ et $f'\left(\frac{3}{2}\right)=-4e^{-2}$. La tangente a pour équation $y=-4e^{-2}\left(x-\frac{3}{2}\right)+4e^{-2}$, soit $y=-4e^{-2}x+10e^{-2}$.

5. $f(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, et $f'\left(\frac{1}{2}\right)=4$. La tangente a pour équation $y=4x-2$.

6.



Exercice 13 : la courbe C_f et les deux tangentes.

Partie C

1. a) $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$, donc $\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$. **b)** $\varphi''(x) = f''(x)$.

2. $f''(x) = 8[-e^{1-2x} - 2(1-x)e^{1-2x}] = 8(2x-3)e^{1-2x}$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

3. a) $\varphi''(x) = f''(x)$ est négatif sur $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$ et positif sur $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$: φ' est décroissante puis croissante et admet en $\frac{3}{2}$ un minimum égal à $\varphi'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$. Donc $\varphi'(x) \geq 0$ pour tout réel x.

b) φ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = 0$: $\varphi(x) < 0$ si $x < \frac{3}{2}$ et $\varphi(x) > 0$ si $x > \frac{3}{2}$.

c) C_f est en dessous de T pour $x < \frac{3}{2}$ et au-dessus pour $x > \frac{3}{2}$: la courbe traverse sa tangente, le point d'abscisse $\frac{3}{2}$ est un point d'inflexion.

Corrigé de l'exercice 14

1. a) Posons $E = ke^x \geq 0$. $f_k(x) - x = \frac{1-E}{1+E}$, donc

$$(f_k(x) - x)^2 + 1 = \frac{(1-E)^2 + (1+E)^2}{(1+E)^2} = \frac{2(1+E^2)}{(1+E)^2}.$$

D'autre part, la dérivée de $x \mapsto ke^x$ étant E :

$$f_k'(x) = 1 + \frac{-E(1+E) - (1-E)E}{(1+E)^2} = 1 - \frac{2E}{(1+E)^2} = \frac{1+E^2}{(1+E)^2}.$$

Donc $2f_k'(x) = (f_k(x) - x)^2 + 1$: f_k est solution de (E).

b) $f_k'(x) = \frac{1}{2}[(f_k(x) - x)^2 + 1] \geq \frac{1}{2} > 0$: f_k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. • C_k passe par O si, et seulement si, $f_k(0) = \frac{1-k}{1+k} = 0$, soit $k = 1$.

• C_k passe par $A(1,1)$ si, et seulement si, $1 + \frac{1-ke}{1+ke} = 1$, soit $ke = 1$: $k = \frac{1}{e}$.

3. Soit $k > 0$.

• D'après (1) : $f_k(x) - (x-1) = \frac{2}{1+ke^x} > 0$: C_k est au-dessus de D. D'après (2) : $f_k(x) - (x+1) = -\frac{2ke^x}{1+ke^x} < 0$: C_k est en dessous de D'. La courbe C_k est située dans la bande comprise entre D et D'.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{1+ke^x}=0$: D est asymptote à C_k au voisinage de $+\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2ke^x}{1+ke^x}=0$: D' est asymptote à C_k au voisinage de $-\infty$.

Corrigé de l'exercice 15

Partie I

1. a) $g'(x)=h'(x)e^{-x}-h(x)e^{-x}$, donc $g'(x)+g(x)=h'(x)e^{-x}$. Ainsi g est solution de (E_n) si, et seulement si, $h'(x)e^{-x}=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$, soit $h'(x)=\frac{x^n}{n!}$ pour tout réel x.

b) $h(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+c$ et $h(0)=0$ donne $c=0$. Donc $h(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ et $g(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$.

2. a) g étant solution de (E_n) : $\varphi'+\varphi=\frac{x^n}{n!}e^{-x}\Leftrightarrow\varphi'+\varphi=g'+g\Leftrightarrow(\varphi-g)'+(\varphi-g)=0$.

b) Les solutions de (F) sont les fonctions $x\mapsto ke^{-x}$, $k\in\mathbb{R}$.

c) Les solutions de (E_n) sont les fonctions $f:x\mapsto\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+k\right)e^{-x}$, $k\in\mathbb{R}$.

d) $f(0)=k=0$: $f(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$.

Partie II

1. a) ${f_1}'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$, donc ${f_1}'(x)+f_1(x)=e^{-x}=f_0(x)$.

b) • Pour $n=1$: d'après a), $f_1:x\mapsto xe^{-x}$ est solution de $y'+y=f_0$ et s'annule en 0 ; les solutions de cette équation étant les fonctions $x\mapsto(x+k)e^{-x}$ (exercice 5), c'est la seule. La formule est vraie au rang 1.

• Supposons $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$ pour un entier $n\geq1$. Alors f_{n+1} est la solution de $y'+y=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$, c'est-à-dire de (E_n), qui s'annule en 0. D'après I.2. d) : $f_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$.

2. a) Pour $x\in[0,1]$: $0<e^{-x}\leq1$ et $\frac{x^n}{n!}\geq0$, donc $0\leq f_n(x)\leq\frac{x^n}{n!}$ (vrai aussi pour $n=0$).

b) En intégrant sur $[0,1]$: $0\leq I_n\leq\int_0^1\frac{x^n}{n!}\,dx=\frac{1}{(n+1)!}$. Par encadrement, $\lim I_n=0$.

c) Pour $k\geq1$, ${f_k}'+f_k=f_{k-1}$, donc $f_k-f_{k-1}=-{f_k}'$ et

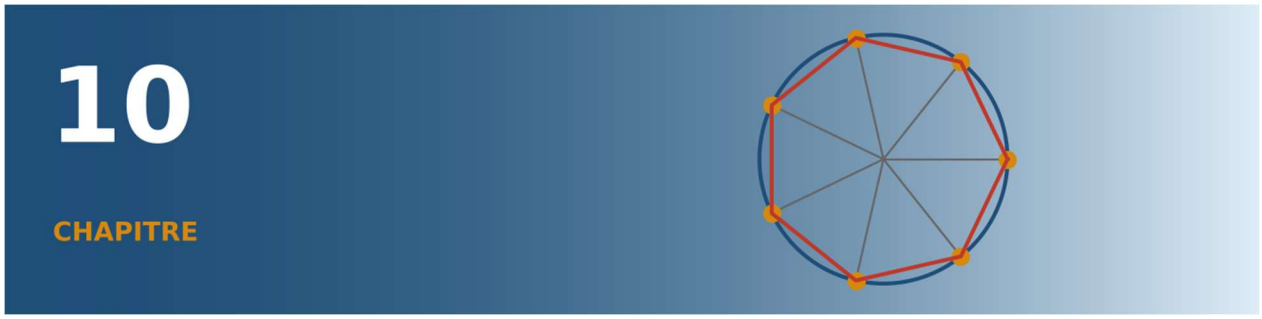
$$I_k-I_{k-1}=-\int_0^1{f_k}'(x)\,dx=-[f_k(x)]_0^1=-f_k(1)=-\frac{1}{k!}e^{-1}.$$

d) $I_0=\int_0^1e^{-x}\,dx=1-e^{-1}$. En sommant les égalités de c) pour $k=1,\dots,n$:

$$I_n=I_0-\frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=1-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=1-\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

e) $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e(1-I_n)$ et $\lim I_n=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e$.

Chapitre 10 — Nombres complexes



Cours • 28 exercices • Corrigés détaillés

Ce que vous devez savoir faire à la fin du chapitre
– Calculer avec les formes algébrique, trigonométrique et exponentielle ; passer de l'une à l'autre.
– Traduire en termes de nombres complexes une distance, un angle, un alignement, une orthogonalité.
– Déterminer et représenter un ensemble de points défini par une condition sur son affixe.
– Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré, les équations $z^n = a$, et des équations de degré supérieur s'y ramenant.
– Utiliser les formules de Moivre et d'Euler.

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 2, chapitre 1).

Cours

I. Forme algébrique, conjugué, module

Tout nombre complexe s'écrit de façon unique $z = a + ib$ avec $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$ réels. Le **conjugué** de z est $\overline{z} = a - ib$; le **module** de z est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Propriétés. Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier relatif n (avec $z \neq 0$ ou $z' \neq 0$ lorsque c'est nécessaire) :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}, \qquad z\overline{z} = |z|^2, \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}, \qquad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}, \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}, \qquad \overline{z^n} = (\overline{z})^n.$$

$$|zz'| = |z|\,|z'|, \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, \qquad |z^n| = |z|^n, \qquad |\overline{z}| = |z|, \qquad |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

z est réel $\Leftrightarrow \overline{z} = z$; z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$; $|z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$.

II. Interprétation géométrique

Affixes. Soit A, B, C, D des points d'affixes z_A, z_B, z_C, z_D.
– Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$.

– Le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$.
– Si $A \neq B$ et $C \neq D$: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)\ [2\pi]$.

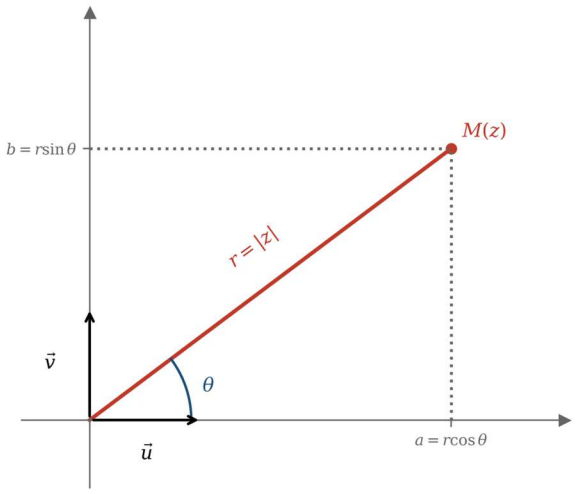
Méthode — traduire une configuration. Soit A, B, C trois points distincts et $Z = \frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.
– A, B, C sont alignés $\Leftrightarrow$ Z est réel.
– $(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow$ Z est imaginaire pur.
– ABC est isocèle rectangle en $A \Leftrightarrow Z = i$ ou $Z = -i$.
– ABC est équilatéral $\Leftrightarrow Z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
– $|z - z_A| = r$: cercle de centre A et de rayon r ; $|z - z_A| = |z - z_B|$: médiatrice de $[AB]$.

III. Forme trigonométrique, forme exponentielle

Définition. Soit z un nombre complexe non nul et M son image. Un **argument** de z est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$; on note $\arg z \equiv \theta\ [2\pi]$. En posant $r = |z|$:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta], \qquad \text{avec} \quad \cos\theta = \frac{a}{r}, \quad \sin\theta = \frac{b}{r}.$$

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$; la **forme exponentielle** de z est $z = re^{i\theta}$.



Module et argument d'un nombre complexe.

Propriétés. Pour tous réels θ, θ' et tout entier relatif n :

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}, \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}, \qquad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i} = \overline{e^{i\theta}}, \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}, \qquad -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}.$$

Autrement dit : $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'$, $\arg\frac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z'$, $\arg(z^n) \equiv n\arg z$, $\arg\bar{z} \equiv -\arg z$, $\arg(-z) \equiv \arg z + \pi\ [2\pi]$.
Valeurs particulières : $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.
Formule de Moivre. $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.
Formules d'Euler. $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

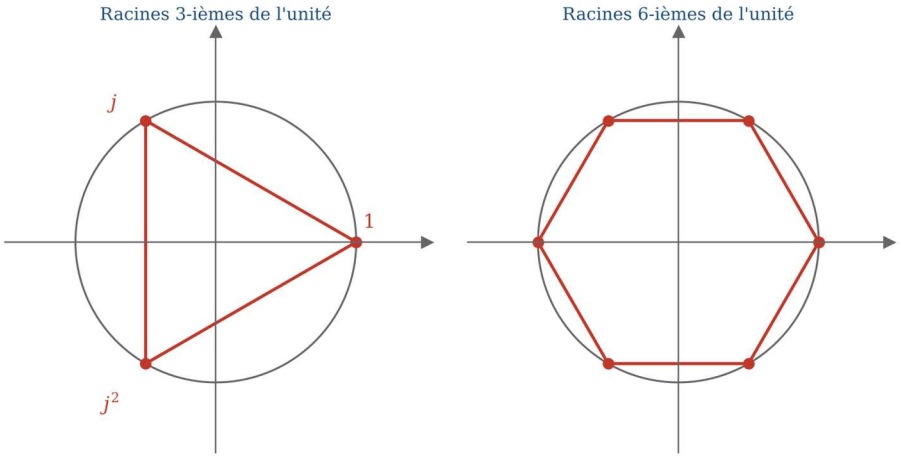
Attention. Dans $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, on doit avoir $r > 0$. Par exemple $-2e^{i\theta}$ n'est pas une forme exponentielle : $-2e^{i\theta} = 2e^{i(\theta+\pi)}$.

IV. Racines n-ièmes

Théorème. Soit $n \geq 2$ un entier et $a = re^{i\theta}$ un nombre complexe non nul ($r > 0$). L'équation $z^n = a$ admet dans $\mathbb{C}$ exactement n solutions :

$$z_k = \sqrt[n]{r}\; e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, \qquad k \in \{0,1,\dots,n-1\}.$$

Conséquence. Les images des racines n-ièmes de l'unité, $e^{i\frac{2k}{n}}$, sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique ; leur somme est nulle.



Racines cubiques et racines sixièmes de l'unité. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$: $j^3 = 1$, $\bar{j} = j^2$ et $1 + j + j^2 = 0$.

V. Équations du second degré

Racines carrées. Tout nombre complexe non nul $a = re^{i\varphi}$ admet deux racines carrées opposées : $\sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$ et $-\sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$.

Théorème. Soit a, b, c des nombres complexes, $a \neq 0$. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues)

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a},$$

où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. De plus $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$, $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Méthode — racines carrées sous forme algébrique. Pour résoudre $(x + iy)^2 = a + ib$ (x, y réels), on utilise le système

$$x^2 - y^2 = a, \qquad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad 2xy = b.$$

Les deux premières équations donnent x^2 et y^2 ; la troisième donne le signe du produit xy.

Méthode — équation de degré 3. Si l'on connaît (ou si l'on cherche sous une forme imposée : réelle, imaginaire pure) une solution z_0, on factorise par $(z - z_0)$ et l'on se ramène au second degré.

Exemple. Racines carrées de $3 + 4i$: $x^2 - y^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 5$, $xy > 0$, d'où $x^2 = 4$, $y^2 = 1$: les racines carrées sont $2 + i$ et $-2 - i$.

Exercices

Exercices 1 à 12 : calculs, formes trigonométrique et exponentielle, ensembles de points. Exercices 13 à 18 : équations. Exercices 19 à 25 : nombres complexes et géométrie. Exercices 26 à 28 : approfondissement.

Exercice 1

Soit a et b deux réels non nuls. On pose $z_1 = \frac{a+ib}{a-ib}$ et $z_2 = \frac{a-ib}{a+ib}$. Montrer que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.

Exercice 2

Soit a, b et c trois nombres complexes de module 1 tels que $a + b + c = 1$. Calculer $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Exercice 3

Soit A et B les points d'affixes -1 et i. Pour $z \neq i$, on pose $Z = \frac{z+1}{z-i}$, avec $z = x + iy$, x et y réels ; M désigne l'image de z.

1. Interpréter géométriquement $|z + 1|$ et $|z - i|$.
2. En déduire l'ensemble des points M tels que $|Z| = 1$.
3. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.
4. Déterminer l'ensemble des points M tels que Z soit un réel.
5. Déterminer l'ensemble des points M tels que Z soit imaginaire pur.
6. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 = 1$. (On note j la racine de partie imaginaire positive.)
2. Écrire les racines de (E) sous forme trigonométrique.
3. Calculer j^2 et $1 + j + j^2$.
4. Montrer que, pour tous nombres complexes a, b, c : $(a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + cj + bj^2) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.
5. On considère trois points distincts A, B, C d'affixes respectives a, b, c. Montrer que les relations

$$a + bj + cj^2 = 0, \qquad b + cj + aj^2 = 0, \qquad c + aj + bj^2 = 0$$

sont équivalentes et qu'elles constituent une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC soit équilatéral direct.

Exercice 5

Dans le plan complexe, on considère les points $A(3)$, $B(-3)$ et $M(z)$ tels que $(*) : \frac{MB}{MA} = 2$.

1. Montrer que $(*) \Leftrightarrow (z - 5)(\overline{z} - 5) = 16$.
2. En déduire l'ensemble des points M.

Exercice 6

Soit $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$, où a, b et c sont des nombres complexes ; on note z_1, z_2 et z_3 les racines de l'équation $P(z) = 0$, de sorte que $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$.

1. Montrer que $a = -(z_1 + z_2 + z_3)$, $b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ et $c = -z_1z_2z_3$.
2. Application 1. Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système : $xyz = 1, xy + yz + zx = 1, x + y + z = 1$.
3. Application 2. Déterminer les nombres complexes x, y, z de modules inférieurs ou égaux à 1 et vérifiant les égalités $xyz = x + y + z = 1$.

Exercice 7

Soit $z = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$.

1. Soit $z' = (1 + i)z$. Écrire z' sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
2. En déduire la forme trigonométrique de z.
3. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 8

Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. On considère les nombres complexes $z_1 = \sin\theta + i\cos\theta$, $z_2 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$ et $z_3 = \frac{\sin\theta + i\cos\theta}{1 + \cos\theta + i\sin\theta}$.

1. Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique puis exponentielle.
2. Déterminer l'ensemble décrit par chacun des points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ lorsque θ décrit $[0, \pi[$.

Exercice 9

On donne dans le plan complexe trois points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3. Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels MNP est un triangle rectangle en M.

Exercice 10

On donne le nombre complexe $z = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

1. Exprimer z^2 sous forme algébrique.
2. Exprimer z^2 sous forme exponentielle.
3. En déduire z sous forme exponentielle.

Exercice 11

Soit α et β deux réels. Montrer que

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \quad \text{et} \quad e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Exercice 12

Soit a et b deux nombres réels ; on considère les nombres complexes z et z' de module 1 et d'arguments respectifs a et b.

1. Montrer, en utilisant la forme exponentielle de z et z', que $\frac{(z+z')^2}{zz'}$ est un réel positif ou nul.
2. En déduire que, si $z + z' \neq 0$: $2\arg(z + z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.

3. On appelle M et M' les images de z et z' et N le point tel que $OMNM'$ soit un parallélogramme. Interpréter géométriquement l'égalité précédente à l'aide de ces points.

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z^2 - 2z\cos\varphi + 1 = 0$, où $\varphi \in \mathbb{R}$.
2. $(z-1)^6 = (z-1)^3 + 1$.
3. $(1+i)z^2 - (5+i)z + 6 + 4i = 0$.
4. $z^5 = \frac{8(1+i)}{\sqrt{3}-i}$.
5. $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = \frac{1+ia}{1-ia}$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 14

On considère l'équation (E) : $z^3 + (2-2i)z^2 + (5-4i)z - 10i = 0$.

1. Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure.
2. Résoudre alors (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + (2-3i)z^2 - (7+i)z + 14i - 2 = 0$, sachant qu'elle admet une racine réelle.

Exercice 16

On considère l'équation (E) : $z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0$.

1. Vérifier que (E) est équivalente au système : $Z = z + \frac{1}{z}$ et $Z^2 - 2Z - 3 = 0$.
2. En déduire la résolution de (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 17

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère la suite de points M_n d'affixes respectives z_n définies par $z_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n$.

1. Calculer le module et un argument du nombre complexe $\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$.
2. Calculer z_1, z_2, z_3 et vérifier que z_3 est réel. Placer les points M_0, M_1, M_2 et M_3.
3. Montrer que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et comparer les longueurs OM_{n+1} et M_nM_{n+1}.

Exercice 18

Soit $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et (E_φ) l'équation : $z^2 - (3\cos\varphi + 1 + i\cos\varphi)z + 2\cos\varphi(\cos\varphi + 1 + i\cos\varphi) = 0$.

1. Montrer que l'équation (E_φ) admet une solution réelle z_1 que l'on calculera et en déduire l'autre solution z_2.
2. Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

a) Déterminer l'ensemble des points M_1 lorsque φ décrit l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Montrer que $2M_1M_2^2 = 1 + (2\cos\varphi - 1)^2$.

c) Pour quelles valeurs de φ la distance entre M_1 et M_2 est-elle maximale ?

d) Déterminer $\cos\varphi$ pour que le triangle OM_1M_2 soit isocèle en M_1.

Exercice 19

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on considère un quadrilatère $ABCD$. On construit les triangles équilatéraux DCP, DAQ, BAM et BCN tels que

$$\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DP}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DQ}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi].$$

Soit a, b, c, d les affixes respectives de A, B, C, D et m, n, p, q celles de M, N, P, Q.

1. Démontrer les relations : $m = e^{i\frac{\pi}{3}}(a-b) + b$, $n = e^{i\frac{\pi}{3}}(c-b) + b$, $p = e^{i\frac{\pi}{3}}(c-d) + d$, $q = e^{i\frac{\pi}{3}}(a-d) + d$.
2. En utilisant les relations précédentes :
   a) démontrer que $MNPQ$ est un parallélogramme ;
   b) démontrer que $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{QP}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$, $AC = QP$, $\left(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{BD}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$ et $NP = BD$.
3. Démontrer que $MNPQ$ est un carré si, et seulement si, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ vérifient $AC = BD$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) \equiv \frac{\pi}{6} + k\pi$, où k est un entier relatif.

Exercice 20

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls. Montrer que $|z + z'| = |z| + |z'|$ si, et seulement si, $\arg z \equiv \arg z' \ [2\pi]$.

Exercice 21

Soit un triangle ABC ; on note O le centre de son cercle circonscrit. Dans un repère orthonormé de centre O, on note a, b et c les affixes des points A, B et C. Soit H le point d'affixe $h = a + b + c$.

1. Démontrer que $|a| = |b| = |c|$.
2.
   a) Soit $w = \overline{b}c - b\overline{c}$. Calculer $w + \overline{w}$. En déduire que w est imaginaire pur.
   b) Démontrer, à l'aide du a), que les nombres $(b+c)\left(\overline{b} - \overline{c}\right)$ et $\frac{b+c}{b-c}$ sont imaginaires purs.
3.
   a) Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.
   b) En utilisant les résultats précédents, démontrer que (AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC.
   c) Expliquer, sans calculs supplémentaires, pourquoi H est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 22

Soit f l'application qui, à tout nombre complexe z différent de i, associe $z' = f(z) = i + \frac{2}{\overline{z}+i}$. On note A le point d'affixe i et T l'application du plan privé de A dans le plan qui, au point M d'affixe z, associe le point $M' = T(M)$ d'affixe z'.

1. a) Calculer $f(1)$ et $f(2+i)$. b) Résoudre l'équation $f(z) = 0$.
2. a) Calculer $\arg[(z'-i)(\overline{z}+i)]$. b) Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?
3. a) Exprimer l'affixe z'' de $M'' = (T \circ T)(M)$ en fonction de l'affixe z de M. b) Que peut-on dire de $T \circ T$?
4. On appelle (J) l'ensemble des points du plan invariants par T.
   a) Démontrer que M appartient à (J) si, et seulement si, $AM = \sqrt{2}$. b) Caractériser géométriquement (J).
5. Dans cette question, on suppose que $z = 1 + i + e^{i\theta}$, où θ est un nombre réel ; on note B le point d'affixe $1+i$.
   a) Quelle est la courbe (Γ) décrite par le point M d'affixe z lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$?
   b) Montrer que $z' - i = 1 + i\tan\frac{\theta}{2}$, avec $z' = f(z)$.
   c) À quelle courbe (L) appartient le point M' d'affixe z' ?
   d) En déduire $T(\Gamma)$, image de (Γ) par T. Construire (Γ) et $T(\Gamma)$.

Exercice 23

On considère l'application $f: \mathbb{C}\backslash\{-i\} \to \mathbb{C}\backslash\{-i\}$, $z \mapsto f(z) = \frac{z-1}{i(z+i)}$, et l'application F du plan privé de B dans lui-même qui, au point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ avec $z' = f(z)$, où B est le point d'affixe $-i$.

1. Montrer que f est involutive (c'est-à-dire $f \circ f$ est l'identité de $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$) et en déduire que f est bijective.
2. a) Vérifier que, pour tout $z \neq -i$: $z' + i = \frac{-1+i}{z+i}$.
   b) En déduire que, pour tout point M distinct de B : $BM \times BM' = \sqrt{2}$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}\right) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.
3. Déterminer les images par F de la droite $(D): y = x - 1$ privée de B et du cercle (C) de centre B et de rayon 1.

Exercice 24

Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^3 + 2\left(i - \sqrt{3}\right)z^2 + 4\left(1 - i\sqrt{3}\right)z + 8i$.

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ possède une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
2. Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les deux autres racines, avec $\mathrm{Im}(z_1) < 0$.

3. On pose $\omega = \frac{z_1}{z_0}$. Donner la forme trigonométrique de ω.
4. À tout nombre complexe z non nul, on associe les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectives z, ωz et $\omega^2 z$. Montrer que OMM_1M_2 est un losange.

Exercice 25

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct, on considère l'application s qui, au point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que $z' = (2+i)\overline{z} + 1 - 3i$.

1. Vérifier que $A(0,-1)$ est l'unique point invariant par s.
2. Montrer que s est bijective et expliciter son application réciproque s^{-1}.
3. Prouver que, pour tout point M distinct de A, d'image M' par s : $AM' = \sqrt{5}\,AM$.
4. Montrer que, pour tous points deux à deux distincts M_1, M_2, M_3, d'images respectives M_1', M_2', M_3' : $\left(\overrightarrow{M_1'M_2'}, \overrightarrow{M_1'M_3'}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right)\ [2\pi]$.
5. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $\arg(z') \equiv 0\ [2\pi]$.
6. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $(z')^3 = 1$. (On pourra utiliser la question 2.)

Exercice 26

Soit β un nombre complexe tel que $\beta^7 = 1$ et $\beta \neq 1$. Montrer que $\frac{\beta}{1+\beta^2} + \frac{\beta^2}{1+\beta^4} + \frac{\beta^3}{1+\beta^6} = -2$.

Exercice 27

On considère un cercle de centre O et trois points A, B et C de ce cercle. On désigne par A', B' et C' les images respectives des points A, B et C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit U, V, W les milieux respectifs des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$. Démontrer que ces points sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Exercice 28

1.
   a) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\alpha)z + 1 = 0$.
   b) En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation $z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1 = 0$, où n est un entier naturel non nul.
2. Soit $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1$.
   a) Justifier la factorisation : $P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)z + 1\right)$.
   b) Calculer $P_\alpha(1)$. En déduire que $\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha+2k\pi}{2n}\right) = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4^{n-1}}$.
3. Pour tout $\alpha \in]0,\pi[$ et tout entier $n \geq 2$, on pose $H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{2n}\right)$.
   a) Montrer que $2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2n}}$.
   b) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ?
   c) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$: $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Corrigés détaillés

Corrigé de l'exercice 1

a et b étant réels, $\overline{a+ib} = a - ib$, donc $z_2 = \overline{z_1}$. Par suite $z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z_1} = 2\mathrm{Re}(z_1)$ est réel et $z_1 - z_2 = z_1 - \overline{z_1} = 2i\mathrm{Im}(z_1)$ est imaginaire pur.

Calcul explicite. $z_1 = \frac{(a+ib)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2+2iab}{a^2+b^2}$, donc $z_1 + z_2 = \frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$ et $z_1 - z_2 = \frac{4ab}{a^2+b^2}\, i$.

Corrigé de l'exercice 2

Si $|a| = 1$, alors $a\overline{a} = 1$, donc $\frac{1}{a} = \overline{a}$. De même pour b et c. Donc

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{a+b+c} = \overline{1} = 1.$$

Corrigé de l'exercice 3

1. $|z+1| = |z-(-1)| = AM$ et $|z-i| = BM$.

2. Pour $z \neq i$: $|Z| = 1 \Leftrightarrow |z+1| = |z-i| \Leftrightarrow AM = BM$. L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[AB]$, c'est-à-dire la droite d'équation $y = -x$ (B n'en fait pas partie).

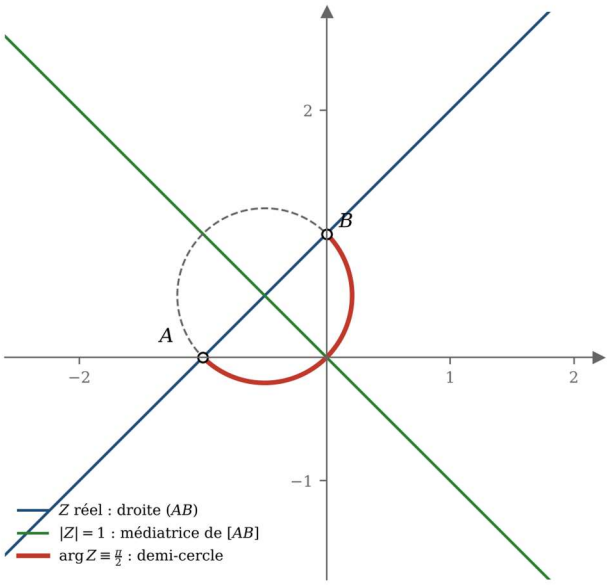
3. $Z = \frac{(x+1)+iy}{x+i(y-1)} = \frac{[(x+1)+i\ ][x-i(y-1)]}{x^2+(y-1)^2}$, d'où

$$\mathrm{Re}(Z) = \frac{x^2+y^2+x-y}{x^2+(y-1)^2}, \qquad \mathrm{Im}(Z) = \frac{x-y+1}{x^2+(y-1)^2}.$$

4. Z réel $\Leftrightarrow x - y + 1 = 0$ et $(x,y) \neq (0,1)$: c'est la droite (AB) privée du point B.

5. Z imaginaire pur $\Leftrightarrow x^2+y^2+x-y = 0$ et $M \neq B$, soit $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$: c'est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B.

6. $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow \mathrm{Re}(Z) = 0$ et $\mathrm{Im}(Z) > 0$: M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ et vérifie $x - y + 1 > 0$. C'est le demi-cercle de diamètre $[AB]$ situé du côté de O par rapport à la droite (AB) (le point O vérifie bien les deux conditions), privé de A et B.



Exercice 3 : les ensembles obtenus.

Corrigé de l'exercice 4

1. $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$; $z^2+z+1=0$ a pour discriminant -3 et pour solutions $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Donc $S=\{1,\ j,\ \overline{j}\}$ avec $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $1=\cos 0+i\sin 0$; $j=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$; $\overline{j}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$.

3. $j^2=e^{i\frac{4\pi}{3}}=\overline{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, et $1+j+j^2=0$ (car j est racine de z^2+z+1).

4. En utilisant $j^3=1, j^4=j$ et $j+j^2=-1$:

$$(a+bj+cj^2)(a+cj+bj^2)=a^2+b^2+c^2+(ab+bc+ca)(j+j^2)$$
$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca.$$

En multipliant par $(a+b+c)$ et en développant, tous les termes mixtes a^2b, ab^2… se simplifient et il reste $a^3+b^3+c^3-3abc$.

5. *Équivalence.* En multipliant $a+bj+cj^2=0$ par j (non nul) : $aj+bj^2+c=0$, c'est la troisième relation ; en multipliant encore par j : $aj^2+b+cj=0$, c'est la deuxième. Les trois relations sont équivalentes.

Interprétation. Comme $j^2=-1-j$: $a+bj+cj^2=0\Leftrightarrow a-c+j(b-c)=0\Leftrightarrow\frac{a-c}{b-c}=-j=e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Cette égalité équivaut à $CA=CB$ et $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})\equiv-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, soit $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\equiv\frac{\pi}{3}$: le triangle ABC est équilatéral direct.

Remarque. ABC est équilatéral indirect si, et seulement si, $a+bj^2+cj=0$. D'après la question 4, ABC est équilatéral (direct ou indirect) si, et seulement si, $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$.

Corrigé de l'exercice 5

1. $M\neq A$ et $\frac{MB}{MA}=2\Leftrightarrow|z+3|=2|z-3|\Leftrightarrow(z+3)(\overline{z}+3)=4(z-3)(\overline{z}-3)$ (le cas $z=3$ ne vérifie pas cette égalité). En développant :

$$z\overline{z}+3z+3\overline{z}+9=4z\overline{z}-12z-12\overline{z}+36\Leftrightarrow z\overline{z}-5z-5\overline{z}+9=0\Leftrightarrow(z-5)(\overline{z}-5)=16.$$

2. $(z-5)\overline{(z-5)}=|z-5|^2$: l'ensemble des points M est le cercle de centre $\Omega(5)$ et de rayon 4.

Corrigé de l'exercice 6

1. $(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=z^3-(z_1+z_2+z_3)z^2+(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)z-z_1z_2z_3$. Par identification avec $P(z)$: $a=-(z_1+z_2+z_3)$, $b=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$, $c=-z_1z_2z_3$.

2. D'après 1., (x,y,z) est solution si, et seulement si, x, y, z sont les trois racines de $t^3-t^2+t-1=0$. Or $t^3-t^2+t-1=(t-1)(t^2+1)$, de racines 1, i, $-i$. Les solutions sont les six triplets obtenus en permutant $(1,i,-i)$.

3. $|x|\,|y|\,|z|=|xyz|=1$ avec $|x|\leq 1, |y|\leq 1, |z|\leq 1$ impose $|x|=|y|=|z|=1$. Alors $\frac{1}{x}=\overline{x}$, etc., et

$$xy+yz+zx=xyz\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\overline{x+y+z}=1.$$

On est ramené au système de la question 2 : les solutions sont les six triplets obtenus en permutant $(1,i,-i)$, qui conviennent.

Corrigé de l'exercice 7

1. $z'=(1+i)\left[1+\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}-1\right)\right]=\left(1+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left[\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)\right]=2+2i\sqrt{3}$.

$|z'| = 4$ et $z' = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

2. $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, donc $z = \frac{z'}{1+i}$ a pour module $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ et pour argument $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$: $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

3. Par identification avec la forme algébrique de z :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Corrigé de l'exercice 8

1. • $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$.

• $z_2 = 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$. Comme $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $2\cos\frac{\theta}{2} > 0$: c'est la forme trigonométrique, et $z_2 = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$.

• $z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\theta}{2}\right)}$.

2. • $|z_1| = 1$ et $\arg z_1 \equiv \frac{\pi}{2} - \theta$, qui décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ lorsque θ décrit $[0, \pi[$: M_1 décrit le demi-cercle trigonométrique d'abscisses positives, le point d'affixe i étant compris et le point d'affixe $-i$ exclu.

• $z_2 - 1 = e^{i\theta}$: M_2 décrit le demi-cercle de centre $I(1)$ et de rayon 1 situé dans le demi-plan $y \geq 0$, le point d'affixe 2 étant compris et le point O exclu.

Corrigé de l'exercice 9

Le triangle MNP existe si les trois points sont deux à deux distincts : $z^2 \neq z$, $z^3 \neq z$, $z^3 \neq z^2$, c'est-à-dire $z \notin \{0, 1, -1\}$.

Sous cette condition, MNP est rectangle en M si, et seulement si, $\frac{z^3 - z}{z^2 - z}$ est imaginaire pur. Or $\frac{z^3 - z}{z^2 - z} = \frac{z(z-1)(z+1)}{z(z-1)} = z + 1$. La condition s'écrit $\mathrm{Re}(z + 1) = 0$, soit $\mathrm{Re}(z) = -1$.

L'ensemble cherché est la droite d'équation $x = -1$ privée du point d'affixe -1.

Corrigé de l'exercice 10

1. $z^2 = (2 + \sqrt{2}) - (2 - \sqrt{2}) - 2i\sqrt{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$.

2. $|z^2| = 4$ et $z^2 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

3. Les racines carrées de $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ sont $2e^{-i\frac{\pi}{8}}$ et $-2e^{-i\frac{\pi}{8}} = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$. Comme $\mathrm{Re}(z) < 0$ et $\mathrm{Im}(z) > 0$, un argument de z est dans $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$: $z = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

Corrigé de l'exercice 11

On met en facteur $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ (« l'angle moitié ») et l'on applique les formules d'Euler :

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

$$e^{i\alpha}-e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}-e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)=2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Corrigé de l'exercice 12

1. $z=e^{ia}$, $z'=e^{ib}$. D'après l'exercice 11 : $(z+z')^2=4\cos^2\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i(a+b)}$ et $zz'=e^{i(a+b)}$, donc $\frac{(z+z')^2}{zz'}=4\cos^2\left(\frac{a-b}{2}\right)\geq 0$.

2. Si $z+z'\neq 0$, ce réel est strictement positif, donc son argument est nul : $\arg((z+z')^2)-\arg(zz')\equiv 0$, soit $2\arg(z+z')\equiv \arg z+\arg z'\ [2\pi]$.

3. $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$, donc N a pour affixe $z+z'$. L'égalité s'écrit $\left(\vec{u},\overrightarrow{ON}\right)\equiv\frac{1}{2}\left[\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right)\right]\ [\pi]$: la droite (ON) est une bissectrice de l'angle $\widehat{MOM'}$. C'est la propriété de la diagonale du losange $OMNM'$ ($OM=OM'=1$).

Corrigé de l'exercice 13

1. $\Delta'=\cos^2\varphi-1=-\sin^2\varphi=(i\sin\varphi)^2$. Les solutions sont $\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$ et $\cos\varphi-i\sin\varphi=e^{-i\varphi}$.

2. Posons $Z=(z-1)^3$: $Z^2-Z-1=0$, d'où $Z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $Z=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

• $(z-1)^3=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (réel positif) : $z-1=r_1j^k$ avec $r_1=\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, $k\in\{0,1,2\}$.

• $(z-1)^3=-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (réel négatif) : $z-1=-r_2j^k$ avec $r_2=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, $k\in\{0,1,2\}$.

$$S=\{1+r_1,\ 1+r_1j,\ 1+r_1j^2,\ 1-r_2,\ 1-r_2j,\ 1-r_2j^2\}.$$

3. $\Delta=(5+i)^2-4(1+i)(6+4i)=24+10i-4(2+10i)=16-30i$. Cherchons $\delta=x+iy$ tel que $\delta^2=\Delta$: $x^2-y^2=16$, $x^2+y^2=\sqrt{16^2+30^2}=34$, $xy<0$. D'où $x^2=25$, $y^2=9$: $\delta=5-3i$.

$$z_1=\frac{5+i+5-3i}{2(1+i)}=\frac{5-i}{1+i}=\frac{(5-i)(1-i)}{2}=2-3i,\qquad z_2=\frac{5+i-5+3i}{2(1+i)}=\frac{2i}{1+i}=1+i.$$

$S=\{2-3i,\ 1+i\}$.

4. $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\sqrt{3}-i=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$, donc le second membre vaut $4\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}=\left(\sqrt{2}\right)^5e^{i\frac{5\pi}{12}}$. Les solutions sont

$$z_k=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{5}\right)},\qquad k\in\{0,1,2,3,4\}.$$

5. Soit α l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\alpha=a$. Alors $\frac{1+ia}{1-ia}=\frac{\cos\alpha+i\sin}{\cos\alpha-i\sin}=e^{2i\alpha}$.

Posons $w=\frac{1+iz}{1-iz}$ ($z\neq -i$). L'équation devient $w^4=e^{2i\alpha}$, soit $w=e^{i\theta_k}$ avec $\theta_k=\frac{\alpha}{2}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\{0,1,2,3\}$.

Pour w donné : $1+iz=w(1-iz)\Leftrightarrow iz(1+w)=w-1$. Si $w=-1$, il n'y a pas de solution ; sinon $z=\frac{w-1}{i(w+1)}$. Avec $w=e^{i\theta}$, l'exercice 11 donne $\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}=i\tan\frac{\theta}{2}$, donc $z=\tan\frac{\theta_k}{2}$.

Or $w=-1$ signifie $\theta_k\equiv\pi\ [2\pi]$, ce qui n'arrive que pour $\alpha=0$ et $k=2$.

• Si $a\neq 0$: $S=\left\{\tan\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{k\pi}{4}\right),\ k\in\{0,1,2,3\}\right\}$ (quatre solutions réelles).

• Si $a=0$: $S=\{0,\ 1,\ -1\}$.

Corrigé de l'exercice 14

1. Posons $z = iy$, y réel : $(iy)^3 + (2-2i)(iy)^2 + (5-4i)(iy) - 10i = (-2y^2 + 4y) + i(-y^3 + 2y^2 + 5y - 10)$. La partie réelle s'annule pour $y = 0$ ou $y = 2$; la partie imaginaire s'annule pour $y = 2$ $(-8 + 8 + 10 - 10 = 0)$ mais pas pour $y = 0$. Donc $z_0 = 2i$ est solution de (E).

2. $z^3 + (2-2i)z^2 + (5-4i)z - 10i = (z - 2i)(z^2 + bz + c)$ avec $b - 2i = 2 - 2i$ et $-2ic = -10i$, soit $b = 2$ et $c = 5$ (on vérifie $c - 2ib = 5 - 4i$). L'équation $z^2 + 2z + 5 = 0$ a pour discriminant réduit $-4 = (2i)^2$ et pour solutions $-1 \pm 2i$.

$S = \{2i,\ -1 + 2i,\ -1 - 2i\}$.

Corrigé de l'exercice 15

Soit x une racine réelle. En séparant parties réelle et imaginaire : $x^3 + 2x^2 - 7x - 2 = 0$ et $-3x^2 - x + 14 = 0$. La seconde équation a pour solutions 2 et $-\frac{7}{3}$; seul $x = 2$ vérifie la première $(8 + 8 - 14 - 2 = 0)$. Donc 2 est racine.

On factorise : $z^3 + (2-3i)z^2 - (7+i)z + 14i - 2 = (z-2)(z^2 + bz + c)$ avec $b - 2 = 2 - 3i$ et $-2c = 14i - 2$, soit $b = 4 - 3i$ et $c = 1 - 7i$ (on vérifie $c - 2b = -7 - i$).

$z^2 + (4-3i)z + 1 - 7i = 0$: $\Delta = (4-3i)^2 - 4(1-7i) = 3 + 4i = (2+i)^2$. D'où $z = \frac{-4+3i+2+i}{2} = -1 + 2i$ ou $z = \frac{-4+3i-2-i}{2} = -3 + i$.

$S = \{2,\ -1 + 2i,\ -3 + i\}$.

Corrigé de l'exercice 16

1. 0 n'est pas solution de (E). Pour $z \neq 0$, en divisant par z^2 : (E) $\Leftrightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} - 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$. Avec $Z = z + \frac{1}{z}$, $z^2 + \frac{1}{z^2} = Z^2 - 2$, d'où $Z^2 - 2Z - 3 = 0$.

2. $Z^2 - 2Z - 3 = 0 \Leftrightarrow Z = 3$ ou $Z = -1$.

• $z + \frac{1}{z} = 3 \Leftrightarrow z^2 - 3z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

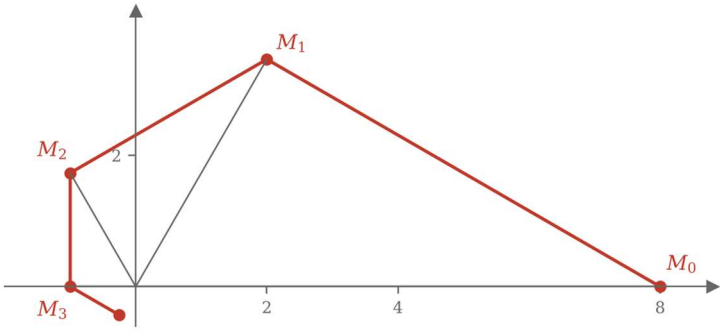
• $z + \frac{1}{z} = -1 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = j$ ou $z = j^2$, avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$S = \left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ \frac{3-\sqrt{5}}{2},\ j,\ j^2\right\}$.

Corrigé de l'exercice 17

1. $\frac{1+i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$: module $\frac{1}{2}$, argument $\frac{\pi}{3}$.

2. $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 + 2i\sqrt{3}$; $z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$; $z_3 = e^{i\pi} = -1$, qui est réel.



Exercice 17 : les points M_0, M_1, M_2, M_3.

3. Posons $q = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$; $z_n = 8q^n \neq 0$. On calcule

$$\frac{z_n - z_{n+1}}{0 - z_{n+1}} = \frac{1-q}{-q} = -\frac{3-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = -\frac{(3-i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{4} = i\sqrt{3}.$$

Ce quotient est imaginaire pur : $(\overrightarrow{M_{n+1}O}, \overrightarrow{M_{n+1}M_n}) \equiv \frac{\pi}{2}$, le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle en M_{n+1}. Son module vaut $\sqrt{3}$: $M_nM_{n+1} = \sqrt{3}\,OM_{n+1}$.

Corrigé de l'exercice 18

Posons $c = \cos\varphi \in [0,1]$.

1. La somme des racines est $3c + 1 + ic = 2c + (c + 1 + ic)$ et leur produit est $2c(c + 1 + ic)$: les racines sont donc $z_1 = 2c = 2\cos\varphi$, qui est réelle, et $z_2 = \cos\varphi + 1 + i\cos\varphi$.

(On le vérifie : $(2c)^2 - (3c + 1 + ic)(2c) + 2c(c + 1 + ic) = 4c^2 - 2c(2c) = 0$.)

2. a) $z_1 = 2\cos\varphi$ décrit $[0,2]$: M_1 décrit le segment $[OI]$, où I est le point d'affixe 2.

b) $z_2 - z_1 = 1 - c + ic$, donc $M_1M_2^2 = (1-c)^2 + c^2 = 2c^2 - 2c + 1$ et $2M_1M_2^2 = 4c^2 - 4c + 2 = 1 + (2c-1)^2$.

c) Pour $c \in [0,1]$, $2c - 1 \in [-1,1]$: $(2c-1)^2$ est maximal pour $c = 0$ ou $c = 1$. La distance est maximale (égale à 1) pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $\varphi = 0$.

d) $OM_1 = 2c$ et $M_1M_2^2 = 2c^2 - 2c + 1$. $OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow 4c^2 = 2c^2 - 2c + 1 \Leftrightarrow 2c^2 + 2c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. Seule $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ appartient à $[0,1]$; le triangle n'est alors pas aplati ($\mathrm{Im}z_2 \neq 0$).

Corrigé de l'exercice 19

Posons $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1. Le triangle BAM est équilatéral avec $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{3}$: $BM = BA$ et $\arg\frac{m-b}{a-b} \equiv \frac{\pi}{3}$, donc $\frac{m-b}{a-b} = \omega$, soit $m = \omega(a-b) + b$. On obtient de même les trois autres relations.

2. a) $n - m = \omega(c-b) - \omega(a-b) = \omega(c-a)$ et $p - q = \omega(c-d) - \omega(a-d) = \omega(c-a)$. Donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$: $MNPQ$ est un parallélogramme.

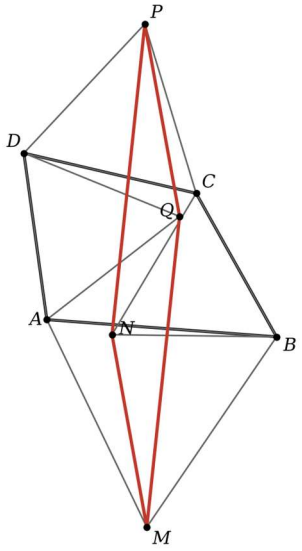
b) • $\frac{p-q}{c-a} = \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$: $QP = AC$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{QP}) \equiv \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

• $p-n=\omega(c-d)+d-\omega(c-b)-b=(d-b)(1-\omega)$, et $1-\omega=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Donc $\frac{d-b}{p-n}=e^{i\frac{\pi}{3}}$: $NP=BD$ et $\left(\overrightarrow{NP},\overrightarrow{BD}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

3. Le parallélogramme $MNPQ$ est un carré si, et seulement si, $\frac{p-n}{m-n}=\pm i$ (côtés consécutifs perpendiculaires et de même longueur). Or $m-n=-\omega(c-a)$ et $p-n=\overline{\omega}(d-b)$, donc

$$\frac{p-n}{m-n}=-\overline{\omega}^{\,2}\,\frac{d-b}{c-a}=e^{i\frac{\pi}{3}}\,\frac{d-b}{c-a}\qquad\left(\text{car }-e^{-i\frac{2\pi}{3}}=e^{i\frac{\pi}{3}}\right).$$

La condition s'écrit $\frac{d-b}{c-a}=\pm i\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$, c'est-à-dire $\frac{d-b}{c-a}=e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)}$: $BD=AC$ et $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)\equiv\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.



Exercice 19 : le parallélogramme $MNPQ$.

Corrigé de l'exercice 20

$|z+z'|^2=(z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right)=|z|^2+|z'|^2+2\text{Re}\left(z\overline{z'}\right)$ et $(|z|+|z'|)^2=|z|^2+|z'|^2+2\left|z\overline{z'}\right|$. Les deux membres étant positifs :

$$|z+z'|=|z|+|z'|\Leftrightarrow\text{Re}\left(z\overline{z'}\right)=\left|z\overline{z'}\right|\Leftrightarrow z\overline{z'}\text{ est un réel positif.}$$

Comme $z\overline{z'}\neq 0$, cela équivaut à $\arg\left(z\overline{z'}\right)\equiv 0$, soit $\arg z-\arg z'\equiv 0\ [2\pi]$.

Corrigé de l'exercice 21

1. O est le centre du cercle circonscrit : $OA=OB=OC$, soit $|a|=|b|=|c|$.

2. a) $\overline{w}=b\overline{c}-\overline{b}c=-w$, donc $w+\overline{w}=0$: w est imaginaire pur.

b) $(b+c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right)=|b|^2-b\overline{c}+\overline{b}c-|c|^2=w$ puisque $|b|=|c|$: c'est un imaginaire pur. Et $\frac{b+c}{b-c}=\frac{(b+c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right)}{|b-c|^2}=\frac{w}{|b-c|^2}$ est aussi imaginaire pur.

3. a) $\overrightarrow{AH}$ a pour affixe $h-a=b+c$; $\overrightarrow{CB}$ a pour affixe $b-c$.

b) Si $b+c=0$, alors $H=A$. Sinon, $\frac{b+c}{b-c}$ est un imaginaire pur non nul, donc $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AH}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$: $(AH)\perp(BC)$. Dans tous les cas, H appartient à la hauteur issue de A.

c) L'expression $h = a + b + c$ est symétrique en a, b, c : le même raisonnement montre que H appartient aux hauteurs issues de B et de C. H est donc l'orthocentre du triangle ABC.

Corrigé de l'exercice 22

On remarque que $\overline{z} + i = \overline{z - i}$, non nul pour $z \neq i$, et que $z' - i = \frac{2}{\overline{z-i}}$.

1. a) $f(1) = i + \frac{2}{1+i} = i + 1 - i = 1$; $f(2+i) = i + \frac{2}{2-i+i} = 1 + i$.

b) $f(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\overline{z}+i} = -i \Leftrightarrow \overline{z} + i = 2i \Leftrightarrow \overline{z} = i \Leftrightarrow z = -i$.

2. a) $(z' - i)(\overline{z} + i) = 2$, donc $\arg[(z' - i)(\overline{z} + i)] \equiv 0\ [2\pi]$.

b) $\arg(z' - i) \equiv -\arg(\overline{z - i}) \equiv \arg(z - i)$: $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}\right) \equiv \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right)$. Les points A, M, M' sont alignés et M' appartient à la demi-droite $[AM)$. De plus $AM \times AM' = 2$.

3. a) $z' \neq i$, donc $T(M')$ existe. $\overline{z'} + i = \overline{z' - i} = \frac{2}{z-i}$, donc $z'' = i + \frac{2}{\overline{z'}+i} = i + (z - i) = z$.

b) $T \circ T$ est l'identité du plan privé de A : T est une involution (bijection égale à sa réciproque).

4. a) $z' = z \Leftrightarrow z - i = \frac{2}{\overline{z-i}} \Leftrightarrow |z - i|^2 = 2 \Leftrightarrow AM = \sqrt{2}$.

b) (J) est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

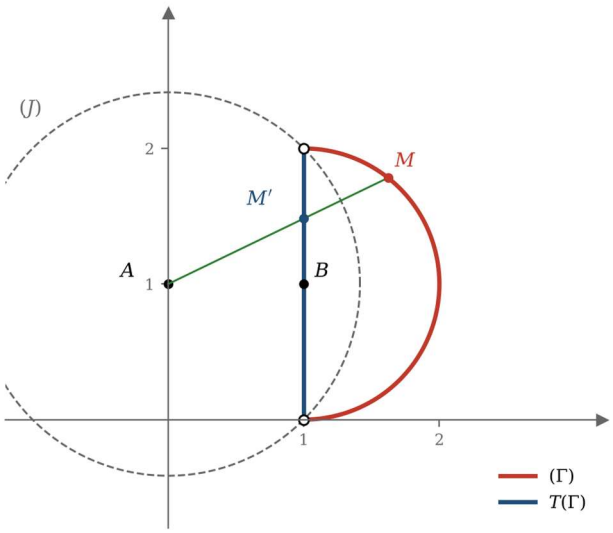
5. a) $z - (1 + i) = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: (Γ) est le demi-cercle de centre B et de rayon 1 formé des points d'abscisse strictement supérieure à 1 (extrémités 1 et $1 + 2i$ exclues).

b) $z - i = 1 + e^{i\theta}$, donc $\overline{z - i} = 1 + e^{-i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{\theta}{2}}$ et

$$z' - i = \frac{2}{2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{\theta}{2}}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}} = 1 + i\tan\frac{\theta}{2}.$$

c) $z' = 1 + i\left(1 + \tan\frac{\theta}{2}\right)$: M' appartient à la droite (L) d'équation $x = 1$.

d) Lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan\frac{\theta}{2}$ décrit $]-1,1[$: $T(\Gamma)$ est le segment ouvert d'extrémités les points d'affixes 1 et $1 + 2i$.



Exercice 22 : (Γ), son image $T(\Gamma)$ et le cercle (J) des points invariants.

Corrigé de l'exercice 23

On écrit $f(z) = \frac{z-1}{iz-1}$.

1. Soit $z \neq -i$ et $w = f(z)$. $w = -i$ équivaudrait à $z - 1 = -i(iz - 1) = z + i$, impossible : $w \neq -i$ et $f(w)$ existe. On calcule $w - 1 = \frac{z-1-iz+1}{iz-1} = \frac{(1-i)z}{iz-1}$ et $iw - 1 = \frac{iz-i-iz+1}{iz-1} = \frac{1-i}{iz-1}$, d'où $f(w) = \frac{w-1}{iw-1} = z$.

Ainsi $f \circ f$ est l'identité de $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$: f est bijective et $f^{-1} = f$.

2. a) $z' + i = \frac{z-1+i(iz-1)}{iz-1} = \frac{-(1+i)}{i(z+i)} = \frac{i(1+i)}{z+i} = \frac{-1+i}{z+i}$.

b) $(z' + i)(z + i) = -1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$. En prenant les modules : $BM' \times BM = \sqrt{2}$; en prenant les arguments : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{BM}\right) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

3. • La droite (D) passe par $B(0, -1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} + \vec{v}$. Pour $M \in (D)\backslash\{B\}$: $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]$, donc $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}\right) \equiv \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$: M' appartient à l'axe des ordonnées, privé de B. Comme $BM' = \frac{\sqrt{2}}{BM}$ prend toutes les valeurs strictement positives sur chacune des deux demi-droites, l'image de $(D)\backslash\{B\}$ est l'axe des ordonnées privé de B.

• Si $BM = 1$, alors $BM' = \sqrt{2}$, et lorsque $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM}\right)$ décrit toutes les valeurs, $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}\right)$ aussi : l'image de (C) est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

Corrigé de l'exercice 24

1. Posons $z = iy$, y réel : $f(iy) = \left(2\sqrt{3}y^2 + 4\sqrt{3}y\right) + i(-y^3 - 2y^2 + 4y + 8)$. La partie réelle s'annule pour $y = 0$ ou $y = -2$; la partie imaginaire s'annule pour $y = -2$ $(8 - 8 - 8 + 8 = 0)$ et non pour $y = 0$. Donc $z_0 = -2i$.

2. $f(z) = (z + 2i)(z^2 + bz + c)$ avec $b + 2i = 2i - 2\sqrt{3}$ et $2ic = 8i$, soit $b = -2\sqrt{3}$, $c = 4$ (on vérifie $c + 2ib = 4 - 4i\sqrt{3}$). $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 : \Delta' = 3 - 4 = -1$, d'où $z = \sqrt{3} \pm i$.

$S = \left\{-2i,\ \sqrt{3} - i,\ \sqrt{3} + i\right\}$, avec $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$.

3. $\omega = \frac{\sqrt{3}-i}{-2i} = \frac{(\sqrt{3}-i)i}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

4. $\omega - 1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega^2$, donc $\omega z - \omega^2 z = -\omega z(\omega - 1) = -\omega^3 z = z$: $\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{OM}$, le quadrilatère OMM_1M_2 est un parallélogramme. De plus $OM = |z|$ et $MM_1 = |\omega - 1|\,|z| = |z|$: deux côtés consécutifs sont égaux. OMM_1M_2 est un losange.

Corrigé de l'exercice 25

On pose $z = x + iy$: $z' = (2 + i)(x - iy) + 1 - 3i = (2x + y + 1) + i(x - 2y - 3)$.

1. M est invariant $\Leftrightarrow x = 2x + y + 1$ et $y = x - 2y - 3 \Leftrightarrow x + y = -1$ et $x - 3y = 3 \Leftrightarrow (x, y) = (0, -1)$. $A(0, -1)$ est l'unique point invariant.

2. $z' = (2 + i)\overline{z} + 1 - 3i \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{z'-1+3i}{2+i} \Leftrightarrow z = \frac{\overline{z'}-1-3i}{2-i} = \frac{2+i}{5}\left(\overline{z'} - 1 - 3i\right)$. Tout point M' a un unique antécédent : s est bijective et s^{-1} associe au point d'affixe z le point d'affixe $\frac{2+i}{5}\overline{z} + \frac{1-7i}{5}$.

3. $z' + i = (2 + i)\overline{z} + 1 - 2i = (2 + i)(\overline{z} - i) = (2 + i)\overline{(z + i)}$, donc $AM' = |2 + i| \times AM = \sqrt{5}\, AM$.

4. ${z_2}' - {z_1}' = (2+i)\overline{(z_2 - z_1)}$ et ${z_3}' - {z_1}' = (2+i)\overline{(z_3 - z_1)}$, donc $\frac{{z_3}'-{z_1}'}{{z_2}'-{z_1}'} = \overline{\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)}$. En prenant les arguments : $\left(\overrightarrow{{M_1}'{M_2}'}, \overrightarrow{{M_1}'{M_3}'}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right)\ [2\pi]$ (s change les angles orientés en leurs opposés).

5. $\arg(z') \equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow z'$ est un réel strictement positif $\Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0$ et $2x + y + 1 > 0$. Sur la droite $x = 2y + 3$, $2x + y + 1 = 5y + 7 > 0 \Leftrightarrow y > -\frac{7}{5}$. L'ensemble cherché est la demi-droite ouverte d'origine $E\left(\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}\right)$, portée par la droite d'équation $x - 2y - 3 = 0$ et formée des points d'ordonnée supérieure à $-\frac{7}{5}$.

6. $(z')^3 = 1 \Leftrightarrow z' \in \{1, j, j^2\}$ (exercice 4). D'après 2., $z = \frac{2+i}{5}\left(\overline{z'} - 1 - 3i\right)$.

• $z' = 1 : z = \frac{(2+i)(-3i)}{5} = \frac{3-6i}{5}$.

• $z' = j, \overline{z'} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} : z = \frac{\sqrt{3}}{10} - \frac{15+2\sqrt{3}}{10}\,i$.

• $z' = j^2, \overline{z'} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} : z = -\frac{\sqrt{3}}{10} - \frac{15-2\sqrt{3}}{10}\,i$.

L'ensemble cherché est formé de ces trois points.

Corrigé de l'exercice 26

β est une racine septième de l'unité distincte de 1 : $\beta^7 = 1$, $\frac{1}{\beta^k} = \beta^{7-k}$ et $1 + \beta + \beta^2 + \cdots + \beta^6 = \frac{1-\beta^7}{1-\beta} = 0$. De plus β^2, β^4, β^6 sont différents de -1 (sinon $\beta^{14} = 1$ donnerait $(-1)^7 = 1$), donc les dénominateurs sont non nuls.

En divisant numérateur et dénominateur par β^k : $\frac{\beta^k}{1+\beta^{2k}} = \frac{1}{\beta^{-k}+\beta^k}$. Posons

$$A = \beta + \beta^6, \qquad B = \beta^2 + \beta^5, \qquad C = \beta^3 + \beta^4.$$

La somme cherchée est $S = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{AB+BC+CA}{ABC}$.

• $AB = \beta^3 + \beta^6 + \beta + \beta^4$, $BC = \beta^5 + \beta^6 + \beta + \beta^2$, $CA = \beta^4 + \beta^5 + \beta^2 + \beta^3$ (en réduisant les exposants modulo 7). Donc $AB + BC + CA = 2(\beta + \beta^2 + \cdots + \beta^6) = -2$.

• $ABC = A \times BC = (\beta + \beta^6)(\beta^5 + \beta^6 + \beta + \beta^2) = \beta^6 + 1 + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \beta^5 + 1 + \beta = 2 + (-1) = 1$.

Donc $S = \frac{-2}{1} = -2$.

Corrigé de l'exercice 27

On se place dans un repère orthonormé direct d'origine O ; soit a, b, c les affixes de A, B, C et $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Les points A', B', C' ont pour affixes ωa, ωb, ωc, et

$$u = \frac{\omega a + b}{2}, \qquad v = \frac{\omega b + c}{2}, \qquad w = \frac{\omega c + a}{2}.$$

Avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, on a $\omega = -j^2$ (car $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -e^{i\frac{\pi}{3}}$). Calculons

$$2(u + jv + j^2 w) = a(\omega + j^2) + b(1 + j\omega) + c(j + j^2\omega).$$

Or $\omega + j^2 = 0$, $1 + j\omega = 1 - j^3 = 0$ et $j + j^2\omega = j - j^4 = 0$. Donc $u + jv + j^2 w = 0$.

D'après l'exercice 4 (question 5), le triangle UVW est équilatéral (direct), lorsque les trois points sont distincts.

Remarque. Le résultat n'utilise pas le fait que A, B, C sont sur un même cercle de centre O. Les points U, V, W sont confondus dans le seul cas où ABC est équilatéral indirect.

Corrigé de l'exercice 28

1. a) $\Delta' = \cos^2\alpha - 1 = (i\sin\alpha)^2$: les solutions sont $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$.

b) $z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1 = 0 \Leftrightarrow z^n = e^{i\alpha}$ ou $z^n = e^{-i}$. Les solutions sont

$$e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}} \quad \text{et} \quad e^{-i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}, \qquad k \in \{0,1,\dots,n-1\}.$$

2. a) $P_\alpha(z) = \left(z^n - e^{i\alpha}\right)\left(z^n - e^{-i\alpha}\right)$. Posons $\theta_k = \frac{\alpha+2k\pi}{n}$. Les racines n-ièmes de $e^{i\alpha}$ sont les $e^{i\theta_k}$ et celles de $e^{-i\alpha}$ sont leurs conjugués, donc

$$z^n - e^{i\alpha} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(z - e^{i\theta_k}\right), \qquad z^n - e^{-i} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(z - e^{-i\theta_k}\right).$$

En regroupant les facteurs conjugués : $\left(z - e^{i\theta_k}\right)\left(z - e^{-i\theta_k}\right) = z^2 - 2\cos(\theta_k)z + 1$, d'où la factorisation.

b) $P_\alpha(1) = 2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$. D'après a), $P_\alpha(1) = \prod_{k=0}^{n-1}(2 - 2\cos\theta_k) = \prod_{k=0}^{n-1} 4\sin^2\frac{\theta_k}{2} = 4^n\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha+2k\pi}{2n}\right)$. En divisant par 4^n :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha+2k\pi}{2n}\right) = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4^{n-1}}.$$

3. a) Pour $\alpha \in]0,\pi[$ et $0 \le k \le n-1$: $0 < \frac{\alpha+2k\pi}{2n} < \frac{(2n-1)\pi}{2n} < \pi$, donc tous les sinus sont strictement positifs. En prenant la racine carrée de l'égalité 2. b) :

$$\sin\frac{\alpha}{2n} \times H_n(\alpha) = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2^{n-1}}, \qquad \text{soit} \qquad 2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2n}}.$$

b) Lorsque $\alpha \to 0^+$: $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2n}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\frac{\alpha}{2n}}{\sin\frac{\alpha}{2n}} \times n \to n$. Donc $\lim_{\alpha\to 0} H_n(\alpha) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

c) D'autre part, H_n est un produit de fonctions continues de α, donc $\lim_{\alpha\to 0} H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$. Par unicité de la limite :

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Chapitre 11 — Isométries du plan, déplacements et antidéplacements



Cours • 15 exercices • Corrigés détaillés

Ce que vous devez savoir faire à la fin du chapitre
– Reconnaître une translation, une rotation, une symétrie orthogonale, une symétrie glissante et en donner les éléments caractéristiques.
– Décomposer une translation ou une rotation en produit de deux symétries orthogonales, et réduire une composée de symétries.
– Utiliser l'unicité du déplacement (ou de l'antidéplacement) qui envoie deux points distincts sur deux points donnés.
– Traduire une isométrie par son écriture complexe $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$ avec $|a| = 1$.
– Exploiter les isométries pour démontrer des égalités de distances, des orthogonalités, des alignements et des concours de droites.

Le plan P est orienté. Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 2, chapitres 2 et 3 : *Isométries du plan* ; *Déplacements – Antidéplacements*). Pour deux points M, N, on note $(\vec{u}, \vec{v})$ une mesure de l'angle orienté de deux vecteurs non nuls.

Cours

I. Isométries : définition et premières propriétés

Définition. On appelle **isométrie** du plan toute application f de P dans P qui conserve les distances : pour tous points M et N d'images M' et N', on a $M'N' = MN$.

Propriétés. Soit f une isométrie.
– f est une bijection de P sur P et f^{-1} est une isométrie ; la composée de deux isométries est une isométrie.
– f conserve le barycentre (en particulier le milieu), l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, les aires et les mesures des angles géométriques.
– L'image d'une droite est une droite, celle d'un segment $[AB]$ est le segment $[f(A)f(B)]$, celle d'un cercle de centre I et de rayon R est le cercle de centre $f(I)$ et de rayon R.

Les isométries de référence (rappels) :

Isométrie	Notation	Définition de $M' = f(M)$	Points fixes
Translation de vecteur $\vec{u}$	$t_{\vec{u}}$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	aucun si $\vec{u} \neq \vec{0}$
Rotation de centre I, d'angle θ	$R_{(I,\theta)}$	$IM' = IM$ et $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$ si $M \neq I$	$\{I\}$ si $\theta \not\equiv 0$
Symétrie centrale de centre I	S_I	I milieu de $[MM']$; c'est $R_{(I,\pi)}$	$\{I\}$
Symétrie orthogonale d'axe Δ	S_Δ	Δ médiatrice de $[MM']$ si $M \notin \Delta$	la droite Δ

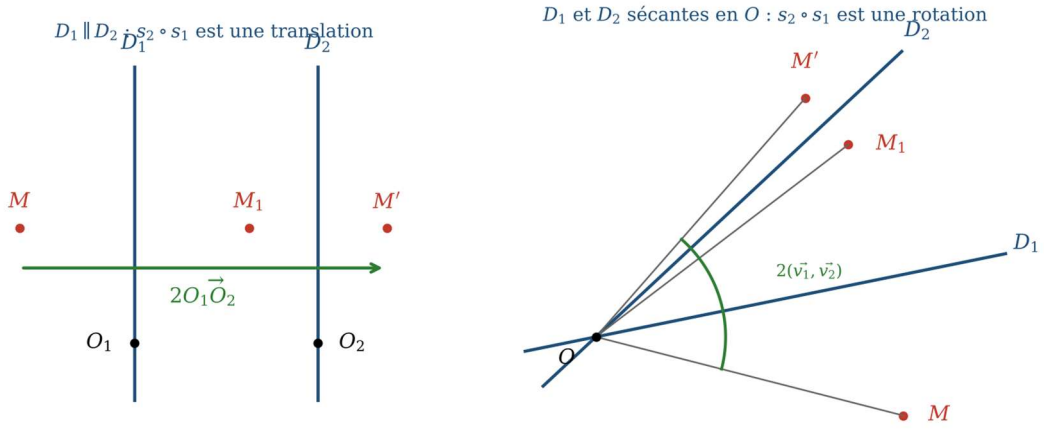
II. Isométries et points fixes

Théorème 1 (points fixes). Soit f une isométrie.
– Si f fixe deux points distincts A et B, alors f fixe tout point de la droite (AB) : f est l'identité ou la symétrie $S_{(AB)}$.
– Si f fixe trois points non alignés, alors $f = \mathrm{id}_P$.

Théorème 2. Une isométrie est entièrement déterminée par les images de trois points non alignés : si deux isométries f et g coïncident en trois points non alignés, alors $f = g$.
Conséquence. Une isométrie qui fixe un point O est soit l'identité, soit une rotation de centre O, soit une symétrie orthogonale d'axe passant par O.

III. Composée de deux symétries orthogonales

Théorème 3. Soit D_1 et D_2 deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.
– Si $D_1 \parallel D_2$: $S_{D_2} \circ S_{D_1} = t_{2\overrightarrow{O_1O_2}}$, où $O_1 \in D_1$, $O_2 \in D_2$ et $(O_1O_2) \perp D_1$.
– Si D_1 et D_2 sont sécantes en O : $S_{D_2} \circ S_{D_1} = R_{(O,\,2(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}))}$.
– En particulier, si $D_1 \perp D_2$ en O : $S_{D_2} \circ S_{D_1} = S_{D_1} \circ S_{D_2} = S_O$.



Composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles (à gauche) ou sécants (à droite).

Méthode — décomposer. Réciproquement :

– toute translation $t_{\vec{u}}$ s'écrit $S_{D_2} \circ S_{D_1}$ où D_1 est n'importe quelle droite orthogonale à $\vec{u}$ et $D_2 = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(D_1)$;
– toute rotation $R_{(O,\theta)}$ s'écrit $S_{D_2} \circ S_{D_1}$ où D_1 est n'importe quelle droite passant par O et D_2 la droite passant par O telle que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \equiv \frac{\theta}{2}\ [\pi]$.
On choisit D_1 (ou D_2) de façon à **simplifier** une composée : deux symétries identiques consécutives s'annulent, car $S_\Delta \circ S_\Delta = \mathrm{id}_P$.

Théorème 4. Toute isométrie du plan est la composée d'au plus trois symétries orthogonales.

IV. Déplacements et antidéplacements

Définitions. Un **déplacement** est une isométrie qui conserve les mesures des angles orientés ; c'est la composée d'un nombre pair de symétries orthogonales. Un **antidéplacement** est une isométrie qui change toute mesure d'angle orienté en son opposée ; c'est la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales.

Théorème 5 (classification).
– Les déplacements sont les translations et les rotations (l'identité étant la translation de vecteur nul).
– Les antidéplacements sont les symétries orthogonales et les symétries glissantes.
– La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement ; la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Angle d'un déplacement. Soit f un déplacement. Il existe un réel θ tel que, pour tous points $M \neq N$ d'images M', N' : $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$. On l'appelle **angle** de f.
– Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, f est une translation ; sinon, f est une rotation d'angle θ.
– Si f et g sont des déplacements d'angles θ et θ', alors $g \circ f$ est un déplacement d'angle $\theta + \theta'$.

Théorème 6 (unicité). Soit A, B, C, D quatre points tels que $AB = CD \neq 0$.
– Il existe un **unique déplacement** f tel que $f(A) = C$ et $f(B) = D$; son angle est $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$.
– Il existe un **unique antidéplacement** g tel que $g(A) = C$ et $g(B) = D$.

Méthode — trouver le centre d'une rotation. Si la rotation f, d'angle $\theta \not\equiv 0$, envoie A sur C et B sur D, son centre Ω vérifie $\Omega A = \Omega C$ et $\Omega B = \Omega D$: il appartient aux médiatrices de $[AC]$ et de $[BD]$. Il vérifie aussi $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$: un arc capable permet souvent de l'identifier sur un cercle.

V. Symétries glissantes

Théorème et définition. On appelle **symétrie glissante** la composée $t_{\vec{u}} \circ S_D$ d'une symétrie orthogonale et d'une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul **directeur de** D. On a alors

$$f = t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}.$$

Le couple $(D, \vec{u})$ est unique : c'est la **forme réduite** de f ; D est l'**axe** et $\vec{u}$ le **vecteur** de f.

Propriétés. Soit f une symétrie glissante d'axe D et de vecteur $\vec{u}$, et $M' = f(M)$.
– f n'a aucun point fixe ; $f \circ f = t_{2\vec{u}}$.

– Le milieu de $[MM']$ appartient à D ; si $M \in D$, alors $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
– Un antidéplacement qui possède un point fixe est une symétrie orthogonale ; un antidéplacement sans point fixe est une symétrie glissante.

Méthode — réduire $t_{\vec{w}} \circ S_\Delta$ ($\vec{w}$ quelconque). On écrit $\vec{w} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$ avec $\overrightarrow{w_1}$ orthogonal à Δ et $\overrightarrow{w_2}$ directeur de Δ. Alors $t_{\overrightarrow{w_1}} \circ S_\Delta = S_D$ où $D = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w_1}}(\Delta)$, et $t_{\vec{w}} \circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{w_2}} \circ S_D$: c'est S_D si $\overrightarrow{w_2} = \vec{0}$, sinon la symétrie glissante d'axe D et de vecteur $\overrightarrow{w_2}$.

VI. Écritures complexes

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; $M(z)$ a pour image $M'(z')$.

Théorème 7.
– f est un **déplacement** si et seulement si son écriture complexe est $z' = az + b$ avec $|a| = 1$. Si $a = 1$, c'est la translation de vecteur d'affixe b ; si $a = e^{i\theta} \neq 1$, c'est la rotation d'angle θ et de centre le point d'affixe $\frac{b}{1-a}$.
– f est un **antidéplacement** si et seulement si son écriture complexe est $z' = a\overline{z} + b$ avec $|a| = 1$.

Attention. $R_{(I,\theta)} \circ R_{(J,\theta')}$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$ si $\theta + \theta' \not\equiv 0\ [2\pi]$, mais une **translation** si $\theta + \theta' \equiv 0\ [2\pi]$. Pour en trouver le centre (ou le vecteur), on cherche l'image d'un point bien choisi, ou on décompose chaque rotation à l'aide de la droite (IJ).

Exercices

Exercice 1

Soit ABC un triangle direct. On construit, extérieurement à ABC, les triangles équilatéraux $AB'C$, ABC' et $A'BC$.

1. Montrer que $AA' = BB' = CC'$.
2. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

Exercice 2

$ABCD$ est un rectangle non carré de centre O. On note Δ_1 la médiatrice de $[AB]$, Δ_2 la médiatrice de $[AD]$, et S_1, S_2 les symétries orthogonales d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2.

1. Soit f une isométrie qui laisse globalement invariant le rectangle $ABCD$. Montrer que $f(O) = O$.
2. Déterminer toutes les isométries du plan qui laissent globalement invariant le rectangle $ABCD$.

Exercice 3

On considère un triangle équilatéral direct ABC de centre O.

1. Déterminer les isométries du plan qui laissent globalement invariant l'ensemble $\{A, B, C\}$.
2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$; on pose $A' = r(A)$, $B' = r(B)$, $C' = r(C)$. Soit f une isométrie qui transforme $\{A, B, C\}$ en $\{A', B', C'\}$; on pose $g = r^{-1} \circ f$.
   a. Montrer que g est une isométrie qui laisse $\{A, B, C\}$ globalement invariant.

b. Déterminer toutes les isométries qui transforment $\{A, B, C\}$ en $\{A', B', C'\}$.

Exercice 4

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre de gravité O, $D = S_{(BC)}(O)$ et $E = S_{(BA)}(O)$.

1. Montrer que A, B, C et D appartiennent à un même cercle.
2. Caractériser $S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$ et $S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$.
3. Déterminer les droites Δ et Δ' telles que $R_{\left(D,-\frac{2\pi}{3}\right)} = S_{\Delta} \circ S_{(OA)}$ et $R_{\left(A,\frac{2\pi}{3}\right)} = S_{(OA)} \circ S_{\Delta'}$.

Exercice 5

Soit IAB et JAC deux triangles rectangles isocèles respectivement en I et en J, tels que $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Soit K le milieu de $[BC]$.

1. On note r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et r' la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   a. Déterminer $r' \circ r(B)$.
   b. Caractériser $r' \circ r$.
2. On appelle L l'image de I par r'. Que représente K pour le segment $[IL]$? En déduire la nature du triangle IJK.

Exercice 6

Soit ABC un triangle direct. On construit à l'extérieur de ce triangle les triangles ARB, BPC et CQA, rectangles isocèles respectivement en R, P et Q. On note I, J, K les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$, et r_P, r_Q, r_R les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs P, Q, R.

1.
   a. Montrer que $r_P \circ r_Q = S_I$.
   b. En déduire que IPQ est un triangle rectangle isocèle.
2.
   a. Démontrer que $r_Q \circ r_R = S_K$ et $r_R \circ r_P = S_J$.
   b. En déduire que KQR et JPR sont des triangles rectangles isocèles.
3. Démontrer que les droites (QB), (RC) et (AP) sont concourantes.

Exercice 7

On considère un triangle ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $AB < AC$. On désigne par ζ le cercle circonscrit au triangle ABC et par O son centre. Soit E le milieu de $[BC]$ et P le point de $[AC]$ tel que $CP = AB$. La droite (OE) coupe ζ en I et J, J et A étant sur le même arc $\overset{\frown}{BC}$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer les ensembles :
   a. $\gamma = \left\{M \in P \ / \ \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]\right\}$;
   b. $\nu = \left\{M \in P \ / \ \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \text{ et } MB < MC\right\}$.
3.
   a. Justifier qu'il existe une unique rotation R telle que $R(A) = P$ et $R(B) = C$. Déterminer son angle.
   b. Démontrer que le centre de R est un point de ζ que l'on précisera.

c. Quelle est la nature du triangle JAP ?

4. Soit $f = R \circ S_B$. Déterminer $f(B)$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 8

On considère un carré direct $ABCD$ de centre I. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$, R_D la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$, R_1 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\frac{3\pi}{4}$. On pose $f = t \circ R_D$, $g_1 = R_1 \circ f$ et $g_2 = R_2 \circ f$.

1.
   a. Déterminer $f(D)$ et $f(A)$.
   b. Démontrer que f est une rotation dont on précisera le centre.
2.
   a. Déterminer $g_1(D)$ et $g_2(D)$.
   b. Montrer que $g_2 \circ g_1^{-1} = R_2 \circ R_1^{-1}$.
   c. Soit $A_1 = g_1(A)$ et $A_2 = g_2(A)$. Montrer que A est le milieu de $[A_1A_2]$.

Exercice 9

On considère un triangle équilatéral direct ABC. La médiatrice du segment $[AB]$ recoupe en D le cercle ζ circonscrit au triangle ABC. La droite (BD) coupe (AC) en A'.

1. Prouver que le triangle CBA' est rectangle en B et que la droite (AD) est la médiatrice du segment $[CA']$.
2. Soit $f = S_{(BD)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.
   a. Déterminer l'image de A par f.
   b. Montrer que f est une translation dont on déterminera le vecteur.

Exercice 10

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère l'application f qui à tout point $M(x\,;y)$ associe le point $M'(x'\,;y')$ tel que

$$x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5}, \qquad y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5}.$$

1.
   a. Exprimer $z' = x' + iy'$ en fonction de $z = x + iy$ ou de $\overline{z}$.
   b. L'application f est-elle un déplacement ou un antidéplacement ? Pourquoi ?
   c. Quel est l'ensemble des points invariants par f ? Conclure.
2.
   a. Démontrer que $f \circ f$ est une translation ; on note $2\vec{v}$ son vecteur.
   b. Déterminer la droite D telle que $f = s \circ t = t \circ s$, où t est la translation de vecteur $\vec{v}$ et s la symétrie d'axe D.
   c. Vérifier que $\vec{v}$ est un vecteur directeur de D.

Exercice 11

Soit ABC un triangle direct, rectangle en A, et $f = S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$.

1. Montrer que f est un antidéplacement.
2. Montrer que f est une symétrie glissante.

3. Donner la forme réduite de f.

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Pour un paramètre complexe a, on considère l'application f_a qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = -\overline{z} + 2a + 2i.$$

1. Montrer que f_a est une isométrie.
2. Montrer que f_a est un antidéplacement.
3. Déterminer l'ensemble des points fixes de f_a.
4. Identifier alors f_a.

Exercice 13

Soit ABC un triangle direct. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés $ABDE$ et $ACFG$, ainsi que le parallélogramme $AGKE$. On note M le milieu de $[BC]$ et H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1.
   a. Montrer qu'il existe un déplacement f, dont on déterminera les éléments caractéristiques, transformant le triangle ABC en le triangle GKA (c'est-à-dire $f(A) = G, f(B) = K, f(C) = A$).
   b. Montrer que les points H, A, K sont alignés.
   c. Montrer que les droites (AM) et (EG) sont perpendiculaires.
2.
   a. Montrer que $FB = CK$.
   b. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CK}\right)$.
3.
   a. Montrer qu'il existe un déplacement g transformant le triangle ABC en le triangle EAK, et en déterminer les éléments caractéristiques.
   b. Prouver que $DC = BK$ et donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BK}\right)$.
4. Montrer que les droites (AK), (BF) et (CD) sont concourantes.

Exercice 14

Soit ABC un triangle tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, O le centre du cercle ζ circonscrit au triangle ABC et I le point d'intersection de ses bissectrices intérieures. Les points P et Q appartiennent respectivement aux demi-droites $[CA)$ et $[BA)$ et vérifient $CP = BQ = BC$.

1.
   a. Montrer que la droite (CI) est la médiatrice du segment $[PB]$ et que la droite (BI) est la médiatrice du segment $[CQ]$.
   b. Montrer que $\left(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{QB}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.
2. Soit f la rotation qui transforme C en Q et P en B.
   a. Montrer que f a pour centre I et pour angle $\frac{2\pi}{3}$.
   b. Montrer que $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.
   c. Montrer que les points I, P et Q sont alignés.
3. On pose $O_1 = f(O)$ et $O_2 = f(O_1)$.

a. Montrer que $O = f(O_2)$.

b. En déduire que le triangle OO_1O_2 est équilatéral et que la droite (OI) est la médiatrice du segment $[O_1O_2]$.

4. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, et $g = f \circ r \circ f$.

a. Montrer que g est une translation. Vérifier que $g(O_2) = O_1$ et en déduire le vecteur de g.

b. Montrer que $r(B) = C$. En déduire que $g(P) = Q$.

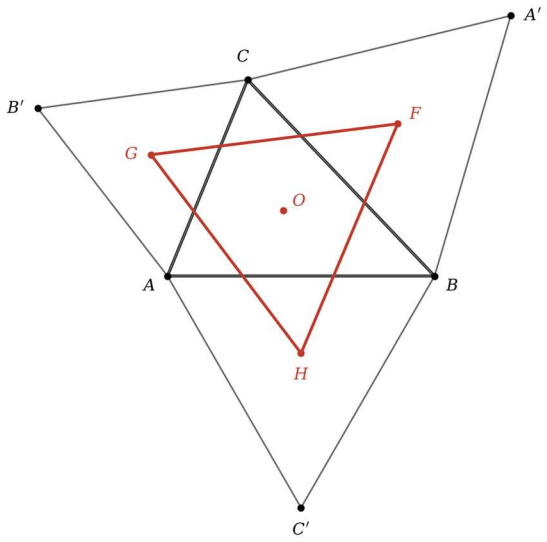
c. Montrer que les droites (OI) et (PQ) sont perpendiculaires.

Exercice 15 — Le théorème de Napoléon

On considère un triangle direct ABC de centre de gravité O. On construit à l'extérieur les triangles équilatéraux CBA', ACB' et BAC', de sorte que

$$\left(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B}\right) \equiv \left(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'C}\right) \equiv \left(\overrightarrow{C'B}, \overrightarrow{C'A}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi].$$

On désigne par F, G et H les centres respectifs des triangles CBA', ACB' et BAC'. Le but de l'exercice est de montrer, de deux façons différentes, que le triangle FGH est équilatéral direct.



Configuration du théorème de Napoléon.

1.

a. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer $R(C')$ et $R(C)$. En déduire que $CC' = BB'$ et que $\left(\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{BB'}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$.

b. Montrer que $\overrightarrow{HO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C'C}$ et $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BB'}$.

c. Montrer que $OH = OG$ et $\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OG}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3} \ [2\pi]$.

d. En déduire que FGH est équilatéral direct de centre O.

2. On note R_1, R_2 et R_3 les rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ de centres respectifs F, G et H.

a. Quelle est l'image de B par $f = R_1 \circ R_2 \circ R_3$? Déterminer la nature de f.

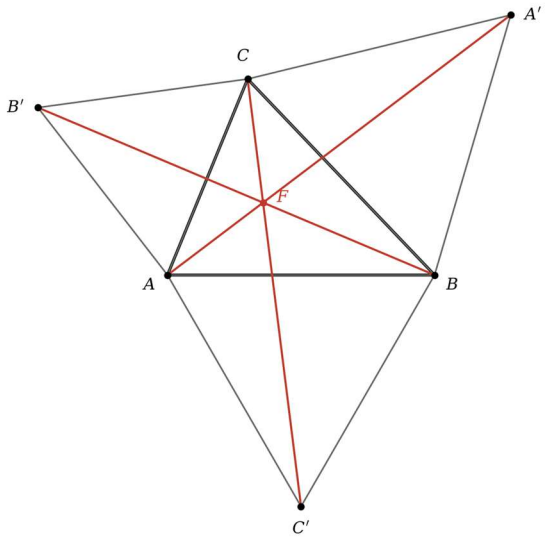
b. En déduire le centre et l'angle de la rotation $R_2 \circ R_3$.

c. On note S la symétrie orthogonale d'axe (GH). Déterminer les axes des symétries S_2 et S_3 telles que $R_2 = S_2 \circ S$ et $R_3 = S \circ S_3$. Montrer que ces axes se coupent en un point F' tel que $F'GH$ soit équilatéral direct.

d. Montrer que F' et F sont confondus et en déduire que FGH est équilatéral direct.

Corrigés détaillés

Corrigé de l'exercice 1



Triangles équilatéraux extérieurs : les droites (AA'), (BB'), (CC') concourent en F.

Le triangle ABC étant direct, la construction extérieure se traduit par :

$$C' = R_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)}(B), \qquad B' = R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(C), \qquad A' = R_{\left(B,-\frac{\pi}{3}\right)}(C).$$

Le triangle ACB' est donc direct, tandis que ABC' et BCA' sont indirects.

1. Soit $R = R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}$. On a $R(C') = B$ et $R(C) = B'$. Une rotation conservant les distances, $CC' = BB'$; de plus l'angle de R donne

$$\left(\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{BB'}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

De même, le triangle $BC'A$ étant équilatéral indirect, $A = R_{\left(B,-\frac{\pi}{3}\right)}(C')$, donc la rotation $R' = R_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}$ vérifie $R'(A) = C'$ et $R'(A') = C$. D'où $AA' = CC'$ et $\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{C'C}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Finalement $AA' = BB' = CC'$.

2. On travaille avec des angles orientés de droites (définis modulo π) et on utilise le critère de cocyclicité : quatre points M, N, U, V (trois à trois non alignés) sont cocycliques si et seulement si $(UM, UN) \equiv (VM, VN)\ [\pi]$.

Les droites (BB') et (CC') font un angle de $\frac{\pi}{3}$, donc elles sont sécantes ; soit F leur point d'intersection (dans la configuration générale, F est distinct des sommets).

– $(FC', FB) \equiv (CC', BB') \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi]$ et $(AC', AB) \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi]$: F appartient au cercle circonscrit à ABC'.

– $(FC, FB') \equiv (CC', BB') \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi]$ et $(AC, AB') \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi]$: F appartient au cercle circonscrit à ACB'.

Par le même critère sur ces deux cercles :

$$(FB, FA) \equiv (C'B, C'A) \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi], \qquad (FA, FC) \equiv (B'A, B'C) \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi].$$

Donc $(FB, FC) \equiv \frac{2\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3}\ [\pi]$. Or $(A'B, A'C) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [\pi]$ (BCA' est équilatéral indirect) : F appartient au cercle circonscrit à BCA'. Alors

$$(FA', FC) \equiv (BA', BC) \equiv \frac{\pi}{3} \equiv (FA, FC)\ [\pi],$$

donc les droites (FA') et (FA) sont confondues : $F \in (AA')$. Les trois droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en F (c'est le **point de Fermat** du triangle lorsque ses angles sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$).

Corrigé de l'exercice 2

Posons $AB = CD = a$, $AD = BC = b$ avec $a \neq b$; la diagonale vaut $\sqrt{a^2 + b^2}$, strictement plus grande que a et que b.

1. f permute les sommets A, B, C, D. Comme $f(A)$ et $f(C)$ sont deux sommets distants de $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$, ce sont deux sommets opposés. f conservant le milieu, $f(O)$ est le milieu de $[f(A)f(C)]$, c'est-à-dire le centre O. Donc $f(O) = O$.

2. f est déterminée par les images des trois points non alignés A, B, O (théorème 2), avec $f(O) = O$, $f(A)$ sommet et $f(B)$ sommet tel que $f(A)f(B) = a$.

– $f(A) = A$: le seul sommet à distance a de A est B, donc $f(B) = B$ et $f = \mathrm{id}_P$.

– $f(A) = B$: alors $f(B) = A$ ($BC = b \neq a$). S_1 échange A et B et fixe $O \in \Delta_1$, donc $f = S_1$.

– $f(A) = C$: alors $f(B) = D$; S_O convient, donc $f = S_O$.

– $f(A) = D$: alors $f(B) = C$; S_2 convient, donc $f = S_2$.

Réciproquement, ces quatre isométries laissent le rectangle invariant. **Conclusion :** $\{\mathrm{id}_P,\ S_O,\ S_1,\ S_2\}$, avec d'ailleurs $S_O = S_2 \circ S_1$ ($\Delta_1 \perp \Delta_2$ en O).

Corrigé de l'exercice 3

1. Une isométrie f qui laisse $\{A, B, C\}$ invariant conserve l'isobarycentre O : $f(O) = O$. Elle est déterminée par la permutation qu'elle induit sur $\{A, B, C\}$ (trois points non alignés) ; il y a au plus $3! = 6$ telles isométries, et les six suivantes conviennent :

$$\mathrm{id}_P, \qquad R_{\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)}, \qquad R_{\left(O, -\frac{2\pi}{3}\right)}, \qquad S_{(OA)}, \qquad S_{(OB)}, \qquad S_{(OC)}.$$

(Les rotations permutent circulairement les sommets ; $S_{(OA)}$ fixe A et échange B et C, etc.)

2. a. $g = r^{-1} \circ f$ est une isométrie comme composée d'isométries, et

$$g(\{A, B, C\}) = r^{-1}(\{A', B', C'\}) = \{A, B, C\}.$$

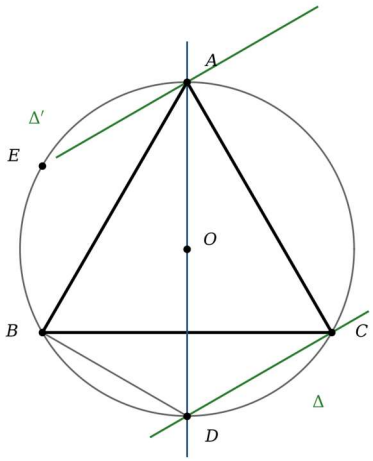
b. $f = r \circ g$ où g parcourt les six isométries de la question 1. On obtient :

– $r \circ \mathrm{id} = r = R_{\left(O, \frac{\pi}{3}\right)}$; $r \circ R_{\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)} = R_{(O,\pi)} = S_O$; $r \circ R_{\left(O, -\frac{2\pi}{3}\right)} = R_{\left(O, -\frac{\pi}{3}\right)}$;

– $r \circ S_{(OA)}$: en écrivant $r = S_{\Delta_A} \circ S_{(OA)}$ où Δ_A passe par O et fait l'angle $\frac{\pi}{6}$ avec (OA), on obtient $r \circ S_{(OA)} = S_{\Delta_A}$. Comme cette symétrie envoie A sur A', Δ_A est la médiatrice de $[AA']$. De même $r \circ S_{(OB)}$ et $r \circ S_{(OC)}$ sont les symétries d'axes les médiatrices de $[BB']$ et de $[CC']$.

Il y a donc six isométries : $R_{\left(O, \frac{\pi}{3}\right)}$, S_O, $R_{\left(O, -\frac{\pi}{3}\right)}$ et les symétries d'axes les médiatrices de $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$.

Corrigé de l'exercice 4



Exercice 4 : D est diamétralement opposé à A ; $\Delta = (DC)$ et Δ' est la parallèle à (DC) passant par A.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABC, de centre O et de rayon $R = OA$.

1. Dans le triangle équilatéral, O est situé sur la médiane issue de A aux deux tiers à partir de A ; sa distance à (BC) vaut $\frac{R}{2}$. Le symétrique D de O par rapport à (BC) est sur la droite (OA) (perpendiculaire à (BC)), au-delà de (BC), et $OD = 2 \times \frac{R}{2} = R$. Donc $D \in \mathcal{C}$: A, B, C, D sont cocycliques, et D est le point diamétralement opposé à A. (De même, E est le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à C.)

2. Les droites (DC) et (BD) se coupent en D :

$$S_{(BD)} \circ S_{(DC)} = R_{\left(D,\, 2(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB})\right)}.$$

Le quadrilatère $ABDC$ est inscrit et A, D sont sur des arcs opposés, donc $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}) \equiv (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) + \pi \equiv -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. D'où

$$S_{(BD)} \circ S_{(DC)} = R_{\left(D,\frac{4\pi}{3}\right)} = R_{\left(D,-\frac{2\pi}{3}\right)}.$$

De même, les droites (AB) et (CA) se coupent en A et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}$:

$$S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = R_{\left(A,\frac{2\pi}{3}\right)}.$$

3. *Droite Δ.* La droite (OA) passe par D. On cherche Δ passant par D telle que $2\big((OA),\Delta\big) \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, soit $\big((DA),\Delta\big) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [\pi]$. Or $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}) \equiv (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ (angles inscrits interceptant le même arc $\overset{\frown}{AC}$, B et D du même côté de (AC)). Donc $\boxed{\Delta = (DC)}$.

Droite Δ'. On cherche Δ' passant par A telle que $2\big(\Delta',(OA)\big) \equiv \frac{2\pi}{3}$, soit $\big(\Delta',(AD)\big) \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi]$. Comme $\big((DC),(DA)\big) \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi]$ et que deux droites parallèles font le même angle avec (AD), la droite $\boxed{\Delta' \text{ est la parallèle à } (DC) \text{ passant par } A}$. Puisque $[AD]$ est un diamètre, $(DC) \perp (AC)$: Δ' est aussi la perpendiculaire à (AC) en A.

Corrigé de l'exercice 5

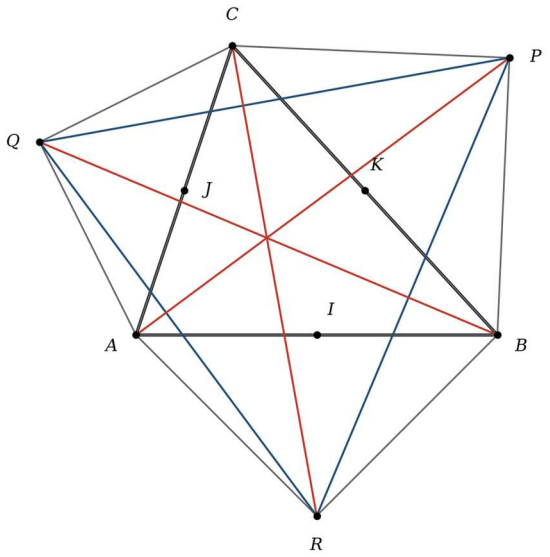
Remarque sur l'énoncé. La 1re édition indiquait des angles « 2π » ; il s'agit de $\frac{\pi}{2}$, comme l'impose le caractère rectangle isocèle des triangles.

1. a. $IB = IA$ et $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$, donc $r(B) = A$. De même $r'(A) = C$. Ainsi $r' \circ r(B) = C$.

b. $r' \circ r$ est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$: c'est une symétrie centrale. Elle envoie B sur C, donc son centre est le milieu K de $[BC]$: $r' \circ r = S_K$.

2. $r(I) = I$, donc $S_K(I) = r' \circ r(I) = r'(I) = L$: K **est le milieu de** $[IL]$. Le triangle IJL vérifie $JI = JL$ et $\left(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JL}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$: il est rectangle isocèle en J. La médiane $[JK]$ issue du sommet de l'angle droit est aussi hauteur et vaut la moitié de l'hypoténuse : $(JK) \perp (IL)$ et $KJ = KI = \frac{IL}{2}$. Donc IJK **est rectangle isocèle en** K.

Corrigé de l'exercice 6



Exercice 6 : les droites (AP), (BQ), (CR) sont les hauteurs du triangle PQR.

Le triangle ABC étant direct et les triangles construits extérieurement, on a (rotations d'angle $+\frac{\pi}{2}$) :

$$r_P(C) = B, \qquad r_Q(A) = C, \qquad r_R(B) = A.$$

1. a. $r_P \circ r_Q$ est un déplacement d'angle π, donc une symétrie centrale ; et $r_P \circ r_Q(A) = r_P(C) = B$. Son centre est le milieu I de $[AB]$: $r_P \circ r_Q = S_I$.

b. Soit $Q_1 = r_P(Q)$. Alors $S_I(Q) = r_P \circ r_Q(Q) = r_P(Q) = Q_1$: I est le milieu de $[QQ_1]$. Or $PQ = PQ_1$ et $\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ_1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$: PQQ_1 est rectangle isocèle en P et, comme à l'exercice 5, la médiane $[PI]$ donne : IPQ **est rectangle isocèle en** I.

2. a. $r_Q \circ r_R$ est d'angle π et $r_Q \circ r_R(B) = r_Q(A) = C$: $r_Q \circ r_R = S_K$. De même $r_R \circ r_P(C) = r_R(B) = A$: $r_R \circ r_P = S_J$.

b. Le raisonnement de 1.b, appliqué à $S_K = r_Q \circ r_R$ (avec le point R) puis à $S_J = r_R \circ r_P$ (avec le point P), montre que KQR **est rectangle isocèle en** K et JPR **est rectangle isocèle en** J.

Remarque sur l'énoncé. La 1re édition écrivait « KOR » : il s'agit du triangle KQR.

3. Considérons la rotation $\rho = R_{\left(J, -\frac{\pi}{2}\right)}$.

– Le triangle CQA est rectangle isocèle en Q et J est le milieu de $[AC]$: $JQ = JA$ et $(JQ) \perp (AC)$; le sens de la construction donne $\rho(A) = Q$.

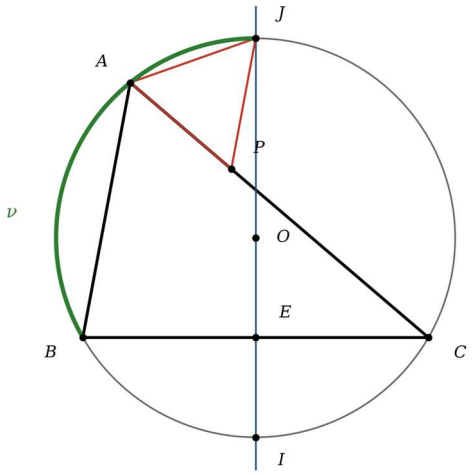
– D'après 2.b, JPR est rectangle isocèle en J ; l'égalité $S_J = r_R \circ r_P$ donne $S_J(P) = r_R(P) = P_1$: J est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle isocèle direct RPP_1, d'où $\left(\overrightarrow{JP}, \overrightarrow{JR}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}$: $\rho(P) = R$.

Donc ρ envoie le segment $[AP]$ sur $[QR]$: $AP = QR$ et $(AP) \perp (QR)$. De même (rotations de centres I et K), $(BQ) \perp (RP)$ et $(CR) \perp (PQ)$.

Ainsi (AP), (BQ) et (CR) sont les **hauteurs du triangle** PQR (issues de P, Q, R) : elles sont concourantes en l'orthocentre de PQR.

Corrigé de l'exercice 7

1. Figure :



Exercice 7 : arc ν (en vert), rotation R de centre J, triangle équilatéral JAP.

2. a. D'après le théorème de l'arc capable, puisque $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$:

$$\gamma = \text{l'arc } \overset{\frown}{BC} \text{ de } \zeta \text{ contenant } A, \text{ privé de } B \text{ et } C.$$

b. Pour $M \in \gamma$, $MB < MC$ signifie que M est du même côté que B de la médiatrice (IJ) de $[BC]$. Donc ν est l'arc $\overset{\frown}{BJ}$ de γ, privé de B et de J (en vert sur la figure). Puisque $AB < AC$, $A \in \nu$.

3. a. $AB = CP \neq 0$: d'après le théorème 6, il existe un unique déplacement R tel que $R(A) = P$ et $R(B) = C$; son angle est

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi],$$

car $P \in [AC]$, $P \neq C$, donc $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de même sens. L'angle n'étant pas nul, R est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b. Le centre Ω de R vérifie $\Omega B = \Omega C$ et $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$. Donc $\Omega \in \gamma$ et Ω appartient à la médiatrice (IJ) de $[BC]$. Or $\gamma \cap (IJ) = \{J\}$ (I est sur l'autre arc). Ainsi **le centre de R est J**.

c. $R(A) = P$ donne $JA = JP$ et $\left(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JP}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$: JAP **est équilatéral direct**.

4. $f(B) = R\left(S_B(B)\right) = R(B) = C$. f est la composée de deux déplacements d'angles $\frac{\pi}{3}$ et π : c'est un déplacement d'angle $\frac{4\pi}{3} \equiv -\frac{2\pi}{3}$, donc une rotation. Son centre Ω' vérifie $\Omega' B = \Omega' C$ et $\left(\overrightarrow{\Omega' B}, \overrightarrow{\Omega' C}\right) \equiv$

$-\frac{2\pi}{3}$. Le point I convient : $IB = IC$, et I et A étant sur des arcs opposés, $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \pi \equiv \frac{4\pi}{3} \equiv -\frac{2\pi}{3}$. Ce point est unique sur la médiatrice de $[BC]$. Donc

$$f = R \circ S_B = R_{\left(I, -\frac{2\pi}{3}\right)}.$$

Corrigé de l'exercice 8

On utilise le repère orthonormé direct $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$: $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$, $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; mais les raisonnements ci-dessous sont géométriques.

1. a. $f(D) = t\big(R_D(D)\big) = t(D) = A$. Le carré étant direct, $DA = DC$ et $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$, donc $R_D(A) = C$ et $f(A) = t(C) = C + \overrightarrow{DA}$. Comme $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$, $f(A) = B$.

b. f est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$, donc une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. La rotation $R_{\left(I, \frac{\pi}{2}\right)}$ envoie D sur A et A sur B (elle permute circulairement les sommets du carré direct : $A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto A$). Par unicité (théorème 6), $f = R_{\left(I, \frac{\pi}{2}\right)}$: **le centre de f est I**.

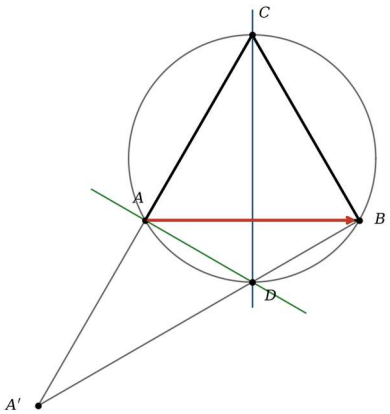
2. a. $g_1(D) = R_1\big(f(D)\big) = R_1(A) = A$ et $g_2(D) = R_2(A) = A$.

b. $g_1 = R_1 \circ f$ donne $g_1^{-1} = f^{-1} \circ R_1^{-1}$, d'où

$$g_2 \circ g_1^{-1} = R_2 \circ f \circ f^{-1} \circ R_1^{-1} = R_2 \circ R_1^{-1}.$$

c. $R_2 \circ R_1^{-1} = R_{\left(A, \frac{3\pi}{4}\right)} \circ R_{\left(A, \frac{\pi}{4}\right)} = R_{(A,\pi)} = S_A$. Or $g_2 \circ g_1^{-1}(A_1) = g_2(A) = A_2$, donc $A_2 = S_A(A_1)$: **A est le milieu de $[A_1A_2]$**.

Corrigé de l'exercice 9



Exercice 9 : f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1. La médiatrice de $[AB]$ passe par C et par le centre O de ζ : c'est la droite (CO), qui recoupe ζ au point D diamétralement opposé à C. $[CD]$ étant un diamètre, l'angle $\widehat{CBD}$ est droit : $(BD) \perp (BC)$, donc CBA' **est rectangle en** B. Dans ce triangle, $\widehat{BCA'} = \widehat{BCA} = \frac{\pi}{3}$, donc $CA' = \frac{CB}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2CB = 2CA$; comme A' est sur la demi-droite $[CA)$, A est le milieu de $[CA']$. Par ailleurs $\widehat{CAD}$ est droit ($[CD]$ diamètre), donc $(AD) \perp (CA')$ en son milieu A : (AD) **est la médiatrice de** $[CA']$.

2. a. $S_{(AB)}(A) = A$, $S_{(AC)}(A) = A$, $S_{(DC)}(A) = B$ (car (DC) est la médiatrice de $[AB]$), $S_{(BD)}(B) = B$. Donc $f(A) = B$.

b. On regroupe : $f = \big(S_{(BD)} \circ S_{(DC)}\big) \circ \big(S_{(AC)} \circ S_{(AB)}\big)$.

– $S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = R_{\left(A,2\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right)} = R_{\left(A,\frac{2\pi}{3}\right)}$.

– $S_{(BD)} \circ S_{(DC)} = R_{\left(D,2\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}\right)\right)}$ avec $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}$ (angles inscrits, A et D du même côté de (BC)) ; c'est $R_{\left(D,-\frac{2\pi}{3}\right)}$.

f est donc un déplacement d'angle $\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 0$: c'est une translation, et $f(A) = B$ donne

$$f = t_{\overrightarrow{AB}}.$$

Corrigé de l'exercice 10

1. a. Cherchons $z' = a\overline{z} + b$ avec $a = \alpha + i\beta$. On a $a\overline{z} = (\alpha x + \beta y) + i(\beta x - \alpha y)$. L'identification avec x' et y' donne $\alpha = -\frac{3}{5}$, $\beta = \frac{4}{5}$ et

$$z' = \frac{-3+4i}{5}\,\overline{z} + \frac{13+6i}{5}.$$

b. $|a| = \frac{\sqrt{9+16}}{5} = 1$: d'après le théorème 7, f **est un antidéplacement**.

c. M est invariant si et seulement si $x' = x$ et $y' = y$:

$$\begin{cases} -8x + 4y + 13 = 0 \\ 4x - 2y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - \dfrac{13}{4} \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

système impossible (droites parallèles distinctes). f n'a **aucun point fixe** : c'est un antidéplacement sans point fixe, donc une **symétrie glissante**.

2. a. $f \circ f(z) = a\,\overline{a\overline{z} + b} + b = a\overline{a}\,z + a\overline{b} + b = z + a\overline{b} + b$. Or

$$a\overline{b} = \frac{(-3+4i)(13-6i)}{25} = \frac{-15+70i}{25} = \frac{-3+14i}{5}, \qquad a\overline{b} + b = \frac{10+20i}{5} = 2 + 4i.$$

$f \circ f$ est la translation de vecteur $2\vec{v}$ d'affixe $2 + 4i$: $\vec{v}$ a pour affixe $1 + 2i$, $\vec{v}(1\,;2)$.

b. On doit avoir $s = t^{-1} \circ f$, d'écriture $z' = a\overline{z} + b - (1 + 2i) = a\overline{z} + \frac{8-4i}{5}$, soit

$$x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{8}{5}, \qquad y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{4}{5}.$$

Les points fixes de s vérifient $-8x + 4y + 8 = 0$ et $4x - 2y - 4 = 0$, c'est-à-dire $y = 2x - 2$ (les deux équations sont équivalentes). s est donc la symétrie orthogonale d'axe

$$D\colon\ y = 2x - 2.$$

Le vecteur $\vec{v}$ étant directeur de D (question c), t et s commutent et $f = t \circ s = s \circ t$.

c. D a pour vecteur directeur $(1\,;2)$, qui est $\vec{v}$. C'est cohérent : $(D, \vec{v})$ est la forme réduite de la symétrie glissante f.

Corrigé de l'exercice 11

1. f est la composée de trois symétries orthogonales (nombre impair) : c'est un **antidéplacement**.

2. et 3. Les droites (AB) et (CA) sont perpendiculaires en A, donc $S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_A$ et $f = S_{(BC)} \circ S_A$. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) et δ la parallèle à (BC) passant par A. Les droites (AH) et δ sont perpendiculaires en A, donc $S_A = S_\delta \circ S_{(AH)}$, et

$$f = \left(S_{(BC)} \circ S_\delta\right) \circ S_{(AH)} = t_{2\overrightarrow{AH}} \circ S_{(AH)},$$

car $\delta \parallel (BC)$, $A \in \delta$, $H \in (BC)$ et $(AH) \perp (BC)$ (théorème 3). Le vecteur $2\overrightarrow{AH}$ est non nul ($A \notin (BC)$) et directeur de l'axe (AH) : f **est une symétrie glissante**, de forme réduite

$$f = t_{2\overrightarrow{AH}} \circ S_{(AH)} = S_{(AH)} \circ t_{2\overrightarrow{AH}} : \quad \text{axe } (AH), \text{ vecteur } 2\overrightarrow{AH}.$$

Corrigé de l'exercice 12

> **Remarque sur l'énoncé.** La 1re édition parlait d'un paramètre « m » : il s'agit du paramètre a ; le conjugué $\overline{z}$, perdu à l'impression, est rétabli (la question 2 l'impose).

On note $a = p + iq$ (p, q réels).

1. Pour $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ d'images M'_1, M'_2 : $M'_1M'_2 = |-\overline{z_2} + \overline{z_1}| = |\overline{z_1 - z_2}| = |z_1 - z_2| = M_1M_2$. f_a **est une isométrie.**

2. L'écriture est de la forme $z' = \alpha\overline{z} + \beta$ avec $\alpha = -1$, $|\alpha| = 1$: f_a **est un antidéplacement.**

3. $z = -\overline{z} + 2a + 2i \Leftrightarrow z + \overline{z} = 2a + 2i \Leftrightarrow 2x = 2p + 2i(q+1)$.

– Si $q \neq -1$ (c'est-à-dire $\mathrm{Im}(a) \neq -1$) : aucune solution, **pas de point fixe**.

– Si $q = -1$: les points fixes sont ceux de la droite D_a d'équation $x = p = \mathrm{Re}(a)$.

4. L'écriture $z \mapsto -\overline{z} + 2p$, c'est-à-dire $(x, y) \mapsto (2p - x, y)$, est celle de la symétrie orthogonale d'axe D_a : $x = \mathrm{Re}(a)$. Donc

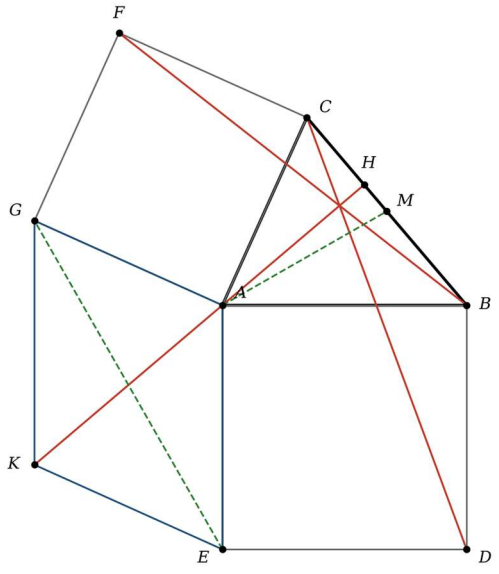
$$f_a = t_{\vec{w}} \circ S_{D_a}, \qquad \vec{w} \text{ d'affixe } 2i(\mathrm{Im}(a) + 1),$$

et $\vec{w}$ est directeur de D_a (droite parallèle à l'axe des ordonnées).

– Si $\mathrm{Im}(a) = -1$: f_a est la **symétrie orthogonale** d'axe D_a.

– Si $\mathrm{Im}(a) \neq -1$: f_a est la **symétrie glissante** d'axe D_a : $x = \mathrm{Re}(a)$ et de vecteur $2(\mathrm{Im}(a) + 1)\vec{v}$.

Corrigé de l'exercice 13



Exercice 13 : carrés extérieurs et parallélogramme $AGKE$; (AK), (BF), (CD) concourent.

Notons ρ la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$. Le triangle ABC étant direct et les carrés extérieurs, le carré $ACFG$ est direct et le carré $ABDE$ indirect :

$$\rho(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AG}, \qquad \rho(\overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AE}.$$

1. a. Soit Ω_1 le centre du carré direct $ACFG$ et $f = R_{\left(\Omega_1, -\frac{\pi}{2}\right)}$. Elle envoie A sur G et C sur A. L'image $f(B)$ vérifie $\overrightarrow{Gf(B)} = \rho^{-1}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AE}$, donc $f(B) = G + \overrightarrow{AE} = K$ (parallélogramme $AGKE$). Ainsi f transforme ABC en GKA ; par unicité (théorème 6, appliqué à $A \mapsto G$, $C \mapsto A$), c'est **l'unique déplacement** qui convient :

$$f = R_{\left(\Omega_1, -\frac{\pi}{2}\right)}, \quad \Omega_1 \text{ centre du carré } ACFG.$$

b. f envoie B sur K et C sur A ; son angle étant $-\frac{\pi}{2}$, $(KA) \perp (BC)$ et $KA = BC$. Comme $(AH) \perp (BC)$, les droites (AK) et (AH) passent toutes deux par A et sont perpendiculaires à (BC) : elles sont confondues. **H, A, K sont alignés.**

c. f conserve les milieux : $f(M)$ est le milieu N de $[KA]$, qui est aussi le milieu de $[EG]$ (diagonales du parallélogramme $AGKE$). Comme $f(A) = G$ et $f(M) = N$, $(GN) \perp (AM)$, c'est-à-dire $(EG) \perp (AM)$: la médiane issue de A dans ABC est la hauteur issue de A dans AEG.

2. a. et b. D'après 1.b, $\overrightarrow{KA} = \rho^{-1}\left(\overrightarrow{BC}\right)$, donc $\rho\left(\overrightarrow{BC}\right) = -\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AK}$. D'autre part $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AG}$ et $\rho\left(\overrightarrow{AG}\right) = \rho^2\left(\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{CA}$. Ainsi

$$\rho\left(\overrightarrow{BF}\right) = \rho\left(\overrightarrow{BC}\right) + \rho\left(\overrightarrow{CF}\right) = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CK}.$$

Donc $FB = CK$ et $\left(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CK}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

3. a. Soit Ω_2 le centre du carré indirect $ABDE$ et $g = R_{\left(\Omega_2, \frac{\pi}{2}\right)}$: elle envoie A sur E et B sur A. De plus $\overrightarrow{Eg(C)} = \rho\left(\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AG}$, donc $g(C) = E + \overrightarrow{AG} = K$. Par unicité,

$$g = R_{\left(\Omega_2, \frac{\pi}{2}\right)}, \quad \Omega_2 \text{ centre du carré } ABDE.$$

b. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BC}$ et $\rho\left(\overrightarrow{EA}\right) = -\rho\left(\overrightarrow{AE}\right) = \overrightarrow{BA}$, d'où

$$\rho\left(\overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BK}.$$

Donc $DC = BK$ et $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BK}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

4. Dans le triangle BCK :

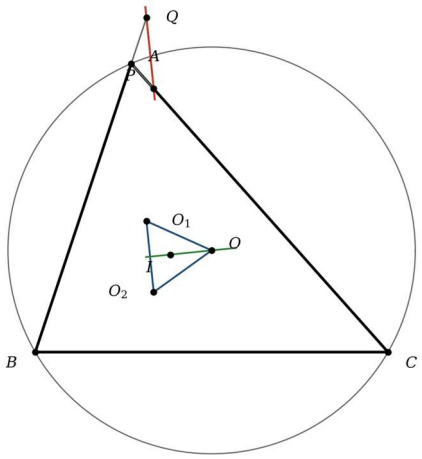
– (AK) passe par K et est perpendiculaire à (BC) (question 1.b) : c'est la hauteur issue de K ;

– (BF) passe par B et est perpendiculaire à (CK) (question 2) : c'est la hauteur issue de B ;

– (CD) passe par C et est perpendiculaire à (BK) (question 3) : c'est la hauteur issue de C.

Les trois hauteurs d'un triangle étant concourantes, (AK), (BF) **et** (CD) **concourent** en l'orthocentre de BCK.

Corrigé de l'exercice 14



Exercice 14 : $(PQ) \perp (OI)$; le triangle OO_1O_2 est équilatéral.

L'hypothèse $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$ signifie que ABC est direct et que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$; donc $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \frac{2\pi}{3}$.

1. a. $P \in [CA]$, donc (CI), bissectrice de $\widehat{ACB}$, est aussi bissectrice de $\widehat{PCB}$. Le triangle CPB est isocèle en C $(CP = CB)$: la bissectrice issue du sommet principal est la médiatrice de la base. (CI) **est la médiatrice de** $[PB]$**.** De même, $Q \in [BA)$ et $BQ = BC$: (BI) **est la médiatrice de** $[CQ]$**.**

b. $\overrightarrow{CP}$ a même sens que $\overrightarrow{CA}$, et $\overrightarrow{QB}$ même sens que $\overrightarrow{AB}$ (car $Q \in [BA)$). Donc

$$\left(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{QB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \ [2\pi].$$

2. a. $CP = QB \neq 0$ et $\left(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{QB}\right) \equiv \frac{2\pi}{3} \not\equiv 0$: le déplacement f tel que $f(C) = Q$ et $f(P) = B$ existe, est unique, et c'est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Son centre est équidistant de C et Q, et de P et B : il appartient à (BI) et à (CI) (question 1.a), c'est donc I.

b. Dans le triangle IBC, $\widehat{BIC} = \pi - \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$; le triangle IBC ayant l'orientation de ABC (direct), $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$.

c. Par la relation de Chasles :

$$\left(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IQ}\right) \equiv \left(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}\right) + \left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IQ}\right) \equiv 3 \times \frac{2\pi}{3} \equiv 0 \ [2\pi],$$

car $f(P) = B$ et $f(C) = Q$. Donc I**,** P**,** Q **sont alignés**.

3. a. $f \circ f \circ f$ est un déplacement d'angle $3 \times \frac{2\pi}{3} = 2\pi$ qui fixe I : c'est l'identité. Donc $f(O_2) = f \circ f \circ f(O) = O$.

b. f conserve les distances : $O_1O_2 = f(O)f(O_1) = OO_1$ et $O_2O = f(O_1)f(O_2) = O_1O_2$. Le triangle OO_1O_2 est **équilatéral** (non réduit à un point car $O \neq I$, le triangle ABC n'étant pas équilatéral en général). Enfin $IO_1 = IO_2$ et $OO_1 = OO_2$: I et O appartiennent à la médiatrice de $[O_1O_2]$, qui est donc **la droite** (OI).

4. a. g est un déplacement d'angle $\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi \equiv 0$: c'est une **translation**. $g(O_2) = f\left(r\left(f(O_2)\right)\right) = f\left(r(O)\right) = f(O) = O_1$. Donc $g = t_{\overrightarrow{O_2O_1}}$.

b. $OB = OC$ et, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}$: $r(B) = C$. Alors $g(P) = f\Big(r\big(f(P)\big)\Big) = f\big(r(B)\big) = f(C) = Q$.

c. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{O_2O_1}$ et $(O_1O_2) \perp (OI)$ d'après 3.b. Donc $(PQ) \perp (OI)$.

Corrigé de l'exercice 15

Remarque sur l'énoncé. Les angles définissant l'orientation des triangles extérieurs, illisibles dans la 1re édition, ont été rétablis : $\left(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B}\right) \equiv \left(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'C}\right) \equiv \left(\overrightarrow{C'B}, \overrightarrow{C'A}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$; c'est la configuration de l'exercice 1.

1. a. $AC' = AB$ et $\left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$ (ABC' équilatéral indirect), donc $R(C') = B$. $AC = AB'$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$, donc $R(C) = B'$. R envoie $[C'C]$ sur $[BB']$: $CC' = BB'$ et $\left(\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{BB'}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

b. Les centres des triangles équilatéraux sont leurs centres de gravité : $H = \text{bar}\{A, B, C'\}$, $G = \text{bar}\{A, C, B'\}$ (coefficients égaux), $O = \text{bar}\{A, B, C\}$. Pour tout point M :

$$\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MH} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MC'}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{C'C}, \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MB'} - \overrightarrow{MB}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BB'}.$$

c. $OH = \frac{1}{3}CC' = \frac{1}{3}BB' = OG$, et

$$\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OG}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{BB'}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{BB'}\right) \equiv \pi + \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{2\pi}{3} \ [2\pi].$$

d. La configuration est invariante par la permutation circulaire $(A, B, C) \to (B, C, A)$, qui transforme (C', B', A') en (A', C', B') et (H, G, F) en (F, H, G). Le résultat de c. donne donc aussi $OF = OH$ et $\left(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OH}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}$. Ainsi la rotation $R_{\left(O, -\frac{2\pi}{3}\right)}$ envoie $F \mapsto H \mapsto G \mapsto F$: $FH = HG = GF$. FGH **est équilatéral de centre** O, et direct puisque $R_{\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)}$ envoie F sur G et G sur H.

2. a. Une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour du centre d'un triangle équilatéral permute ses sommets ; pour un triangle direct XYZ elle envoie $X \mapsto Y \mapsto Z \mapsto X$, pour un triangle indirect elle envoie chaque sommet sur le précédent. D'où :

– ABC' indirect : $R_3(B) = A$;

– ACB' direct : $R_2(A) = C$;

– BCA' indirect : $R_1(C) = B$.

Donc $f(B) = R_1\big(R_2(A)\big) = R_1(C) = B$. f est un déplacement d'angle $3 \times \frac{2\pi}{3} \equiv 0$, donc une translation ; elle fixe B : $f = \text{id}_P$.

b. $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = \text{id}_P$ donne $R_2 \circ R_3 = R_1^{-1} = R_{\left(F, -\frac{2\pi}{3}\right)}$: **centre** F**, angle** $-\frac{2\pi}{3}$.

c. Notons $\vec{w}$ un vecteur directeur de (GH) orienté de G vers H.

– $R_2 = S_2 \circ S$: l'axe Δ_2 de S_2 passe par G et vérifie $2(\vec{w}, \overrightarrow{w_2}) \equiv \frac{2\pi}{3}$, soit $(\vec{w}, \overrightarrow{w_2}) \equiv \frac{\pi}{3}$ $[\pi]$: c'est la droite issue de G faisant l'angle $\frac{\pi}{3}$ avec (GH).

– $R_3 = S \circ S_3$: l'axe Δ_3 de S_3 passe par H et vérifie $2(\overrightarrow{w_3}, \vec{w}) \equiv \frac{2\pi}{3}$, soit $(\vec{w}, \overrightarrow{w_3}) \equiv -\frac{\pi}{3}$ $[\pi]$.

Ces deux droites, symétriques par rapport à la médiatrice de $[GH]$, se coupent en un point F' tel que $\widehat{F'GH} = \widehat{F'HG} = \frac{\pi}{3}$: le triangle $F'GH$ est **équilatéral**, et F' est situé du côté de (GH) tel que GHF' soit **direct**.

d. $R_2 \circ R_3 = S_2 \circ S \circ S \circ S_3 = S_2 \circ S_3$: c'est la rotation de centre $\Delta_2 \cap \Delta_3 = F'$. D'après b., c'est aussi la rotation de centre F. Le centre d'une rotation (différente de l'identité) étant unique, $F' = F$, et FGH **est équilatéral direct** : c'est le **théorème de Napoléon**.

Chapitre 12 — Similitudes du plan



Cours • 15 exercices • Corrigés détaillés

Ce que vous devez savoir faire à la fin du chapitre
– Reconnaître une homothétie, une similitude directe, une similitude indirecte et en donner les éléments caractéristiques (centre, rapport, angle ou axe).
– Utiliser l'unicité de la similitude directe (ou indirecte) qui envoie deux points distincts sur deux points donnés.
– Déterminer le centre d'une similitude par une méthode géométrique (cercles, droites images) ou par le calcul.
– Passer de l'écriture complexe $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$ aux éléments caractéristiques, et réciproquement.
– Exploiter une similitude pour établir des rapports de longueurs, des angles, des alignements et des orthogonalités.

Le plan P est orienté. Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 2, chapitre 4 : *Similitudes*).

Cours

I. Homothéties (rappels et compléments)

Définition. Soit I un point et k un réel non nul. L'**homothétie** de centre I et de rapport k, notée $h_{(I,k)}$, associe à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$.

Théorème (propriété caractéristique). Soit k un réel non nul et différent de 1. Une application f est une homothétie de rapport k si et seulement si, pour tous points M, N d'images M', N' : $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$.
Propriétés.
– Toute homothétie conserve les mesures des angles orientés.
– La composée de deux homothéties de rapports k_1 et k_2 est une homothétie de rapport k_1k_2 si $k_1k_2 \neq 1$, une translation si $k_1k_2 = 1$.
– La composée d'une translation et d'une homothétie de rapport $k \neq 1$ (dans un ordre quelconque) est une homothétie de rapport k.
– **Écriture complexe.** f est une homothétie de rapport $k \neq 1$ si et seulement si $z' = kz + b$; son centre a pour affixe $\frac{b}{1-k}$.

II. Similitudes : définition et propriétés

Définition. Soit k un réel strictement positif. On appelle **similitude de rapport** k toute application f du plan dans lui-même telle que, pour tous points A, B d'images A', B' : $A'B' = k\,AB$.
Les isométries sont les similitudes de rapport 1 ; une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.

Théorème 1.
– La composée de deux similitudes de rapports k et k' est une similitude de rapport kk'.
– Une application est une similitude si et seulement si elle est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.
– Pour tous points A, B, C, D d'images A', B', C', D' par une similitude de rapport k : $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'} = k^2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Propriétés. Une similitude f de rapport k :
– est une bijection ; sa réciproque est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$;
– conserve les angles géométriques, l'orthogonalité, l'alignement, le barycentre (donc le milieu) ;
– transforme un segment en un segment, une droite en une droite, un cercle de centre Ω et de rayon R en un cercle de centre $f(\Omega)$ et de rayon kR ; elle multiplie les aires par k^2.
Deux similitudes qui coïncident en trois points non alignés sont égales.

III. Similitudes directes, similitudes indirectes

Définition. Une similitude est **directe** si elle est la composée d'une homothétie et d'un déplacement ; elle est **indirecte** si elle est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.
Une similitude directe conserve les mesures des angles orientés ; une similitude indirecte les change en leurs opposées.

Théorème 2.
– La composée de deux similitudes de même nature est directe ; la composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est indirecte. La réciproque d'une similitude a la même nature qu'elle.
– **Unicité.** Soit A, B, C, D des points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Il existe une **unique similitude directe** et une **unique similitude indirecte** qui envoient A sur C et B sur D ; leur rapport est $\frac{CD}{AB}$.

IV. Similitudes directes

Théorème et définition (angle). Soit f une similitude directe. Pour tous points $A \neq B$ et $C \neq D$ d'images A', B', C', D' :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}\right) \ [2\pi].$$

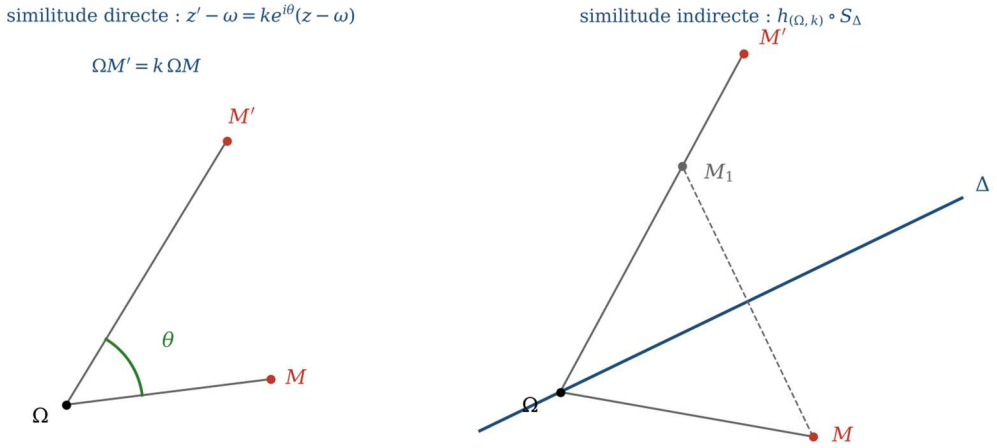
Une mesure θ de cet angle est appelée **angle** de f. Si f et g ont pour angles θ et θ', alors $f \circ g$ a pour angle $\theta + \theta'$ et f^{-1} a pour angle $-\theta$.

Théorème 3 (centre et forme réduite). Toute similitude directe de rapport $k \neq 1$ admet un unique point fixe I, appelé **centre**. Elle est entièrement déterminée par son centre I, son rapport k et son angle θ : pour tout point $M \neq I$ d'image M',

$$IM' = k\,IM \qquad \text{et} \qquad \left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right) \equiv \theta\ [2\pi].$$

Forme réduite : $f = h \circ r = r \circ h$, où $h = h_{(I,k)}$ et $r = R_{(I,\theta)}$.

Une similitude directe de rapport 1 est un déplacement (translation ou rotation).



À gauche : similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ. À droite : similitude indirecte de centre Ω, de rapport k et d'axe Δ.

Méthode — déterminer le centre Ω d'une similitude directe f d'angle θ telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

– *Angle droit.* Si $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{2}$, Ω voit $[AA']$ et $[BB']$ sous un angle droit : il appartient aux cercles de diamètres $[AA']$ et $[BB']$.

– *Arc capable.* En général, $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}\right) \equiv \theta$: Ω est sur un arc de cercle d'extrémités A et A'.

– *Droites images.* Si $f(D_1) = D_1'$ et $f(D_2) = D_2'$, et si $D_1 \cap D_2 = D_1' \cap D_2' = \{J\}$, alors $f(J) = J$, donc $J = \Omega$.

– *Calcul.* On résout $f(z) = z$.

Théorème 4 (écriture complexe). Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. f est une similitude directe si et seulement si son écriture complexe est

$$z' = az + b, \qquad a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}.$$

Son rapport est $|a|$ et son angle $\arg(a)$. Si $a \neq 1$, son centre a pour affixe $\frac{b}{1-a}$ et $z' - z_I = a\,(z - z_I)$; si $a = 1$, c'est la translation de vecteur d'affixe b.

V. Similitudes indirectes

Théorème 5 (centre). Toute similitude indirecte f de rapport $k \neq 1$ admet un unique point fixe I, appelé **centre** de f ; c'est aussi le centre de la similitude directe $f \circ f$.

Forme réduite. Il existe une unique droite Δ passant par I telle que

$$f = h_{(I,k)} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ h_{(I,k)}.$$

Δ est l'**axe** de f ; c'est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$.

Conséquences. Soit f une similitude indirecte de centre I, de rapport $k \neq 1$ et d'axe Δ.
– f est déterminée par son centre, son rapport et son axe (ses **éléments caractéristiques**).
– Δ et la perpendiculaire à Δ en I sont globalement invariantes par f.
– $f \circ f = h_{(I,k^2)}$.
– Pour $M \neq I$ d'image M', l'axe Δ est la **bissectrice intérieure** de l'angle $\widehat{MIM'}$.

Théorème 6 (écriture complexe). f est une similitude indirecte si et seulement si son écriture complexe est

$$z' = a\overline{z} + b, \qquad a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}.$$

Son rapport est $k = |a|$. Si $|a| \neq 1$, son centre a pour affixe $z_I = \frac{a\overline{b}+b}{1-|a|^2}$. En écrivant $a = k\,e^{i\varphi}$, on a $z' - z_I = a\,\overline{(z - z_I)}$ et l'axe est la droite passant par I dirigée par $e^{i\varphi/2}$.

Attention. Une homothétie de rapport $k < 0$ est une similitude directe de rapport $|k| = -k$ et d'angle π. Dans l'écriture $z' = az + b$, le rapport est $|a|$, et non a.

Exercices

Exercice 1

On considère un triangle équilatéral ABI tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Soit Ω le symétrique de B par rapport à (AI).

1. Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en I.
   a. Montrer que Ω est le centre de cette rotation.
   b. Soit $C = R(B)$. Montrer que I est le milieu de $[AC]$.
2. À tout point M de $[AB]$, distinct de A et de B, on associe le point M' de $[IC]$ tel que $AM = IM'$. Montrer que le triangle $\Omega MM'$ est équilatéral.
3. Soit G le centre de gravité du triangle $\Omega MM'$ et S la similitude directe de centre Ω qui transforme M en G.
   a. Préciser le rapport et l'angle de cette similitude.
   b. Montrer que $S(B) = I$ et construire le point $A' = S(A)$.
   c. Montrer que les points I, G et A' sont alignés.

Exercice 2

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan, $A(1\,;1)$ et $B(0\,;2)$.

1. Soit $g = t_{\overrightarrow{BO}} \circ R_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)}$.
   a. Déterminer $g(B)$ et $g(O)$.
   b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.
2. Soit $S = g \circ h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)}$.
   a. Déterminer $S(A)$, puis la nature de S.
   b. Soit $OIAJ$ le carré de centre K avec $I(1\,;0)$ et $J(0\,;1)$. Déterminer $S(B)$, puis construire l'image du carré $OIAJ$ par S.

Exercice 3

On considère un triangle équilatéral ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Soit H le milieu de $[BC]$, I le milieu de $[AC]$ et Δ la médiatrice de $[BC]$. On désigne par S la similitude directe de centre A qui envoie B sur I. Soit M un point quelconque du plan et M' son image par S.

1. Déterminer l'angle et le rapport de S.
2. Construire le point J, antécédent de B par S.
3. Soit N l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe Δ.
   a. Montrer que $BM' = BN$ si et seulement si $JM = 2CM$.
   b. En déduire l'ensemble des points M tels que $BM' = BN$.

Exercice 4

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AC = 2AB$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On désigne par F le projeté orthogonal de A sur (BC), $I = S_{(AB)}(F)$ et $J = S_{(AC)}(F)$.

1.
   a. Montrer que $(BI) \perp (AI)$ et $(CJ) \perp (AJ)$.
   b. Caractériser $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ et en déduire que A est le milieu de $[IJ]$.
2. Soit S la similitude directe qui transforme B en A et A en C.
   a. Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b. Montrer que F est le centre de S.
   c. Montrer que $S(I) = J$. En déduire que $CJ = IJ$.
3. Soit σ la similitude indirecte qui transforme I en F et F en J.
   a. Déterminer le rapport de σ.
   b. Soit Ω le centre de σ. Montrer que $\overrightarrow{\Omega J} = 4\,\overrightarrow{\Omega I}$.
   c. Soit E le point défini par $\overrightarrow{\Omega E} = 2\,\overrightarrow{\Omega I}$. Montrer que l'axe (Δ) de σ est la médiatrice de $[EF]$.

Exercice 5

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $AB = 2AC$. Soit D et D' deux droites parallèles passant respectivement par B et C et ne contenant aucun des côtés du triangle. Soit Δ la droite passant par A et perpendiculaire à D et D' ; elle coupe D en I et D' en J.

1. Soit S la similitude directe qui transforme A en B et C en A.
   a. Déterminer l'angle et le rapport de S.
   b. Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC).
2.
   a. Déterminer $S(D')$ et $S(\Delta)$.
   b. En déduire $S(J)$.
   c. Montrer que le cercle de diamètre $[IJ]$ passe par Ω.

Exercice 6 (Bac, section Mathématiques, 2008, session principale)

OAB est un triangle rectangle isocèle tel que $OA = OB$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On désigne par I le milieu de $[AB]$ et par C et D les symétriques respectifs de I par rapport à O et à B. Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

1. Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2.
   a. Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.
   b. Soit J le projeté orthogonal de O sur (AC). Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de f.
3. Soit g la similitude indirecte de centre I qui envoie A sur D.
   a. Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire $g(O)$.
   b. Déterminer les images de C et D par $g \circ f^{-1}$. En déduire la nature de $g \circ f^{-1}$.
4. Soit $I' = f(I)$ et $J' = g(J)$.
   a. Déterminer les images des points J et I' par $g \circ f^{-1}$.
   b. Montrer que les droites (IJ), $(I'J')$ et (CD) sont concourantes.

Exercice 7

Soit ABC un triangle non isocèle tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. À tout point M de la droite (AB), distinct de B, on associe le point N de la droite (AC) tel que M et N soient dans un même demi-plan ouvert de bord (BC) et $BM = CN$.

1. Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(B) = C$ et $r(M) = N$ pour tout point M de (AB) distinct de B. Préciser une mesure de son angle et construire son centre I.
2. Soit O le milieu de $[BC]$, $S_{(OI)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OI), h l'homothétie de centre I et de rapport 2, et $f = h \circ S_{(OI)} \circ r$.
   a. Déterminer $f(B)$ et $f(I)$.
   b. Démontrer que f est une similitude indirecte dont on précisera l'axe, le centre et le rapport.
   c. Soit M' l'image de M par f. Déterminer et construire l'ensemble des points M' lorsque M décrit (AB) privée de B.
   d. Soit H le milieu de $[MN]$. Déterminer l'ensemble des points H lorsque M décrit (AB) privée de B.

Exercice 8

Soit D une droite, O et M deux points symétriques par rapport à D, et M' un point distinct de O et de M. On désigne par s la similitude indirecte de centre O, de rapport $k \neq 1$, envoyant M sur M'. Soit ζ un cercle de centre Ω passant par O et M, et $\zeta' = s(\zeta)$.

1. Construire le centre Ω' de ζ'.
2. En déduire la construction de ζ'.

Exercice 9

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit f l'application qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$. Donner, dans chacun des cas suivants, la nature de f et ses éléments caractéristiques.

a. $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\, z + 1 + 2i$; b. $z' = -2z + 1 + 2i$; c. $z' = (1+i)z + 1 + 2i$; d. $z' = (1+i)\overline{z} + 1 + 2i$.

Exercice 10

Soit s la similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et de centre M_0 d'affixe $z_0 = 1 - i$. Répondre par vrai ou faux, en justifiant.

1. s a pour écriture complexe $z' = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}z + 1 - i$.
2. L'image par s de la droite D d'équation $x + y = \sqrt{2}$ est la droite D' d'équation $y = \sqrt{2}$.
3. La réciproque s^{-1} de s a pour écriture complexe $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}z - 1$.

Exercice 11

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = \sqrt{2}$, $AD = 1$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$; I désigne le milieu de $[AB]$. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

Partie A. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Soit S une similitude directe d'écriture $z' = az + b$ $(a \neq 0)$.

1. Déterminer a et b pour que $S(D) = C$ et $S(C) = B$.
2. Soit T la similitude directe d'écriture $z' = -\frac{i\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$. Déterminer le rapport et l'angle de T.
3. Montrer que T transforme B en I.
4. En déduire que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires.
5. Montrer que le centre Ω de T est le point d'intersection des droites (BD) et (CI).

Partie B. Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2 - MB^2 = 1$.

1. Vérifier que les points C et I appartiennent à (E).
2.
   a. Démontrer que, pour tout point M, $MD^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{BD}$, où J est un point que l'on précisera.
   b. Déterminer l'ensemble (E).
   c. En déduire une autre justification de l'orthogonalité des droites (BD) et (CI).

Exercice 12

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm). On considère l'application f qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que

$$z' = -\left(\sqrt{3} + i\right)z - 1 + i\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

1. Montrer que f est une similitude directe de centre Ω d'affixe i. En déterminer le rapport et l'angle.
2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$. Calculer ΩM_0 et donner une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_0}\right)$.
3. On considère la suite de points $(M_n)_{n\geq 0}$ définie par $M_{n+1} = f(M_n)$; on note z_n l'affixe de M_n.
   a. Placer les points Ω, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.
   b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$.
   c. Calculer ΩM_n, puis déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\Omega M_n \geq 10^2$.
4.
   a. On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs. Vérifier que le couple $(-5\,;-3)$ est solution, puis résoudre (E).
   b. Soit Δ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\mathrm{Im}(z) = 1$ et $\mathrm{Re}(z) \geq 0$. Caractériser géométriquement Δ et le représenter.

c. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par $\vec{u}$. Préciser son plus petit élément.

Exercice 13

Soit s_1, s_2 et s_3 les similitudes définies par :

– s_1 associe à tout point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{-1+i}{2}z + \frac{3-i}{2}$;

– s_2 est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle π ;

– s_3 associe à tout point $M(x\,;y)$ le point $M'(x'\,;y')$ tel que $x' = -x + y - 1$ et $y' = -x - y + 2$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f = s_1 \circ s_2$ et de $g = s_1 \circ s_3$.

Exercice 14

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 5 cm). A, B, C désignent les points d'affixes respectives $1-i$, i et -1. On note g l'application qui à tout point $M(z)$ associe le point $g(M)$ d'affixe

$$z' = \frac{1 - i + z + iz}{3}.$$

1.
   a. Déterminer $g(B)$.
   b. On note I le milieu de $[BC]$. Prouver que les points O, A, I sont alignés, et placer les points O, A, B, C, I sur une figure.
2.
   a. Prouver que g est une similitude directe dont on déterminera le centre Ω, le rapport et l'angle.
   b. Prouver que les points A, B, Ω sont alignés.
3.
   a. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OI}\right)$. Montrer que l'image de la droite (OB) par g est la droite (OI).
   b. Soit O' l'image de O par g. Montrer que la droite (OO') est l'image par g de la droite (BO).
   c. En déduire que les points I, O, O', A sont alignés.
4. Montrer que les points I et Ω appartiennent au cercle de diamètre $[BO']$.

Exercice 15 — Théorème de Ptolémée

On considère quatre points distincts A, B, C et D se succédant dans le sens trigonométrique sur un même cercle.

1. Soit S la similitude directe de centre A qui transforme C en D. On désigne par E l'image du point B.
   a. Montrer que $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{DE}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\ [2\pi]$.
   b. Montrer que E est sur la droite (BD). On admettra que E est sur le segment $[BD]$.
   c. Montrer que $AD \times BC = DE \times AC$.
2.
   a. Montrer que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right)\ [2\pi]$, puis que $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$.

b. Soit S' la similitude directe de centre A qui transforme B en C. Montrer que D est l'image de E par S'.

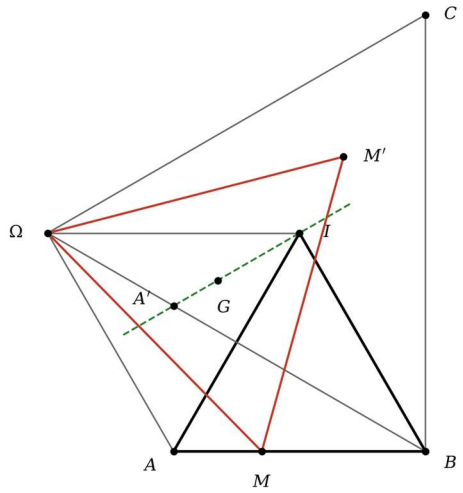
c. Prouver que $AB \times CD = AC \times BE$.

3. Démontrer la relation $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$.

Cette relation est connue sous le nom de théorème de Ptolémée (astronome et mathématicien grec du IIe siècle), qui l'utilisait pour calculer des longueurs de cordes, ancêtres de nos rapports trigonométriques.

Corrigés détaillés

Corrigé de l'exercice 1



Exercice 1 : $\Omega MM'$ équilatéral, $G = S(M)$ sur la droite $(A'I)$.

1. a. $A \in (AI)$, donc $\Omega A = BA$; $I \in (AI)$, donc $\Omega I = BI$. Ainsi $\Omega A = \Omega I = AI$: le triangle ΩAI est équilatéral, et Ω, symétrique de B, est de l'autre côté de (AI), de sorte que $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. La rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie donc A sur I ; par unicité de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoyant A sur I, **Ω est le centre de R**.

b. R est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$: $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{R(A)R(B)}$ est l'image de $\overrightarrow{AB}$ par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$. Comme $AI = AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$, cette image est $\overrightarrow{AI}$. Donc $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$: **I est le milieu de $[AC]$**.

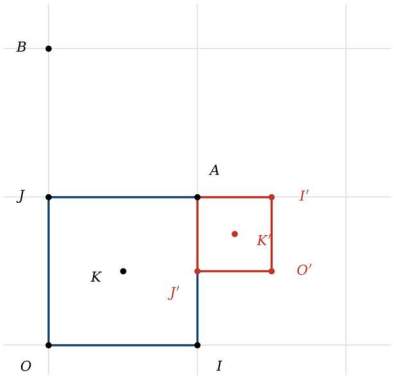
2. R envoie le segment $[AB]$ sur le segment $[IC]$ en conservant les distances, avec $R(A) = I$. Le point $R(M)$ appartient donc à $[IC]$ et vérifie $IR(M) = AM$: c'est M'. Ainsi $\Omega M = \Omega M'$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$: **$\Omega MM'$ est équilatéral (direct)**.

3. a. Dans le triangle équilatéral $\Omega MM'$ de côté ℓ, le centre de gravité G est sur la bissectrice issue de Ω et $\Omega G = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\ell = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$. Donc $\Omega G = \frac{\sqrt{3}}{3}\Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega G}\right) \equiv \frac{\pi}{6}$: S a pour **rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et pour angle $\frac{\pi}{6}$**.

b. $\Omega A = AB = BI = I\Omega$: ΩABI est un losange d'angle $\widehat{A\Omega I} = \frac{\pi}{3}$. Sa diagonale $[\Omega B]$ est bissectrice de cet angle et mesure $\Omega B = \sqrt{3}\,AB = \sqrt{3}\,\Omega I$. Donc $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega I}\right) \equiv \frac{\pi}{6}$ et $\Omega I = \frac{\sqrt{3}}{3}\Omega B$: $S(B) = I$. $A' = S(A)$ vérifie $\Omega A' = \frac{\sqrt{3}}{3}\Omega A$ et $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}\right) \equiv \frac{\pi}{6}$: **A' est le centre du triangle équilatéral ΩAI** (c'est le cas « $M = A$ » de la question 3.a, puisque $R(A) = I$).

c. S transforme la droite (AB) en la droite $\big(S(A)S(B)\big) = (A'I)$. Comme $M \in (AB)$, $G = S(M) \in (A'I)$: I, G, A' **sont alignés**.

Corrigé de l'exercice 2



Exercice 2 : le carré OIAJ (en bleu) et son image par S (en rouge).

1. a. $g(B) = t_{\overrightarrow{BO}}(B) = O$. $R_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)}(O)$ a pour affixe $2i + i(0 - 2i) = 2 + 2i$, puis $g(O) = (2 + 2i) - 2i = 2$: $g(O)$ est le point $(2\,;0)$.

b. g est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$: c'est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Son écriture complexe est $z' = i(z - 2i) + 2i - 2i = iz + 2$; son centre a pour affixe $\frac{2}{1-i} = 1 + i$. Donc $g = R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$.

2. a. $S(A) = g\left(h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)}(A)\right) = g(A) = A$. S est la composée de l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ et de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$: c'est la **similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$**, d'écriture $z' = \frac{i}{2}(z - 1 - i) + 1 + i$.

b. $S(B)$ a pour affixe $\frac{i}{2}(-1 + i) + 1 + i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$: $S(B) = K$. Les images des sommets sont $S(O) = O'\left(\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, $S(I) = I'\left(\frac{3}{2}\,;1\right)$, $S(A) = A$, $S(J) = J'\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$. L'image du carré $OIAJ$ est le carré $O'I'AJ'$ de côté $\frac{1}{2}$ et de centre $K' = S(K)\left(\frac{5}{4}\,;\frac{3}{4}\right)$.

Corrigé de l'exercice 3

On prend $AB = 1$.

1. S a pour rapport $\frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$ et pour angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right) = \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$.

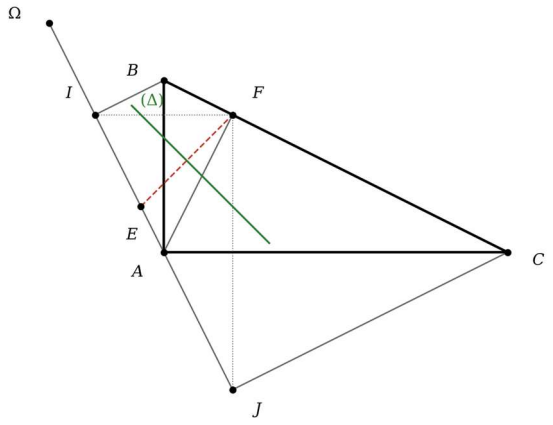
2. $J = S^{-1}(B)$ et S^{-1} est la similitude de centre A, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$: $AJ = 2AB$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AJ}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}$. De plus, S envoie le triangle AJB sur le triangle ABI, rectangle en I ; donc AJB **est rectangle en** B. *Construction :* J est l'intersection de la perpendiculaire à (AB) en B et de la demi-droite issue de A faisant l'angle $-\frac{\pi}{3}$ avec $\overrightarrow{AB}$ (J est du côté de (AB) opposé à C).

3. a. S est de rapport $\frac{1}{2}$ et $S(J) = B$, donc $BM' = S(J)S(M) = \frac{1}{2}JM$. La symétrie S_Δ échange B et C et envoie M sur N, donc $BN = CM$. Ainsi :

$$BM' = BN \Leftrightarrow \frac{1}{2}JM = CM \Leftrightarrow JM = 2CM.$$

b. $JM = 2CM \Leftrightarrow MJ^2 - 4MC^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MJ} - 2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MJ} + 2\overrightarrow{MC}\right) = 0$. Soit G_1 le barycentre de $(J,1)$, $(C,-2)$ et G_2 celui de $(J,1)$, $(C,2)$: $\overrightarrow{MJ} - 2\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MG_1}$ et $\overrightarrow{MJ} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG_2}$. La condition s'écrit $\overrightarrow{MG_1}\cdot\overrightarrow{MG_2} = 0$: **l'ensemble cherché est le cercle de diamètre** $[G_1G_2]$. *Contrôle :* $AJ = 2 = 2AC$, donc A appartient à ce cercle. (Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\vec{v}\right)$ orthonormé direct, $C\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $J\left(1;-\sqrt{3}\right)$, $G_1\left(0;2\sqrt{3}\right)$, $G_2\left(\frac{2}{3};0\right)$; le centre est $\left(\frac{1}{3};\sqrt{3}\right)$ et le rayon $\frac{2\sqrt{7}}{3}$.)

Corrigé de l'exercice 4



Exercice 4 : A milieu de $[IJ]$; l'axe (Δ) de σ est la médiatrice de $[EF]$.

L'hypothèse $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ donne $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}$: ABC est indirect.

1. a. La symétrie $S_{(AB)}$ fixe A et B et envoie F sur I ; elle conserve les angles géométriques, donc $\widehat{AIB} = \widehat{AFB} = \frac{\pi}{2}$: $(BI) \perp (AI)$. De même $S_{(AC)}$ donne $\widehat{AJC} = \widehat{AFC} = \frac{\pi}{2}$: $(CJ) \perp (AJ)$.

b. $(AB) \perp (AC)$ en A, donc $S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = S_A$. Alors $S_A(I) = S_{(AC)}\left(S_{(AB)}(I)\right) = S_{(AC)}(F) = J$: **A est le milieu de** $[IJ]$.

2. a. Rapport $\frac{AC}{BA} = 2$; angle $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

b. Le centre Ω de S vérifie $\left(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ et $\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega C}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$: il appartient au cercle de diamètre $[AB]$ et au cercle de diamètre $[AC]$. Ces deux cercles se coupent en A et en F (car $\widehat{AFB} = \widehat{AFC} = \frac{\pi}{2}$). Or $\Omega \neq A$ puisque $S(A) = C \neq A$. Donc $\Omega = F$.

c. (AB) est la médiatrice de $[FI]$. S transforme (AB) en $\left(S(A)S(B)\right) = (CA)$ et conserve milieux et orthogonalité : (AC) est la médiatrice de $[S(F)S(I)] = [F\,S(I)]$. Donc $S(I) = S_{(AC)}(F) = J$. Enfin $S(A) = C$ et $S(I) = J$ donnent $CJ = 2AI = IJ$ (puisque A est le milieu de $[IJ]$).

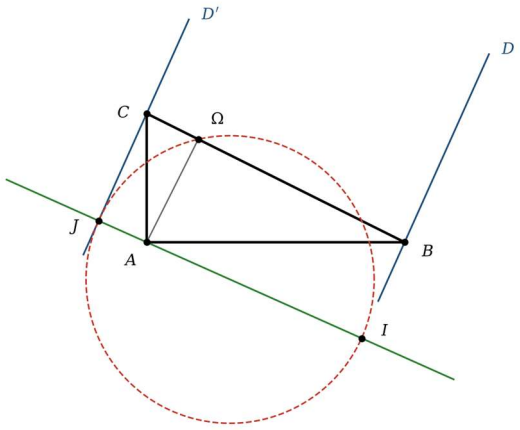
3. a. D'après 2.c, $S(F) = F$ et $S(I) = J$, donc $FJ = 2FI$. Le rapport de σ est $\frac{FJ}{IF} = 2$.

b. $\sigma \circ \sigma$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $2^2 = 4$, et $\sigma \circ \sigma(I) = \sigma(F) = J$. Donc $\overrightarrow{\Omega J} = 4\,\overrightarrow{\Omega I}$.

c. Écrivons $\sigma = h_{(\Omega,2)} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ h_{(\Omega,2)}$. Alors $\sigma(I) = S_\Delta\left(h_{(\Omega,2)}(I)\right) = S_\Delta(E)$. Comme $\sigma(I) = F$, on obtient $S_\Delta(E) = F$ avec $E \neq F$: **(Δ) est la médiatrice de** $[EF]$.

Corrigé de l'exercice 5

Remarque sur l'énoncé. L'angle imprimé dans la 1re édition est illisible ; le triangle étant rectangle en A, on a rétabli $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$.



Exercice 5 : $S(J) = I$ et le cercle de diamètre $[IJ]$ passe par Ω.

1. a. Angle : $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Rapport : $\frac{AB}{CA} = 2$.

b. Le centre Ω vérifie $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ et $\left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$: il appartient aux cercles de diamètres $[AB]$ et $[AC]$, qui se coupent en A et en H, projeté orthogonal de A sur (BC). Comme $S(A) = B \neq A$, $\Omega \neq A$. Donc $\Omega = H$.

2. a. S est d'angle $\frac{\pi}{2}$: l'image d'une droite est perpendiculaire à cette droite.

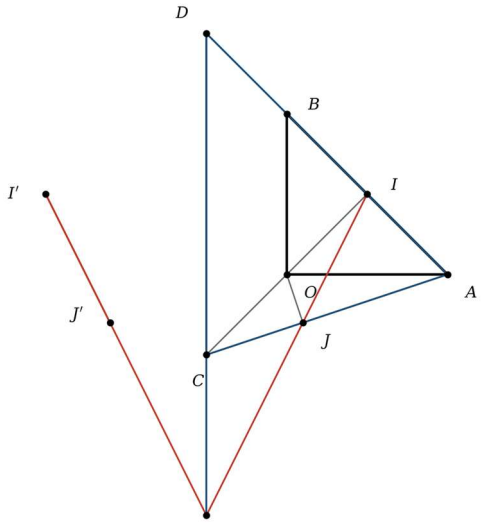
– D' passe par C ; $S(D')$ passe par $S(C) = A$ et est perpendiculaire à D' : $S(D') = \Delta$.

– Δ passe par A ; $S(\Delta)$ passe par $S(A) = B$ et est perpendiculaire à Δ : $S(\Delta) = D$.

b. J est l'intersection de D' et Δ, donc $S(J)$ est l'intersection de $S(D') = \Delta$ et $S(\Delta) = D$: $S(J) = I$.

c. $S(J) = I$ donne $\left(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega I}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ ($\Omega \neq J$, sinon $I = S(J) = J$, alors que $D \neq D'$). Donc Ω voit $[IJ]$ sous un angle droit : **le cercle de diamètre** $[IJ]$ **passe par** Ω.

Corrigé de l'exercice 6



Exercice 6 : les droites (IJ), $(I'J')$ et (CD) concourent sur (CD).

1. $C = S_O(I)$ et $D = S_B(I)$ donnent $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BI}$, d'où

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{BO}.$$

Le rapport de f est $\frac{DC}{AO} = \frac{2BO}{AO} = 2$ et son angle est $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{DC}\right) = \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BO}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$.

2. a. $(CD) \parallel (OB)$ et $(OB) \perp (OA)$, donc $(AO) \perp (CD)$. Par ailleurs $D \in (AB)$ (car $I \in (AB)$ et $D = S_B(I)$), donc $(AD) = (AB)$, et $(CO) = (OI) \perp (AB)$ (OAB isocèle en O). Les hauteurs issues de A et de C du triangle ACD passent par O : O **est l'orthocentre de** ACD.

b. f est d'angle $\frac{\pi}{2}$.

– (OJ) passe par O ; $f\big((OJ)\big)$ passe par $f(O) = C$ et est perpendiculaire à (OJ) : c'est (AC), donc $f\big((OJ)\big) = (AJ)$.

– $(AJ) = (AC)$ passe par A ; $f\big((AJ)\big)$ passe par $f(A) = D$ et est perpendiculaire à (AC) : c'est la hauteur issue de D dans ACD. Elle passe par l'orthocentre O ; son pied sur (AC) est donc le projeté de O, c'est-à-dire J. Ainsi $f\big((AJ)\big) = (OJ)$.

Par conséquent $f(J) = f\big((OJ) \cap (AJ)\big) = (AJ) \cap (OJ) = \{J\}$: J est invariant. f étant de rapport $2 \neq 1$, J **est le centre de** f.

3. a. A, I, B, D sont alignés dans cet ordre avec $AI = IB = BD$, donc $ID = 2IA$: le rapport de g est $\frac{ID}{IA} = 2$. Écrivons $g = h_{(I,2)} \circ S_\Delta$: alors $S_\Delta(A) = h_{(I,2)}^{-1}(D) = B$ (milieu de $[ID]$), donc Δ est la médiatrice de $[AB]$, c'est-à-dire $(OI) = (IC)$. Comme $O \in \Delta$, $g(O) = h_{(I,2)}(O)$: $\overrightarrow{Ig(O)} = 2\overrightarrow{IO}$, d'où $g(O) = C$ (car $\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IO}$).

b. $g \circ f^{-1}(C) = g(O) = C$ et $g \circ f^{-1}(D) = g(A) = D$. $g \circ f^{-1}$ est une similitude indirecte de rapport $\frac{2}{2} = 1$, c'est-à-dire un antidéplacement ; il fixe les deux points distincts C et D : $g \circ f^{-1} = S_{(CD)}$.

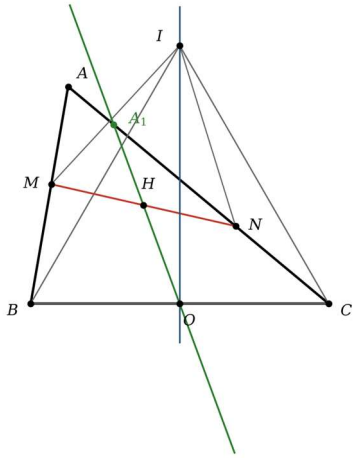
4. a. $f^{-1}(J) = J$, donc $g \circ f^{-1}(J) = g(J) = J'$; $f^{-1}(I') = I$, donc $g \circ f^{-1}(I') = g(I) = I$.

b. $S_{(CD)}$ échange J et J', et I' et I ; elle transforme donc la droite (IJ) en la droite $(I'J')$. Dans le repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$: $I\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, $J\left(\frac{1}{10}\,;-\frac{3}{10}\right)$, donc (IJ) est dirigée par $(1\,;2)$ et n'est pas parallèle

à (CD), dirigée par $(0\,;1)$. Soit P le point d'intersection de (IJ) et (CD) : $S_{(CD)}(P) = P$ appartient à l'image $(I'J')$ de (IJ). **Les droites** (IJ)**,** $(I'J')$ **et** (CD) **concourent en** P**.**

Corrigé de l'exercice 7

Remarque sur l'énoncé. La 1re édition faisait décrire à M la droite (AB) privée de A. Or c'est $M = B$ qu'il faut exclure : un point de (BC) n'est dans aucun demi-plan **ouvert** de bord (BC). On fait donc décrire à M la droite (AB) privée de B.



Exercice 7 : IMN équilatéral ; H décrit la droite (OA_1), en vert.

1. Soit I le point tel que IBC soit équilatéral direct, $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$. Comme $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$, I et A sont du même côté de (BC) (arc capable). Soit $r = R_{\left(I, \frac{\pi}{3}\right)}$; alors $r(B) = C$. r transforme (AB) en la droite passant par C dirigée par l'image de $\overrightarrow{BA}$ par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$; or $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$, donc $r\big((AB)\big) = (AC)$ et $\overrightarrow{Cr(M)}$ a le même sens par rapport à $\overrightarrow{CA}$ que $\overrightarrow{BM}$ par rapport à $\overrightarrow{BA}$. Ainsi $r(M) \in (AC)$, $Cr(M) = BM$, et $r(M)$ est du même côté de (BC) que M : $r(M) = N$. Unicité : un déplacement est déterminé par les images de deux points distincts (ici B et un point $M \neq B$). **Angle :** $\frac{\pi}{3}$ **; centre :** I, sommet du triangle équilatéral direct IBC construit du côté de A (c'est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ contenant A du cercle circonscrit à ABC).

2. a. (OI) est la médiatrice de $[BC]$. $f(B) = h\left(S_{(OI)}(C)\right) = h(B) = B'$, où $\overrightarrow{IB'} = 2\overrightarrow{IB}$ (B' est le symétrique de I par rapport à B). $f(I) = h\left(S_{(OI)}(I)\right) = h(I) = I$.

b. $S_{(OI)} \circ r$ est un antidéplacement qui fixe I et B ; c'est donc la symétrie orthogonale d'axe (IB). D'où

$$f = h_{(I,2)} \circ S_{(IB)}.$$

f **est la similitude indirecte de centre** I**, de rapport** 2 **et d'axe** (IB) (forme réduite, $I \in (IB)$).

c. $S_{(IB)}\big((AB)\big) = S_{(OI)}\left(r\big((AB)\big)\right) = S_{(OI)}\big((AC)\big)$ est la droite L symétrique de (AC) par rapport à (OI) ; elle passe par B. Son image par $h_{(I,2)}$ est la parallèle à L passant par B'. Comme $M \neq B$, $M' \neq B'$: **l'ensemble des points** M' **est la droite passant par** B' **et parallèle à** L**, privée de** B'.

d. $IM = IN$ et $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$: IMN est équilatéral direct. Son côté $[MN]$ a pour milieu H, d'où $IH = \frac{\sqrt{3}}{2} IM$ et $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IH}\right) \equiv \frac{\pi}{6}$. Ainsi $H = s(M)$, où s est la similitude directe de centre I, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et

d'angle $\frac{\pi}{6}$. L'ensemble des points H est l'image par s de (AB) privée de B : c'est **la droite** $s\big((AB)\big)$ **privée de** $s(B) = O$ (milieu de $[BC] = [B\,r(B)]$). Cette droite passe par O et par $A_1 = s(A)$, milieu de $[A\,r(A)]$ ($A_1 \in (AC)$) ; elle fait l'angle $\frac{\pi}{6}$ avec (AB).

Corrigé de l'exercice 8

$\Omega O = \Omega M$, donc Ω appartient à la médiatrice D de $[OM]$.

1. Soit Δ l'axe de s : c'est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{MOM'}$, et $s = h_{(O,k)} \circ S_\Delta$, avec $k = \frac{OM'}{OM}$.

– $\Omega' = s(\Omega) = h_{(O,k)}\big(S_\Delta(\Omega)\big)$ appartient à la droite $L = S_\Delta\big((O\Omega)\big)$, symétrique de $(O\Omega)$ par rapport à Δ (l'homothétie de centre O conserve les droites passant par O).

– ζ' passe par $s(O) = O$ et $s(M) = M'$, donc son centre Ω' appartient à la médiatrice de $[OM']$.

Construction : on trace la bissectrice Δ de $\widehat{MOM'}$, puis la symétrique L de $(O\Omega)$ par rapport à Δ ; Ω' **est le point d'intersection de** L **et de la médiatrice de** $[OM']$. Ces deux droites sont sécantes : sinon L serait perpendiculaire à (OM'), donc $(O\Omega)$ perpendiculaire à (OM), ce qui est impossible dans le triangle isocèle $O\Omega M$ de base $[OM]$.

2. ζ' **est le cercle de centre** Ω' **passant par** O (et par M') ; son rayon vaut $k\,\Omega O$.

Corrigé de l'exercice 9

> **Remarque sur l'énoncé.** Les cas c et d étaient identiques dans la 1re édition : la barre de conjugaison du cas d, perdue à l'impression, est rétablie.

On utilise : pour $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, $\frac{1}{1-e^{i\theta}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\cot\frac{\theta}{2}$.

a. $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $|a| = 1$, $a \neq 1$: f est la **rotation d'angle** $\frac{\pi}{4}$ de centre d'affixe

$$\frac{1+2i}{1-e^{i\frac{\pi}{4}}} = (1+2i)\left(\frac{1}{2} + \frac{1+\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{1+2\sqrt{2}}{2} + \frac{3+\sqrt{2}}{2}\,i.$$

b. $a = -2$ réel, $a \neq 1$: f est l'**homothétie de rapport** -2 et de centre d'affixe $\frac{1+2i}{3}$ (similitude directe de rapport 2 et d'angle π).

c. $a = 1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$: f est la **similitude directe de rapport** $\sqrt{2}$**, d'angle** $\frac{\pi}{4}$ et de centre d'affixe $\frac{1+2i}{1-(1+i)} = \frac{1+2i}{-i} = -2 + i$.

d. $z' = a\overline{z} + b$ avec $a = 1 + i$, $|a| = \sqrt{2} \neq 1$: f est une **similitude indirecte de rapport** $\sqrt{2}$, de centre I d'affixe

$$z_I = \frac{a\overline{b} + b}{1 - |a|^2} = \frac{(1+i)(1-2i) + 1 + 2i}{1-2} = \frac{4+i}{-1} = -4 - i.$$

On a $z' - z_I = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\,\overline{(z - z_I)}$: l'axe est la droite passant par $I(-4\,;-1)$ et dirigée par le vecteur d'affixe $e^{i\frac{\pi}{8}}$ (pour $z = z_I + te^{i\frac{\pi}{8}}$, t réel, on trouve bien $z' - z_I = \sqrt{2}\,(z - z_I)$).

Corrigé de l'exercice 10

L'écriture complexe de s est $z' - z_0 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}(z - z_0)$ avec $\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1 + i$:

$$z' = (-1+i)(z - 1 + i) + 1 - i = (-1+i)z + 1 - 3i.$$

1. Faux. L'écriture proposée a le bon coefficient mais pas la bonne constante : $1-i \neq 1-3i$. (Elle fixerait le point d'affixe $\frac{1-i}{2-i}$ et non M_0.)

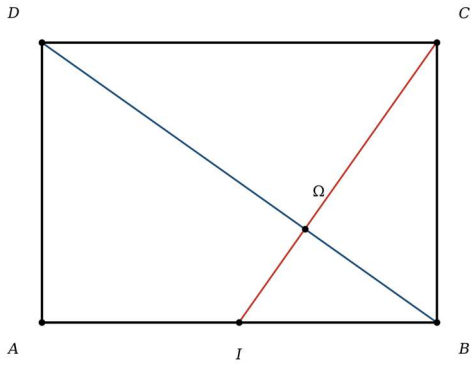
2. Faux. s est d'angle $\frac{3\pi}{4}$: la direction de D, d'angle polaire $-\frac{\pi}{4}$, devient d'angle polaire $-\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$; D' est donc **verticale**, et ne peut pas être la droite horizontale $y=\sqrt{2}$. Précisément, $s\left(\sqrt{2}\right)=\left(1-\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{2}-3\right)$ et $s\left(i\sqrt{2}\right)=\left(1-\sqrt{2}\right)-i\left(\sqrt{2}+3\right)$: D' a pour équation $x=1-\sqrt{2}$.

3. Faux. s^{-1} est la similitude de centre M_0, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$. Avec $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}=\frac{-1-i}{2}$:

$$z'=\frac{-1-i}{2}(z-1+i)+1-i=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}z+2-i.$$

La constante est $2-i$, et non -1.

Corrigé de l'exercice 11



Exercice 11 : $(BD)\perp(CI)$ en Ω, centre de T.

Dans le repère $(A;\vec{u},\vec{v})$: $A(0)$, $B\left(\sqrt{2}\right)$, $C\left(\sqrt{2}+i\right)$, $D(i)$, $I\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Partie A. 1. $S(D)=C$ et $S(C)=B$: $ai+b=\sqrt{2}+i$ et $a\left(\sqrt{2}+i\right)+b=\sqrt{2}$. Par différence, $a\sqrt{2}=-i$, d'où

$$a=-\frac{\sqrt{2}}{2}i, \qquad b=\sqrt{2}+i-ai=\frac{\sqrt{2}}{2}+i.$$

(S est donc la similitude T de la question suivante.)

2. $-\frac{\sqrt{2}}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$: T a pour **rapport** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **et pour angle** $-\frac{\pi}{2}$.

3. $T(B)$ a pour affixe $-\frac{\sqrt{2}}{2}i\times\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+i=\frac{\sqrt{2}}{2}$: $T(B)=I$.

4. $T(D)=C$ et $T(B)=I$, et T est d'angle $-\frac{\pi}{2}$: $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{CI}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}$, donc $(BD)\perp(CI)$.

5. Le centre a pour affixe

$$z_\Omega=\frac{b}{1-a}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}i}=\frac{\sqrt{2}+2i}{2+i\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{2}+2i\right)\left(2-i\sqrt{2}\right)}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}i.$$

– (BD) a pour équation $\frac{x}{\sqrt{2}}+y=1$, et $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$: $\Omega\in(BD)$.

– (CI) a pour équation $y=\sqrt{2}x-1$, et $\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}-1=\frac{1}{3}$: $\Omega\in(CI)$. Donc Ω **est le point d'intersection de** (BD) **et** (CI).

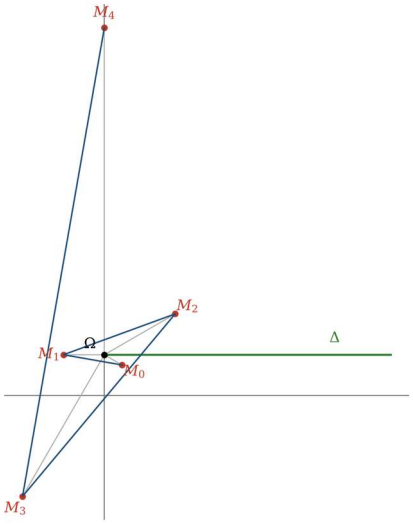
Partie B. 1. $CD^2 - CB^2 = 2 - 1 = 1$ et $ID^2 - IB^2 = \left(\frac{1}{2} + 1\right) - \frac{1}{2} = 1$: $C \in (E)$ et $I \in (E)$.

2. a. $MD^2 - MB^2 = \left(\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}\right) = \overrightarrow{BD} \cdot 2\overrightarrow{MJ}$, où J **est le milieu de** $[BD]$.

b. $M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}$. Soit P le point de (BD) tel que $\overrightarrow{JP} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$; comme $BD^2 = 3$, $\overrightarrow{PJ} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}$. Alors $M \in (E) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PJ}\right) \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. (E) **est la droite perpendiculaire à** (BD) **en** P**.** (On vérifie que P a pour affixe $\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i$: $P = \Omega$.)

c. C et I sont deux points distincts de (E), donc $(CI) = (E)$, qui est perpendiculaire à (BD).

Corrigé de l'exercice 12



Exercice 12 : les points M_0 à M_4 (spirale de centre Ω) et la demi-droite Δ.

1. $z' = az + b$ avec $a = -\left(\sqrt{3} + i\right) \neq 0$: f est une similitude directe. $a \cdot i + b = -i\sqrt{3} + 1 - 1 + i + i\sqrt{3} = i$: le point $\Omega(i)$ est fixe, c'est le centre. $|a| = 2$ et $a = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$: **rapport 2, angle** $\frac{7\pi}{6}$.

2. $z_0 - i = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$: $\Omega M_0 = \frac{1}{2}$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_0}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

3. a. On calcule $M_1(-1\,;1)$, $M_2\left(\sqrt{3}\,;2\right)$, $M_3\left(-2\,;1-2\sqrt{3}\right)$, $M_4(0\,;9)$ (voir la figure).

b. Comme Ω est le centre, $z_{n+1} - i = a\,(z_n - i)$. La propriété est vraie pour $n = 0$. Si $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$, alors $z_{n+1} - i = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} \cdot 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i) = 2^{n+1}e^{i\frac{7(n+1)\pi}{6}}(z_0 - i)$. Par récurrence, l'égalité est vraie pour tout n.

c. $\Omega M_n = |z_n - i| = 2^n \times \frac{1}{2} = 2^{n-1}$. $2^{n-1} \geq 100 \Leftrightarrow n - 1 \geq 7$ (car $2^6 = 64 < 100 \leq 128 = 2^7$) : le plus petit entier est $n = 8$.

4. a. $7 \times (-5) - 12 \times (-3) = -35 + 36 = 1$. Si (x, y) est solution, $7(x + 5) = 12(y + 3)$; 12 divise $7(x + 5)$ et pgcd(7,12) $= 1$, donc (lemme de Gauss) 12 divise $x + 5$: $x = -5 + 12k$, puis $y = -3 + 7k$. Réciproquement ces couples conviennent :

$$\mathcal{S} = \{(-5 + 12k\,; -3 + 7k),\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

b. Δ est la **demi-droite d'origine** Ω **dirigée par** $\vec{u}$ (portion de la droite $y = 1$ pour $x \geq 0$).

c. $M_n \in \Delta \Leftrightarrow z_n - i$ est un réel strictement positif $\Leftrightarrow \frac{7n\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow 7n - 1 = 12m$ pour un entier m, c'est-à-dire (n, m) solution de (E). Donc $n = -5 + 12k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et $n \geq 0 \Leftrightarrow k \geq 1$:

$$\{n \in \mathbb{N} \ / \ M_n \in \Delta\} = \{12k - 5,\ k \geq 1\} = \{7,19,31, \dots\},$$

dont le plus petit élément est 7.

Corrigé de l'exercice 13

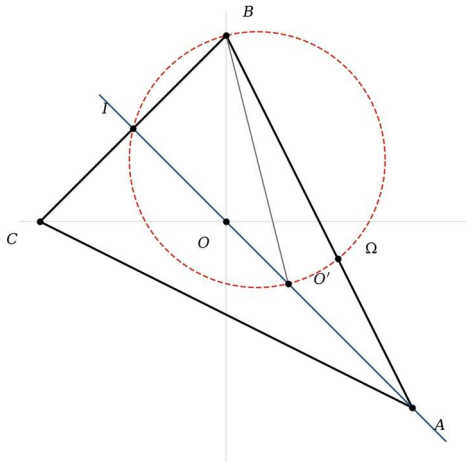
Écritures complexes : s_1: $z' = \frac{-1+i}{2}z + \frac{3-i}{2}$; s_2: $z' = -2z$. Pour s_3, cherchons $z' = az + b$ avec $a = \alpha + i\beta$: $az = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y)$. L'identification donne $\alpha = -1$, $\beta = -1$ et $b = -1 + 2i$: s_3: $z' = (-1 - i)z - 1 + 2i$ (similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$).

$f = s_1 \circ s_2$: $z' = \frac{-1+i}{2}(-2z) + \frac{3-i}{2} = (1 - i)z + \frac{3-i}{2}$. $1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$: f est la **similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $-\frac{\pi}{4}$**, de centre d'affixe

$$\frac{\frac{3-i}{2}}{1-(1-i)} = \frac{3-i}{2i} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$$

$g = s_1 \circ s_3$: $\frac{-1+i}{2}(-1 - i) = \frac{2}{2} = 1$ et $\frac{-1+i}{2}(-1 + 2i) + \frac{3-i}{2} = \frac{-1-3i+3-i}{2} = 1 - 2i$. Donc $z' = z + 1 - 2i$: g **est la translation de vecteur** $\vec{w}(1\,;-2)$ (les angles $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$ s'annulent et les rapports $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sqrt{2}$ se compensent).

Corrigé de l'exercice 14



Exercice 14 : I, O, O′, A alignés ; I et Ω sur le cercle de diamètre [BO′].

g a pour écriture $z' = \frac{1+i}{3}z + \frac{1-i}{3}$.

1. a. $g(B)$: $\frac{(1+i)i+1-i}{3} = \frac{i-1+1-i}{3} = 0$, donc $g(B) = O$.

b. $z_I = \frac{-1+i}{2}$ et $z_A = 1 - i = -2z_I$: $\overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{OI}$, donc O, A, I **sont alignés**.

2. a. $a = \frac{1+i}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$: g est la **similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$**, de centre Ω d'affixe

$$z_\Omega = \frac{\frac{1-i}{3}}{1-\frac{1+i}{3}} = \frac{1-i}{2-i} = \frac{(1-i)(2+i)}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i.$$

b. $z_\Omega - z_B = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i = \frac{3}{5}(1-2i) = \frac{3}{5}(z_A - z_B) : \overrightarrow{B\Omega} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$, donc A, B, Ω **sont alignés**.

3. a. $\frac{z_I}{z_B} = \frac{-1+i}{2i} = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, d'où $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI}\right) \equiv \frac{\pi}{4}$. L'image de (OB) par g passe par $g(B) = O$ et fait l'angle $\frac{\pi}{4}$ avec (OB) : c'est (OI).

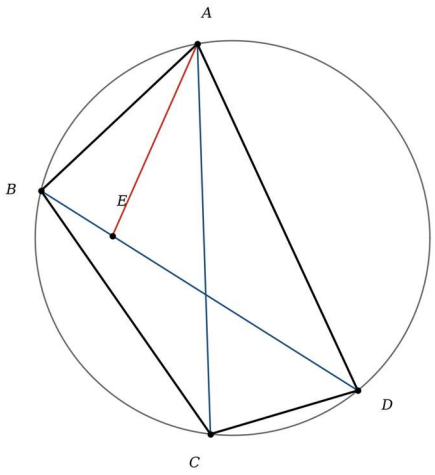
b. $g(B) = O$ et $g(O) = O'$: l'image de (BO) est (OO') (avec $O' \neq O$, $z_{O'} = \frac{1-i}{3}$).

c. D'après a et b, $(OO') = (OI)$; avec 1.b, I, O, O', A **sont alignés**.

4. – $OB = OC = 1$: le triangle OBC est isocèle en O, donc la médiane (OI) est perpendiculaire à (BC), soit $(IB) \perp (IO')$ (car $O' \in (OI)$, $O' \neq I$). Ainsi I voit $[BO']$ sous un angle droit.

– $g(B) = O$, $g(O) = O'$ et g est d'angle $\frac{\pi}{4}$ de centre Ω : $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega O}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega O'}\right) \equiv \frac{\pi}{4}$, d'où $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega O'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$. I **et** Ω **appartiennent au cercle de diamètre** $[BO']$**.**

Corrigé de l'exercice 15



Exercice 15 : $E = S(B)$ est sur $[BD]$.

S a pour angle $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ et pour rapport $\frac{AD}{AC}$.

1. a. $S(C) = D$ et $S(B) = E$: $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DE}\right)$ est l'angle de S, donc $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DE}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ $[2\pi]$.

b. En angles de droites (modulo π), le théorème de l'angle inscrit donne $(AC, AD) \equiv (BC, BD)$ $[\pi]$. Alors

$$(DB, DE) \equiv (DB, CB) + (CB, DE) \equiv (BD, BC) + (BC, BD) \equiv 0\ [\pi].$$

Les droites (DB) et (DE) sont parallèles et ont le point D en commun : $E \in (BD)$.

c. $DE = S(C)S(B) = \frac{AD}{AC}\,CB$, donc $AD \times BC = DE \times AC$.

2. a. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ (angle de S). Par la relation de Chasles :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right) + \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}\right)\ [2\pi].$$

De plus $AE = \frac{AD}{AC}AB$, d'où $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$.

b. S' a pour rapport $\frac{AC}{AB}$ et pour angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Le point $S'(E)$ vérifie $AS'(E) = \frac{AC}{AB}AE = AD$ et $\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AS'(E)}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}\right)$. Donc $S'(E) = D$.

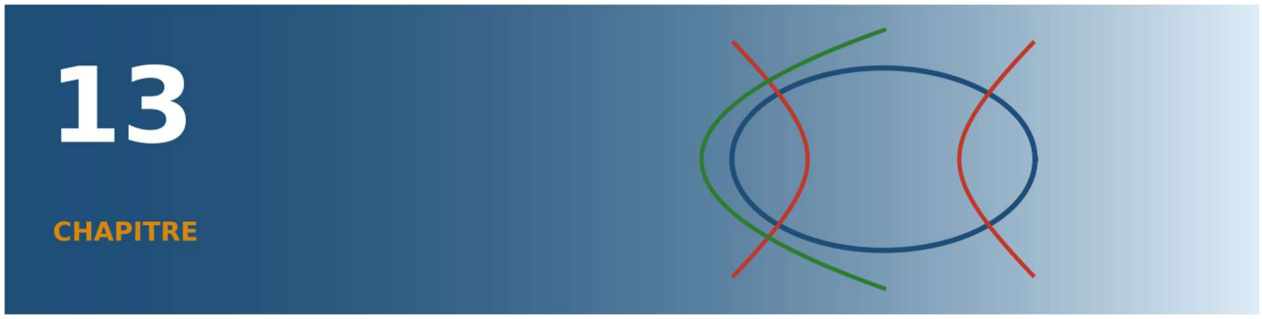
c. $S'(B) = C$ et $S'(E) = D$: $CD = \frac{AC}{AB}BE$, soit $AB \times CD = AC \times BE$.

3. $E \in [BD]$, donc $BD = BE + ED$, et

$$AC \times BD = AC \times BE + AC \times ED = AB \times CD + AD \times BC.$$

C'est le **théorème de Ptolémée** : dans un quadrilatère convexe inscrit, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.

Chapitre 13 — Coniques



Cours • 20 exercices • Corrigés détaillés

Ce que vous devez savoir faire à la fin du chapitre
– Utiliser la définition d'une conique par foyer, directrice et excentricité.
– Passer de l'équation réduite d'une parabole, d'une ellipse ou d'une hyperbole à ses éléments caractéristiques (sommets, foyers, directrices, excentricité, asymptotes), et réciproquement.
– Réduire une équation $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ par complétion des carrés et reconnaître la courbe.
– Écrire l'équation d'une tangente et exploiter les propriétés focales (propriétés bifocales, cordes focales).
– Reconnaître une conique donnée par une représentation paramétrique, par une condition complexe ou après une rotation du repère.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 2, chapitre 5 : *Coniques*).

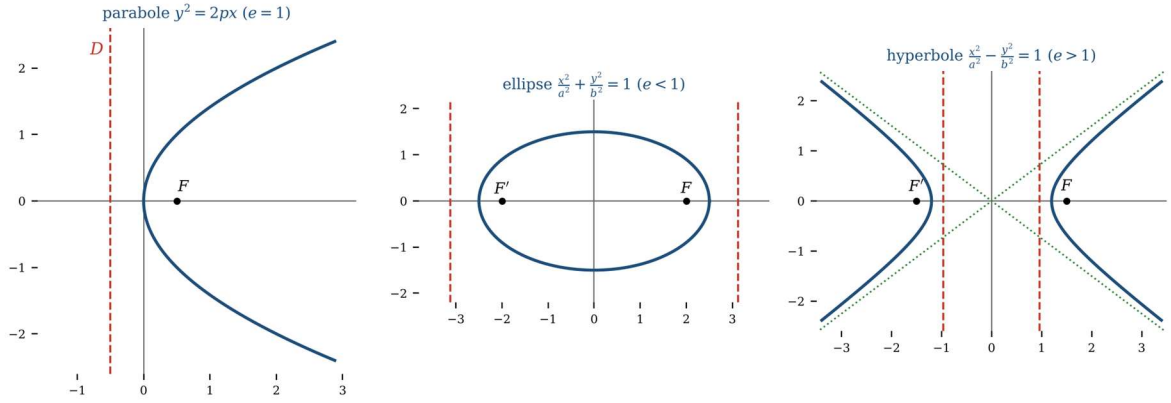
Cours

I. Définition générale

Définition. Soit D une droite, F un point n'appartenant pas à D et e un réel strictement positif. Pour tout point M, on note H son projeté orthogonal sur D. On appelle **conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité e** l'ensemble des points M tels que

$$\frac{MF}{MH} = e, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad MF = e\, d(M, D).$$

C'est une **parabole** si $e = 1$, une **ellipse** si $0 < e < 1$, une **hyperbole** si $e > 1$. La perpendiculaire à D passant par F est l'**axe focal** ; c'est un axe de symétrie de la conique.



Les trois types de coniques, avec leurs foyers et leurs directrices (en pointillés rouges).

II. Parabole

Théorème. Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F, de directrice D, et K le projeté orthogonal de F sur D. Le **sommet** S de $\mathcal{P}$ est le milieu de $[FK]$; le réel $p = FK$ est le **paramètre** de $\mathcal{P}$.

Dans le repère orthonormé $(S, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où $\vec{\imath} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$, $\mathcal{P}$ a pour équation

$$y^2 = 2px, \qquad F\left(\frac{p}{2}\,;0\right), \qquad D\colon\ x = -\frac{p}{2}.$$

De même, $x^2 = 2py$ est la parabole de foyer $F\left(0\,;\frac{p}{2}\right)$ et de directrice $y = -\frac{p}{2}$.

Tangente. La tangente à la parabole $y^2 = 2px$ en $M_0(x_0\,;y_0)$ a pour équation $y_0y = p(x + x_0)$; celle à $x^2 = 2py$ a pour équation $x_0x = p(y + y_0)$. La tangente au sommet est l'axe $x = 0$ (respectivement $y = 0$).

III. Ellipse

Théorème. Soit $a > b > 0$ et $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. L'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est une **ellipse** de centre O, d'axe focal $(O, \vec{\imath})$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$. Elle admet deux couples foyer–directrice : $F(c\,;0)$ et $D\colon\ x = \frac{a^2}{c}$; $F'(-c\,;0)$ et $D'\colon\ x = -\frac{a^2}{c}$.

Ses **sommets** sont $A(a\,;0)$, $A'(-a\,;0)$ (sommets principaux) et $B(0\,;b)$, $B'(0\,;-b)$; a est le demi-grand axe et b le demi-petit axe.

Si $0 < a < b$, l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour axe focal $(O, \vec{\jmath})$: $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, foyers $(0\,;\pm c)$, directrices $y = \pm\frac{b^2}{c}$, excentricité $\frac{c}{b}$.

Tangente en $M_0(x_0\,;y_0)$: $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

Propriétés métriques (démontrées aux exercices 11 et 13). Pour tout point $M(x\,;y)$ de l'ellipse :

$$MF = a - ex, \qquad MF' = a + ex, \qquad MF + MF' = 2a.$$

Réciproquement, l'ensemble des points M tels que $MF + MF' = 2a$ (avec $2a > FF'$) est l'ellipse de foyers F et F' et de grand axe $2a$.

IV. Hyperbole

Théorème. Soit $a > 0$, $b > 0$ et $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. L'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est une **hyperbole** de centre O, d'axe focal $(O,\vec{\imath})$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$. Elle admet deux couples foyer–directrice : $F(c\,;0)$ et $D\colon\ x = \frac{a^2}{c}$; $F'(-c\,;0)$ et $D'\colon\ x = -\frac{a^2}{c}$.

Ses **sommets** sont $S(a\,;0)$ et $S'(-a\,;0)$. Elle admet deux **asymptotes** d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.

L'hyperbole $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour axe focal $(O,\vec{\jmath})$: sommets $(0\,;\pm b)$, foyers $(0\,;\pm c)$, directrices $y = \pm\frac{b^2}{c}$, excentricité $\frac{c}{b}$, mêmes asymptotes.

Tangente en $M_0(x_0\,;y_0)$: $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

Lorsque $a = b$, l'hyperbole est dite **équilatère** : ses asymptotes sont perpendiculaires et $e = \sqrt{2}$.

Toute hyperbole rapportée à ses asymptotes a une équation de la forme $XY = k$ $(k \neq 0)$.

Propriétés métriques (démontrées à l'exercice 7). Pour tout point $M(x\,;y)$ de l'hyperbole : $MF = |ex - a|$ et $MF' = |ex + a|$, d'où $|MF - MF'| = 2a$. Réciproquement, l'ensemble des points M tels que $|MF - MF'| = 2a$ (avec $2a < FF'$) est l'hyperbole de foyers F et F'.

V. Courbes d'équation $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Méthode — reconnaître la courbe. On complète les carrés pour se ramener, dans un repère translaté d'origine Ω, à une équation réduite. Selon le signe de AB :

Signe de AB	Ensemble possible
$AB = 0$ (un seul carré)	parabole, deux droites parallèles, une droite ou l'ensemble vide
$AB > 0$	ellipse, cercle, un point ou l'ensemble vide
$AB < 0$	hyperbole ou deux droites sécantes

Les éléments (foyers, sommets, directrices, asymptotes) se lisent dans le repère $(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, puis se traduisent dans le repère initial avec $X = x - x_\Omega$, $Y = y - y_\Omega$.

Méthode — représentations paramétriques usuelles.

– $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(t \in \mathbb{R})$ décrit l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (on utilise $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$).

– $x = \frac{a}{\cos t}$, $y = b\tan t$ décrit une partie de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (on utilise $\frac{1}{\cos^2 t} - \tan^2 t = 1$).

Il faut toujours préciser **quelle partie** de la courbe est décrite (étude des signes, de l'image des fonctions coordonnées).

Attention. Dans $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, l'axe focal est porté par le **plus grand** des deux dénominateurs. Pour une hyperbole, il est porté par la variable affectée du signe +, quelle que soit la taille des dénominateurs.

Exercices

Pour tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et p désigne un réel strictement positif.

Exercice 1 — Définition de la parabole

Soit D la droite d'équation $x=-\frac{p}{2}$ et F le point de coordonnées $\left(\frac{p}{2}\,;0\right)$. Soit $\mathcal{P}=\{M(x\,;y)\ /\ MF=MH\}$, où H est le projeté orthogonal de M sur D. Montrer que $M\in\mathcal{P}$ équivaut à $y^2=2px$.

Exercice 2

1. Pour chacune des paraboles suivantes, déterminer son foyer, son sommet et une équation de sa directrice :
   a. $y^2=4x$; b. $x^2=6y$; c. $y^2=-8x$; d. $x^2=-3y$.
2. Montrer que les courbes $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ d'équations respectives $y^2=5x-1$, $x^2-4y+2x-1=0$ et $y^2-x+y=0$ sont des paraboles dont on déterminera les éléments caractéristiques.
3. Vérifier que $A(2\,;1)\in\mathcal{P}_3$ et écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{P}_3$ en A.
4. Déterminer les coordonnées du point B de $\mathcal{P}_3$ tel que la tangente à $\mathcal{P}_3$ en B soit perpendiculaire à T.

Exercice 3

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2=2px$, de foyer F et de directrice D. Une droite variable Δ passant par F coupe $\mathcal{P}$ en deux points M et M'.

1. Déterminer l'ensemble des milieux de $[MM']$.
2. Montrer que $\frac{1}{FM}+\frac{1}{FM}=\frac{2}{p}$.
3. On désigne par T et T' les tangentes à $\mathcal{P}$ respectivement en M et en M'.
   a. Montrer que T est perpendiculaire à T'.
   b. Soit A le point d'intersection de T et T'. Montrer que $A\in D$.

Exercice 4

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2=2px$. Soit M et M' deux points de $\mathcal{P}$, distincts de O, tels que le triangle MOM' soit rectangle en O. Montrer que la droite (MM') coupe l'axe focal de $\mathcal{P}$ en un point fixe que l'on déterminera.

Exercice 5

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2=2px$, de foyer F et de directrice D.

1. À quelle condition la droite d'équation $ax+by+c=0$ (avec $(a,b)\neq(0,0)$) est-elle tangente à $\mathcal{P}$?
2. La tangente en un point M de $\mathcal{P}$, distinct de O, coupe l'axe de symétrie en un point A. Montrer que la tangente au sommet de $\mathcal{P}$ passe par le milieu I de $[MA]$.
3. Soit T_1 et T_2 deux tangentes perpendiculaires à $\mathcal{P}$. Montrer que $\frac{1}{d(F,T_1)^2}+\frac{1}{d(F,T_2)^2}=\frac{4}{p^2}$, où $d(F,T)$ désigne la distance du point F à la droite T.

Exercice 6

Montrer que l'orthocentre de tout triangle formé par trois tangentes à une parabole appartient à la directrice de cette parabole.

Exercice 7 — Définition de l'hyperbole

Soit a, b, c trois réels strictement positifs tels que $c^2 = a^2 + b^2$. On donne le point $F(c\,;0)$ et la droite D d'équation $x = \frac{a^2}{c}$. Soit $\mathcal{H} = \{M(x\,;y) \;/\; a\,MF = c\,MH\}$, où H est le projeté orthogonal de M sur D.

1. Montrer que $M \in \mathcal{H}$ équivaut à $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
2. Prouver qu'il existe un second point F' et une droite D' tels que, avec les notations correspondantes, $\frac{MF}{MF} = \frac{MH'}{MH}$ pour tout $M \in \mathcal{H}$.
3. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$?

Exercice 8

1. Pour chacune des hyperboles suivantes, déterminer ses foyers, ses sommets, une équation de chacune de ses directrices, ses asymptotes et son excentricité :
   a. $4x^2 - 36y^2 = 121$; b. $-9x^2 + 4y^2 = 196$; c. $2x^2 - 2y^2 = 1$.
2. Identifier les ensembles des points $M(x\,;y)$ vérifiant :
   a. $x = \frac{2}{\cos t}$ et $y = 3\tan t$, $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$;
   b. $x = 2\left(t + \frac{1}{t}\right)$ et $y = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$, $t \in \mathbb{R}^*$;
   c. $x = \frac{1}{\cos 2t}$ et $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan 2t$, $t \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Exercice 9

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1. À quelle condition la droite d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ (avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$) est-elle tangente à $\mathcal{H}$?
2. Quel est l'ensemble des points par lesquels passent deux tangentes à $\mathcal{H}$ perpendiculaires ?
3.
   a. Soit P un point du plan de coordonnées $(u\,;v)$. Discuter le nombre de tangentes à $\mathcal{H}$ passant par P.
   b. Dans le cas où il existe deux tangentes, écrire une équation de la droite qui joint leurs points de contact.

Exercice 10

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, F et F' ses foyers. Soit T une tangente à $\mathcal{H}$. Calculer, en fonction de a et b, le produit $d(F,T) \times d(F',T)$.

Exercice 11 — Définition de l'ellipse

Soit a, b, c trois réels strictement positifs tels que $a^2 = b^2 + c^2$. On donne le point $F(c\,;0)$ et la droite D d'équation $x = \frac{a^2}{c}$. Soit $\xi = \{M(x\,;y) \;/\; a\,MF = c\,MH\}$, où H est le projeté orthogonal de M sur D.

1. Montrer que $M \in \xi$ équivaut à $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
2. Prouver qu'il existe un second point F' et une droite D' tels que, avec les notations correspondantes, $\frac{MF'}{MF}=\frac{MH}{MH}$ pour tout $M \in \xi$.
3. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $MF+MF'=2a$?

Exercice 12

1. Pour chacune des courbes suivantes, déterminer, s'il s'agit d'une ellipse, ses foyers, ses sommets, une équation de chacune de ses directrices et son excentricité :
   a. $4x^2+36y^2=121$; b. $9x^2+4y^2=196$; c. $2x^2+2y^2=1$.
2. Identifier les ensembles des points $M(x\,;y)$ vérifiant :
   a. $x=5\cos t$ et $y=3\sin t, t \in \mathbb{R}$;
   b. $x=\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$ et $y=\frac{e^t}{e^{2t}+1}, t \in \mathbb{R}$.

Exercice 13

Soit ξ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, avec $a>b$, et M un point de ξ d'abscisse x_0.

1. Déterminer ses foyers F et F', ses sommets, une équation de chacune de ses directrices et son excentricité.
2. Calculer MF et MF', et vérifier que $MF+MF'=2a$.
3. Une droite variable Δ passant par F coupe ξ en M et M'. Prouver que $\frac{1}{FM}+\frac{1}{FM}=\frac{2a}{b^2}$.
4. La droite (MF') recoupe ξ en N (et la droite (MF) la recoupe en M'). Montrer que $\frac{FM}{FM'}+\frac{F'M}{F'N}=\frac{4a^2-2b^2}{b^2}$.

Exercice 14

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe d'équation :

1. $x^2+4y^2+2x=1$;
2. $x^2-8y^2+2x-16y=1$;
3. $mx^2+4mx+(m-1)y^2+2=0, m \in \mathbb{R}$;
4. $y^2-4y=2x-\frac{x^2}{m}, m \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 15

On considère deux points distincts F et F' du plan orienté. On note O le milieu de $[FF']$, Δ la médiatrice de ce segment et $c=OF$. On note A et B les points de Δ tels que $OA=OB=c$ et $\left(\overrightarrow{OF'},\overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On note s la symétrie centrale de centre F et r la rotation de centre F et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit D et D' les droites symétriques de Δ par rapport à F et à F'.

1.
   a. On considère les points $P=r(A)$ et $Q=s(A)$. Prouver que $r(Q)=B$. Déterminer la nature du quadrilatère $APQB$ et le tracer.
   b. Déterminer les images respectives du segment $[AB]$ par s, par r et par $r \circ s$.
   c. À tout point N du segment $[AB]$, on associe les points $H=s(N)$, $I=r(N)$ et $J=r(H)=(r \circ s)(N)$. Déterminer la nature du quadrilatère $NIHJ$ et le tracer.
2. On note Γ le cercle de centre N et de rayon NI.

a. Montrer que, pour tout point M du plan, $MH^2 + MN^2 = 2(MF^2 + NF^2)$.
b. En déduire que Γ est l'ensemble des points M du plan vérifiant $MH^2 - 2MF^2 = 0$.

3. On note K le projeté orthogonal de H sur Δ et on pose $\alpha = ON$, où $0 \leq \alpha \leq c$. Exprimer NK en fonction de α, puis NF et NI en fonction de α et de c. En déduire que le cercle Γ coupe la droite (HK) en deux points M_1 et M_2, distincts ou confondus.
4. Prouver que $\frac{M_1F}{M_1H} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. En déduire que, lorsque N parcourt le segment $[AB]$, les points M_1 et M_2 appartiennent à une ellipse E dont F est un foyer et dont on précisera l'excentricité et la directrice associée à F. Placer les sommets de E et tracer cette ellipse.

Exercice 16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On désigne par M, N, P trois points distincts d'affixes respectives m, n, p.

1. Démontrer que le triangle MNP est rectangle en N si et seulement si le complexe $i\,\frac{p-n}{m-n}$ est un réel non nul.
2. Dans cette question, M, N, P ont pour affixes respectives z, z^2, z^4.
   a. Quelles conditions doit vérifier z pour que M, N, P soient distincts deux à deux ?
   b. Démontrer que l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ tels que le triangle MNP soit rectangle en N est la conique Γ d'équation $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4}$, privée de deux points que l'on précisera.
3. Préciser la nature de Γ et déterminer ses éléments géométriques (sommets, foyers, excentricité, asymptotes).
4. Représenter Γ avec ses sommets, ses foyers et ses asymptotes.

Exercice 17

Soit ζ l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $13x^2 + 13y^2 - 24xy - 25 = 0$ dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Écrire l'expression complexe de r.
2. Déterminer une équation de la courbe $r(\zeta)$. Préciser sa nature et ses éléments géométriques.
3. En déduire la nature et les éléments géométriques de ζ.

Exercice 18

Dans le plan complexe, on considère l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $z^2 - (1+i)^2 = \overline{z}^2 - (1-i)^2$.

1. Déterminer et construire E.
2. Déterminer et construire l'ensemble F des points M tels que $[z - (1+i)][\overline{z} - (1-i)] = 8$.
3. Vérifier qu'il existe un point de $E \cap F$ où les deux courbes ont la même tangente.

Exercice 19

À tout point M de coordonnées $(x\,;y)$, on associe son affixe $z = x + iy$. On appelle ζ l'ensemble des points M dont l'affixe vérifie

$$(*) \qquad \left|\frac{z + i\overline{z}}{2}\right| = \left|z - \frac{1+i}{2}\right|.$$

1. Démontrer que ζ admet pour équation $x^2+y^2-2xy-2x-2y+1=0$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2. On pose $\overrightarrow{e_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$ et $\overrightarrow{e_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{\imath}+\vec{\jmath})$. Montrer que $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ est un repère orthonormé et déterminer une équation de ζ dans ce repère.
3. Quelle est la nature de ζ et quels sont ses éléments caractéristiques ?
4. Que signifie géométriquement la relation $(*)$? Construire ζ.

Exercice 20

Dans le plan orienté par un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la courbe $\mathcal{H}$ d'équation $x^2-4y^2-2x-3=0$.

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est une hyperbole ; déterminer ses sommets et ses asymptotes.
2.
   a. Vérifier que le point $M_0\left(1+2\sqrt{2}\,;1\right)$ appartient à $\mathcal{H}$.
   b. Donner une équation de la tangente (T) à $\mathcal{H}$ en M_0.
3. Soit θ un réel de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation dans $\mathbb{C}$:
   $$(E_\theta):\ (\cos^2\theta)z^2-2(\cos^2\theta+2\cos\theta)z+5+4\cos\theta=0.$$
   a. Résoudre l'équation (E_θ).
   b. Soit M' et M'' les images des solutions z' et z''. Montrer que M' et M'' décrivent une branche $\mathcal{B}$ de l'hyperbole $\mathcal{H}$.

Corrigés détaillés

Corrigé de l'exercice 1

Remarque sur l'énoncé. La 1re édition donnait $D:\ x=\frac{p}{2}$, ce qui fait passer la directrice par le foyer ; la directrice de $y^2=2px$ est $x=-\frac{p}{2}$.

Pour $M(x\,;y)$, $H\left(-\frac{p}{2}\,;y\right)$, donc $MF^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2$ et $MH^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$. Les distances étant positives,

$$MF=MH\Leftrightarrow\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\Leftrightarrow y^2=2px.$$

Corrigé de l'exercice 2

Remarque sur l'énoncé. « $x^2=6x$ » (1.b) est une coquille pour $x^2=6y$.

1. Toutes ces paraboles ont pour sommet O.

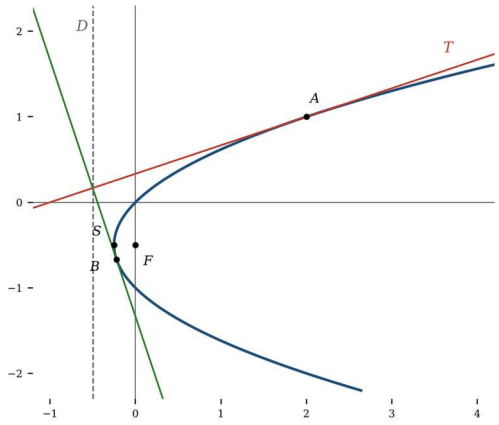
Parabole	Paramètre	Foyer	Directrice
$\boldsymbol{y^2=4x}$	$p=2$	$(1\,;0)$	$x=-1$
$\boldsymbol{x^2=6y}$	$p=3$	$\left(0\,;\frac{3}{2}\right)$	$y=-\frac{3}{2}$
$\boldsymbol{y^2=-8x}$	$p=4$ (tournée vers les $x<0$)	$(-2\,;0)$	$x=2$
$\boldsymbol{x^2=-3y}$	$p=\frac{3}{2}$ (tournée vers les $y<0$)	$\left(0\,;-\frac{3}{4}\right)$	$y=\frac{3}{4}$

2. On se ramène à une équation réduite dans un repère translaté.

– $\mathcal{P}_1$: $y^2 = 5\left(x - \frac{1}{5}\right)$. Dans le repère d'origine $S_1\left(\frac{1}{5}\,;0\right)$: $Y^2 = 2\times\frac{5}{2}X$. Parabole de sommet $S_1\left(\frac{1}{5}\,;0\right)$, de paramètre $\frac{5}{2}$, d'axe $y = 0$, de foyer $F_1\left(\frac{29}{20}\,;0\right)$ et de directrice $x = -\frac{21}{20}$.

– $\mathcal{P}_2$: $(x+1)^2 = 4y + 2 = 4\left(y + \frac{1}{2}\right)$. Parabole de sommet $S_2\left(-1\,;-\frac{1}{2}\right)$, de paramètre 2, d'axe $x = -1$, de foyer $F_2\left(-1\,;\frac{1}{2}\right)$ et de directrice $y = -\frac{3}{2}$.

– $\mathcal{P}_3$: $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = x + \frac{1}{4}$. Parabole de sommet $S_3\left(-\frac{1}{4}\,;-\frac{1}{2}\right)$, de paramètre $\frac{1}{2}$, d'axe $y = -\frac{1}{2}$, de foyer $F_3\left(0\,;-\frac{1}{2}\right)$ et de directrice $x = -\frac{1}{2}$.



Exercice 2 : la parabole $\mathcal{P}_3$, la tangente T en A et la tangente perpendiculaire en B.

3. $1^2 - 2 + 1 = 0$: $A \in \mathcal{P}_3$. Dans le repère $(S_3, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, avec $X = x + \frac{1}{4}$ et $Y = y + \frac{1}{2}$, l'équation est $Y^2 = 2\times\frac{1}{2}X$ et A a pour coordonnées $\left(\frac{9}{4}\,;\frac{3}{2}\right)$. La tangente $Y_0Y = p(X + X_0)$ s'écrit $\frac{3}{2}Y = \frac{1}{2}\left(X + \frac{9}{4}\right)$, soit, en revenant à x et y :

$$T\colon\ x - 3y + 1 = 0 \qquad \text{(pente } 1/3\text{)}.$$

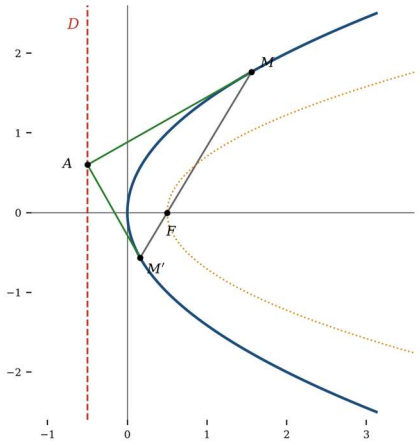
4. Plus généralement, la tangente en un point $(x_1\,;y_1)$ de $\mathcal{P}_3$ avec $y_1 \neq -\frac{1}{2}$ a pour pente $\frac{1}{2y_1+1}$ (dérivation de $x = y^2 + y$ par rapport à y). Elle est perpendiculaire à T si et seulement si $\frac{1}{2y_1+1} = -3$, soit $y_1 = -\frac{2}{3}$, puis $x_1 = \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{2}{9}$. $B\left(-\frac{2}{9}\,;-\frac{2}{3}\right)$.

Corrigé de l'exercice 3

> **Remarque sur l'énoncé.** La 1re édition demandait de montrer que $A \in \mathcal{P}$; c'est faux (voir 3.b). Le résultat exact est $A \in D$.

$F\left(\frac{p}{2}\,;0\right)$, $D\colon\ x = -\frac{p}{2}$. L'axe focal ne coupe $\mathcal{P}$ qu'en O ; toute autre droite passant par F a une équation $x = my + \frac{p}{2}$ ($m \in \mathbb{R}$). Ses points d'intersection avec $\mathcal{P}$ ont des ordonnées y_1, y_2 solutions de

$$y^2 - 2pm\,y - p^2 = 0 \qquad (\Delta' = p^2m^2 + p^2 > 0), \qquad y_1 + y_2 = 2pm, \quad y_1y_2 = -p^2.$$



Exercice 3 : corde focale $[MM']$; les tangentes en M et M' se coupent à angle droit sur D. En pointillés orange : le lieu des milieux.

1. Le milieu I de $[MM']$ a pour coordonnées $Y = pm$ et $X = mY + \frac{p}{2} = pm^2 + \frac{p}{2}$. En éliminant m : $Y^2 = p\left(X - \frac{p}{2}\right)$. Lorsque m décrit $\mathbb{R}$, $Y = pm$ décrit $\mathbb{R}$: l'ensemble des milieux est **la parabole d'équation** $y^2 = p\left(x - \frac{p}{2}\right)$, de sommet F et de paramètre $\frac{p}{2}$.

2. Par la définition de la parabole, $FM = MH = x_1 + \frac{p}{2} = my_1 + p$, et de même $FM' = my_2 + p$. Alors

$$\frac{1}{FM} + \frac{1}{FM'} = \frac{m(y_1 + y_2) + 2p}{m^2 y_1 y_2 + pm(y_1 + y_2) + p^2} = \frac{2p(m^2+1)}{p^2(m^2+1)} = \frac{2}{p}.$$

3. a. T : $y_1 y = p(x + x_1)$ a pour vecteur normal $(p\,;-y_1)$; T' a pour vecteur normal $(p\,;-y_2)$. Leur produit scalaire vaut $p^2 + y_1 y_2 = 0$: $T \perp T'$.

b. Avec $x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$, T s'écrit $y_1 y = px + \frac{y_1^2}{2}$, et T' s'écrit $y_2 y = px + \frac{y_2^2}{2}$. Par différence $(y_1 \neq y_2)$, $y = \frac{y_1+y_2}{2} = pm$; puis $px = y_1 \cdot \frac{y_1+y_2}{2} - \frac{y_1^2}{2} = \frac{y_1 y_2}{2} = -\frac{p^2}{2}$, soit $x = -\frac{p}{2}$. Donc $A\left(-\frac{p}{2}\,;pm\right) \in D$.

Corrigé de l'exercice 4

Notons $M\left(\frac{y_1^2}{2p}\,;y_1\right)$ et $M'\left(\frac{y_2^2}{2p}\,;y_2\right)$ avec $y_1 y_2 \neq 0, y_1 \neq y_2$.

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 0 \Leftrightarrow \frac{y_1^2 y_2^2}{4p^2} + y_1 y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 y_2 = -4p^2.$$

La droite (MM') a pour équation $2px - (y_1 + y_2)y + y_1 y_2 = 0$ (on vérifie que les coordonnées de M et de M' la satisfont). Avec $y_1 y_2 = -4p^2$, elle coupe l'axe focal $(y = 0)$ au point d'abscisse $x = 2p$. **Toutes les droites** (MM') **passent par le point fixe** $(2p\,;0)$**.**

Corrigé de l'exercice 5

> **Remarque sur l'énoncé.** La 1re édition demandait de calculer $d(O,T_1) \times d(F,T_2)$ en fonction de p seul. Ce produit dépend du couple de tangentes : avec les notations ci-dessous, il vaut $\frac{p^2}{4|k|}$, soit $\frac{p^2}{4}$ pour $k = 1$ et $\frac{p^2}{8}$ pour $k = 2$. On l'a remplacé par une relation vraie et de même nature.

1. Si $b = 0$, la droite est $x = -\frac{c}{a}$; c'est une tangente si et seulement si c'est la tangente au sommet $x = 0$, c'est-à-dire $c = 0$. Si $b \neq 0$ et $a = 0$, la droite est parallèle à l'axe : elle coupe $\mathcal{P}$ en un seul point sans lui être tangente. Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on remplace x par $\frac{y^2}{2p}$: $\frac{a}{2p}y^2 + by + c = 0$. La droite

est tangente si et seulement si cette équation a une racine double : $b^2 - \frac{2a}{p} = 0$. Les trois cas se résument en une seule condition :

$$\boxed{p\,b^2 = 2ac}.$$

2. Soit $M(x_0\,;y_0)$, $y_0 \neq 0$. La tangente $y_0 y = p(x + x_0)$ coupe l'axe $y = 0$ en $A(-x_0\,;0)$. Le milieu de $[MA]$ est $I\left(0\,;\frac{y_0}{2}\right)$: il appartient à la tangente au sommet, d'équation $x = 0$.

3. La tangente en $M_0\left(\frac{y_0^2}{2p}\,;y_0\right)$ $(y_0 \neq 0)$ s'écrit $y = kx + \frac{p}{2k}$, avec $k = \frac{p}{y_0}$; deux tangentes perpendiculaires ont des pentes k et $-\frac{1}{k}$.

$$d(F,T_1) = \frac{\left|\frac{kp}{2} + \frac{p}{2k}\right|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{p}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+k^2}}{|k|}, \qquad d(F,T_2) = \frac{\left|-\frac{p}{2k} - \frac{pk}{2}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}} = \frac{p}{2}\sqrt{1+k^2}.$$

Donc

$$\frac{1}{d(F,T_1)^2} + \frac{1}{d(F,T_2)^2} = \frac{4}{p^2}\left(\frac{k^2}{1+k^2} + \frac{1}{1+k^2}\right) = \frac{4}{p^2}.$$

Corrigé de l'exercice 6

On choisit le repère où la parabole a pour équation $y^2 = 2px$ et pour directrice D: $x = -\frac{p}{2}$. La tangente au point d'ordonnée t est $\mathcal{T}_t$: $ty = px + \frac{t^2}{2}$; elle est dirigée par le vecteur $(t\,;p)$.

Les tangentes $\mathcal{T}_{t_1}$ et $\mathcal{T}_{t_2}$ $(t_1 \neq t_2)$ se coupent au point $A_{12}\left(\frac{t_1 t_2}{2p}\,;\frac{t_1+t_2}{2}\right)$ (calcul de l'exercice 3).

Considérons trois tangentes $\mathcal{T}_{t_1}$, $\mathcal{T}_{t_2}$, $\mathcal{T}_{t_3}$ formant un triangle. La hauteur issue de A_{12} est perpendiculaire au côté opposé $\mathcal{T}_{t_3}$, donc a pour vecteur normal $(t_3\,;p)$:

$$t_3 x + py = t_3\frac{t_1 t_2}{2p} + p\,\frac{t_1+t_2}{2}.$$

Elle coupe D $\left(x = -\frac{p}{2}\right)$ au point d'ordonnée

$$y = \frac{t_1+t_2+t_3}{2} + \frac{t_1 t_2 t_3}{2p^2}.$$

Cette expression est **symétrique** en t_1, t_2, t_3 : les trois hauteurs coupent D au même point. Comme elles sont concourantes en l'orthocentre, celui-ci est ce point : **l'orthocentre appartient à la directrice**.

Corrigé de l'exercice 7

1. $H\left(\frac{a^2}{c}\,;y\right)$. Les quantités étant positives,

$$a\,MF = c\,MH \Leftrightarrow a^2[(x-c)^2 + y^2] = c^2\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2 \Leftrightarrow (c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2).$$

Avec $c^2 - a^2 = b^2$ et en divisant par a^2b^2 : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. L'équation obtenue est invariante par $(x,y) \mapsto (-x,y)$. Le même calcul avec $F'(-c\,;0)$ et D': $x = -\frac{a^2}{c}$ montre que $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow a\,MF' = c\,MH'$. Ainsi, pour $M \in \mathcal{H}$, $\frac{MF}{MH} = \frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$, d'où $\frac{MF'}{MF} = \frac{MH}{MH}$.

3. *Inclusion.* Pour $M \in \mathcal{H}$ (donc $|x| \geq a$), avec $e = \frac{c}{a}$: $MF = e\left|x - \frac{a^2}{c}\right| = |ex - a|$ et $MF' = |ex + a|$. Si $x \geq a$: $MF' - MF = (ex + a) - (ex - a) = 2a$; si $x \leq -a$: $MF - MF' = 2a$. Donc $|MF - MF'| = 2a$.

Réciproque. $MF^2 - MF'^2 = -4cx$. Si $MF - MF' = \varepsilon\, 2a$ ($\varepsilon = \pm 1$), alors $MF + MF' = \frac{-4cx}{2a}$, d'où $MF = \varepsilon\left(a - \frac{c}{a}x\right)$. En élevant au carré : $(x-c)^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$, soit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

L'ensemble cherché est l'hyperbole $\mathcal{H}$.

Corrigé de l'exercice 8

Remarque sur l'énoncé. Les cas de la question 1 étaient numérotés a, c, d ; ils sont renumérotés a, b, c.

1. a. $\frac{x^2}{(11/2)^2} - \frac{y^2}{(11/6)^2} = 1$: $a = \frac{11}{2}$, $b = \frac{11}{6}$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{11\sqrt{10}}{6}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{3}$. Foyers $\left(\pm\frac{11\sqrt{10}}{6}\,;0\right)$; sommets $\left(\pm\frac{11}{2}\,;0\right)$; directrices $x = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{33\sqrt{10}}{20}$; asymptotes $y = \pm\frac{1}{3}x$.

b. $\frac{y^2}{7^2} - \frac{x^2}{(14/3)^2} = 1$: axe focal $(O,\vec{j})$, $c = \sqrt{49 + \frac{196}{9}} = \frac{7\sqrt{13}}{3}$, $e = \frac{c}{7} = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Foyers $\left(0\,;\pm\frac{7\sqrt{13}}{3}\right)$; sommets $(0\,;\pm 7)$; directrices $y = \pm\frac{49}{c} = \pm\frac{21\sqrt{13}}{13}$; asymptotes $y = \pm\frac{3}{2}x$.

c. $\frac{x^2}{1/2} - \frac{y^2}{1/2} = 1$: hyperbole équilatère, $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = 1$, $e = \sqrt{2}$. Foyers $(\pm 1\,;0)$; sommets $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,;0\right)$; directrices $x = \pm\frac{1}{2}$; asymptotes $y = \pm x$.

2. a. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = \frac{1}{\cos^2 t} - \tan^2 t = 1$. Comme $\cos t > 0$, $x > 0$. Réciproquement, pour un point $(x\,;y)$ de l'hyperbole avec $x > 0$, $t = \arctan\frac{y}{3}$ convient, car alors $x = 2\sqrt{1 + \tan^2 t} = \frac{2}{\cos t}$. **Ensemble : la branche $x > 0$ de l'hyperbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.**

b. $\frac{x}{2} = t + \frac{1}{t}$ et $\frac{2y}{3} = t - \frac{1}{t}$, donc $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{2y}{3}\right)^2 = 4$, soit $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Réciproquement, pour un point de cette hyperbole, $t = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{2y}{3}\right)$ est non nul et vérifie $\frac{1}{t} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{2y}{3}\right)$, car le produit des deux nombres vaut $\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{4y^2}{9}\right) = 1$. **Ensemble : toute l'hyperbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$** ($t > 0$ pour la branche $x \geq 4$, $t < 0$ pour la branche $x \leq -4$).

c. $x^2 - 2y^2 = \frac{1}{\cos^2 2t} - \tan^2 2t = 1$, soit $x^2 - \frac{y^2}{1/2} = 1$. Lorsque $u = 2t$ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (respectivement $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$), on obtient la branche $x \geq 1$ (respectivement $x \leq -1$). **Ensemble : toute l'hyperbole $x^2 - 2y^2 = 1$,** avec $a = 1$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Corrigé de l'exercice 9

Remarque sur l'énoncé. La droite était notée « $px + py + r = 0$ » ; on la note $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ pour éviter toute confusion avec le paramètre p.

1. La tangente en $M_0(x_0\,;y_0) \in \mathcal{H}$ est $\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y - 1 = 0$; elle ne passe pas par O. Si la droite $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est cette tangente, alors $\gamma \neq 0$ et, par proportionnalité, $x_0 = -\frac{a^2\alpha}{\gamma}$, $y_0 = \frac{b^2\beta}{\gamma}$. La condition $M_0 \in \mathcal{H}$ donne $a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 = \gamma^2$. Réciproquement, si cette égalité a lieu avec $\gamma \neq 0$, le point M_0 ainsi défini est sur $\mathcal{H}$ et la tangente en M_0 est la droite donnée. Condition :

$$\boxed{a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 = \gamma^2 \neq 0}.$$

(Si $\gamma = 0$, l'égalité caractérise les asymptotes, qui ne sont pas des tangentes.)

2. Une tangente verticale ($x = \pm a$) serait perpendiculaire à une tangente horizontale $y = v$; or la condition donne $-b^2 = v^2$, impossible. Les deux tangentes cherchées sont donc non verticales. Une droite de pente k passant par $P(u\,;v)$, d'équation $kx - y + (v - ku) = 0$, est tangente si et seulement si

$$(a^2 - u^2)k^2 + 2uv\,k - (b^2 + v^2) = 0 \quad \text{et} \quad v - ku \neq 0.$$

Il passe par P deux tangentes perpendiculaires si et seulement si cette équation admet deux racines de produit -1 : $\frac{-(b^2+v^2)}{a^2-u^2} = -1$, soit $u^2 + v^2 = a^2 - b^2$ (le produit étant négatif, les deux racines sont réelles et distinctes). Il faut en outre exclure les points où l'une des deux droites est une asymptote, c'est-à-dire les points du cercle situés sur les asymptotes.

Conclusion : si $a > b$, l'ensemble est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2 - b^2}$ (**cercle orthoptique**), privé de ses quatre points d'intersection avec les asymptotes ; si $a \leq b$, l'ensemble est vide.

3. a. Une tangente en $M_0(x_0\,;y_0)$ passe par $P(u\,;v)$ si et seulement si $\frac{ux_0}{a^2} - \frac{vy_0}{b^2} = 1$. Le nombre de tangentes passant par P est donc le nombre de points communs à $\mathcal{H}$ et à la droite L_P: $\frac{ux}{a^2} - \frac{vy}{b^2} = 1$ (définie si $P \neq O$). Posons $X = \frac{x}{a}$, $Y = \frac{y}{b}$, $U = \frac{u}{a}$, $V = \frac{v}{b}$: $\mathcal{H}$: $X^2 - Y^2 = 1$ et L_P: $UX - VY = 1$. Pour $V \neq 0$, en éliminant Y : $(V^2 - U^2)X^2 + 2UX - (1 + V^2) = 0$, de discriminant réduit $V^2(1 - U^2 + V^2)$. Le cas $V = 0$ conduit aux mêmes conclusions. On obtient, en posant $\varphi(P) = \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}$:

– $P = O$, ou $\varphi(P) > 1$ (P « à l'intérieur » d'une branche) : **aucune tangente** ;

– $\varphi(P) = 1$ ($P \in \mathcal{H}$) : **une tangente** ;

– P sur une asymptote, $P \neq O$ (alors $V^2 = U^2$ et l'équation est du premier degré) : **une tangente** ;

– $\varphi(P) < 1$ et P hors des asymptotes : **deux tangentes**.

b. Les deux points de contact appartiennent à L_P, qui est donc la droite cherchée :

$$\frac{ux}{a^2} - \frac{vy}{b^2} = 1.$$

Corrigé de l'exercice 10

Soit T la tangente en $M_0(x_0\,;y_0)$: $\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y - 1 = 0$, et $N^2 = \frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}$. Avec $F(c\,;0)$ et $F'(-c\,;0)$:

$$d(F,T)\,d(F',T) = \frac{\left|\frac{cx_0}{a^2} - 1\right| \cdot \left|\frac{cx_0}{a^2} + 1\right|}{N^2} = \frac{\left|\frac{c^2x_0^2}{a^4} - 1\right|}{N^2}.$$

Or $y_0^2 = b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2} - 1\right)$, d'où $N^2 = \frac{(a^2+b^2)x_0^2 - a^4}{a^4b^2} = \frac{c^2x_0^2 - a^4}{a^4b^2}$, qui est strictement positif. Donc

$$\boxed{d(F,T) \times d(F',T) = b^2}.$$

Corrigé de l'exercice 11

Remarque sur l'énoncé. La 1re édition indiquait $F(0\,;c)$; avec la directrice $x = \frac{a^2}{c}$, le foyer est $F(c\,;0)$.

1. $a\,MF = c\,MH \Leftrightarrow a^2[(x-c)^2+y^2] = c^2\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2 \Leftrightarrow (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$. Comme $a^2-c^2=b^2$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2. Par symétrie par rapport à $(O,\vec{\jmath})$: $F'(-c\,;0)$ et D': $x=-\frac{a^2}{c}$ conviennent, et $\frac{MF\prime}{MF}=\frac{MH}{MH}$, comme à l'exercice 7.

3. Pour $M\in\xi$, $|x|\le a<\frac{a^2}{c}$, donc $MF=\frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c}-x\right)=a-ex$ et, de même, $MF'=a+ex$, d'où $MF+MF'=2a$. Réciproquement, si $MF+MF'=2a$, alors $MF-MF'=\frac{MF^2-MF\prime^2}{2a}=-\frac{2cx}{a}$, d'où $MF=a-\frac{c}{a}x$. En élevant au carré, on obtient $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **L'ensemble cherché est l'ellipse ξ.**

Corrigé de l'exercice 12

> **Remarque sur l'énoncé.** Les cas de la question 1 étaient numérotés b, c, d ; ils sont renumérotés a, b, c.

1. a. $\frac{x^2}{(11/2)^2}+\frac{y^2}{(11/6)^2}=1$: $a=\frac{11}{2}$, $b=\frac{11}{6}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{11\sqrt{2}}{3}$, $e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Foyers $\left(\pm\frac{11\sqrt{2}}{3}\,;0\right)$; sommets $\left(\pm\frac{11}{2}\,;0\right)$ et $\left(0\,;\pm\frac{11}{6}\right)$; directrices $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{33\sqrt{2}}{8}$.

b. $\frac{x^2}{(14/3)^2}+\frac{y^2}{7^2}=1$: axe focal $(O,\vec{\jmath})$, $c=\sqrt{49-\frac{196}{9}}=\frac{7\sqrt{5}}{3}$, $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Foyers $\left(0\,;\pm\frac{7\sqrt{5}}{3}\right)$; sommets $(0\,;\pm7)$ et $\left(\pm\frac{14}{3}\,;0\right)$; directrices $y=\pm\frac{49}{c}=\pm\frac{21\sqrt{5}}{5}$.

c. $x^2+y^2=\frac{1}{2}$: c'est le **cercle** de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ce cas limite ($a=b$, $c=0$) n'est pas une conique au sens de la définition par foyer et directrice : il n'a pas de directrice.

2. a. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=\cos^2t+\sin^2t=1$, et tout point de cette ellipse s'obtient. **Ensemble : l'ellipse** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ($c=4$, $e=\frac{4}{5}$).

b. $x=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$ et $y=\frac{1}{e^t+e^{-t}}$, d'où

$$x^2+4y^2=\frac{(e^t-e^{-t})^2+4}{(e^t+e^{-t})^2}=1.$$

De plus $y>0$ et $x\in\,]-1,1[$. Réciproquement, pour $x\in\,]-1,1[$, l'équation $\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}=x$ a une unique solution $t=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, et alors $y=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$. **Ensemble : la demi-ellipse** $x^2+\frac{y^2}{1/4}=1$ **située dans le demi-plan** $y>0$ (sommets $(\pm1\,;0)$ exclus).

Corrigé de l'exercice 13

> **Remarque sur l'énoncé.** Telle qu'imprimée, la relation de la question 4 $\left(\frac{FM}{FN}+\frac{F\prime M}{F\prime N}\right)$ n'est pas constante : on le vérifie numériquement sur plusieurs points. La relation exacte fait intervenir les deux cordes focales issues de M : $\frac{FM}{FM\prime}+\frac{F\prime M}{F\prime N}$.

1. $c=\sqrt{a^2-b^2}$; foyers $F(c\,;0)$, $F'(-c\,;0)$; sommets $(\pm a\,;0)$, $(0\,;\pm b)$; directrices $x=\pm\frac{a^2}{c}$; excentricité $e=\frac{c}{a}$.

2. Avec $y_0^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2$:

$$MF^2 = (x_0 - c)^2 + y_0^2 = \frac{c^2}{a^2}x_0^2 - 2cx_0 + a^2 = (a - ex_0)^2.$$

Comme $|x_0| \leq a$ et $e < 1$, $a - ex_0 > 0$, donc $MF = a - ex_0$. De même $MF' = a + ex_0$, et $MF + MF' = 2a$.

3. Soit φ une mesure de l'angle $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{FM}\right)$ et $r = FM$. Alors $x_0 = c + r\cos\varphi$ et $r = a - e(c + r\cos\varphi)$, d'où

$$r = \frac{a - ec}{1 + e\cos\varphi} = \frac{b^2/a}{1 + e\cos\varphi}.$$

Le point M' correspond à l'angle $\varphi + \pi$: $FM' = \frac{b^2/a}{1-e\cos}$. Ainsi $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FM'} = \frac{a}{b^2}[(1 + e\cos\varphi) + (1 - e\cos\varphi)] = \frac{2a}{b^2}$.

4. D'après 3, $\frac{FM}{FM} = FM\left(\frac{2a}{b^2} - \frac{1}{FM}\right) = \frac{2a}{b^2}FM - 1$. Le même résultat, appliqué au foyer F' (par symétrie), donne $\frac{F'M}{F'N} = \frac{2a}{b^2}F'M - 1$. En additionnant et en utilisant $FM + F'M = 2a$:

$$\frac{FM}{FM'} + \frac{F'M}{F'N} = \frac{2a}{b^2} \cdot 2a - 2 = \frac{4a^2 - 2b^2}{b^2}.$$

Corrigé de l'exercice 14

Remarque sur l'énoncé. La dernière question était numérotée 5° ; elle devient la question 4.

1. $(x + 1)^2 + 4y^2 = 2$, soit $\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{y^2}{1/2} = 1$. **Ellipse** de centre $\Omega(-1\,;0)$, avec $a = \sqrt{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Foyers $\left(-1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}\,;0\right)$; sommets $\left(-1 \pm \sqrt{2}\,;0\right)$ et $\left(-1\,;\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; directrices $x = -1 \pm \frac{a^2}{c} = -1 \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

2. $(x + 1)^2 - 8(y + 1)^2 = -6$, soit $\frac{(y+1)^2}{3/4} - \frac{(x+1)^2}{6} = 1$. **Hyperbole** de centre $\Omega(-1\,;-1)$ et d'axe focal $x = -1$: demi-axe focal $\frac{\sqrt{3}}{2}$, autre demi-axe $\sqrt{6}$, $c = \sqrt{\frac{3}{4} + 6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $e = \frac{c}{\sqrt{3}/2} = 3$. Sommets $\left(-1\,;-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; foyers $\left(-1\,;-1 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; directrices $y = -1 \pm \frac{3/4}{c} = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$; asymptotes $y + 1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}(x + 1)$.

3. $m(x + 2)^2 + (m - 1)y^2 = 4m - 2$. Discussion :

– $m = 0$: $y^2 = 2$, **deux droites parallèles** $y = \pm\sqrt{2}$.

– $m = 1$: $(x + 2)^2 = 2$, **deux droites parallèles** $x = -2 \pm \sqrt{2}$.

– $m = \frac{1}{2}$: $(x + 2)^2 = y^2$, **deux droites sécantes** $y = \pm(x + 2)$.

– $m < 0$: $\frac{(x+2)^2}{\frac{2-4m}{-m}} + \frac{y^2}{\frac{2-4m}{1-m}} = 1$, **ellipse** de centre $(-2\,;0)$ et d'axe focal $y = 0$ (car $\frac{1}{-m} > \frac{1}{1-m}$), d'excentricité $e = \frac{1}{\sqrt{1-m}}$.

– $0 < m < \frac{1}{2}$: $\frac{y^2}{\frac{2-4m}{1-m}} - \frac{(x+2)^2}{\frac{2-4m}{m}} = 1$, **hyperbole** de centre $(-2\,;0)$ et d'axe focal $x = -2$, d'excentricité $e = \frac{1}{\sqrt{m}}$.

$-\frac{1}{2} < m < 1$: $\frac{(x+2)^2}{\frac{4m-2}{m}} - \frac{y^2}{\frac{4m-2}{1-m}} = 1$, **hyperbole** de centre $(-2\,;0)$ et d'axe focal $y = 0$, d'excentricité $e = \frac{1}{\sqrt{1-m}}$.

– $m > 1$: $\frac{(x+2)^2}{\frac{4m-2}{m}} + \frac{y^2}{\frac{4m-2}{m-1}} = 1$, **ellipse** de centre $(-2\,;0)$ et d'axe focal $x = -2$ (car $\frac{1}{m-1} > \frac{1}{m}$), d'excentricité $e = \frac{1}{\sqrt{m}}$.

(Les excentricités se calculent par $e^2 = \frac{c^2}{a^2}$, avec c^2 égal à la différence des carrés des demi-axes pour une ellipse et à leur somme pour une hyperbole, et a le demi-axe focal.)

4. $\frac{(x-m)^2}{m} + (y-2)^2 = m + 4$ (après complétion du carré en x).

– $m > 0$: $\frac{(x-m)^2}{m(m+4)} + \frac{(y-2)^2}{m+4} = 1$. **Ellipse** de centre $(m\,;2)$; c'est le **cercle** de rayon $\sqrt{5}$ si $m = 1$; l'axe focal est $y = 2$ si $m > 1$ ($e = \sqrt{1-\frac{1}{m}}$) et $x = m$ si $0 < m < 1$ ($e = \sqrt{1-m}$).

– $m = -4$: $(y-2)^2 = \frac{(x+4)^2}{4}$, **deux droites sécantes** $y - 2 = \pm\frac{1}{2}(x+4)$.

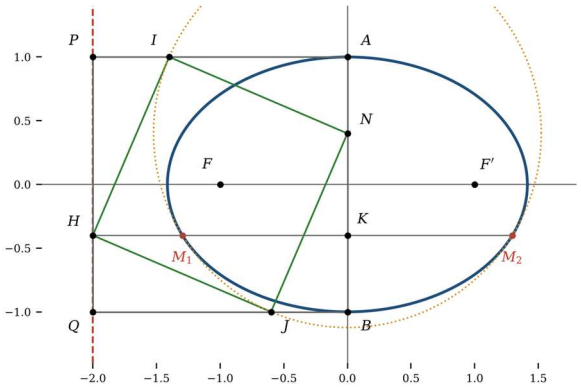
– $-4 < m < 0$: $\frac{(y-2)^2}{m+4} - \frac{(x-m)^2}{-m(m+4)} = 1$, **hyperbole** de centre $(m\,;2)$ et d'axe focal $x = m$, $e = \sqrt{1-m}$.

– $m < -4$: $\frac{(x-m)^2}{m(m+4)} - \frac{(y-2)^2}{-(m+4)} = 1$, **hyperbole** de centre $(m\,;2)$ et d'axe focal $y = 2$, $e = \sqrt{1-\frac{1}{m}}$.

Corrigé de l'exercice 15

> **Remarque sur l'énoncé.** On a précisé l'orientation $\left(\overrightarrow{OF'}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$, sans laquelle l'égalité $r(Q) = B$ peut être fausse (elle devient $r(Q) = A$ si l'on échange A et B). Les droites D et D' sont les symétriques de Δ, et non de D.

On utilise le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{c}\overrightarrow{OF'}$: $F(-c\,;0)$, $F'(c\,;0)$, $A(0\,;c)$, $B(0\,;-c)$, Δ: $x = 0$, D: $x = -2c$, D': $x = 2c$. En affixes : $s(z) = -2c - z$ et $r(z) = -c + i(z+c)$.



Exercice 15 : carré $NIHJ$ de centre F, cercle Γ (pointillés), points M_1 et M_2 sur l'ellipse E de foyer F et de directrice D.

1. a. $P = r(A)$: $-c + i(ic + c) = -2c + ic$, soit $P(-2c\,;c)$. $Q = s(A)$: $Q(-2c\,;-c)$. $r(Q) = -c + i(-c - ic) = -ic$: $r(Q) = B$. Le quadrilatère $APQB$ a pour sommets $(0\,;c)$, $(-2c\,;c)$, $(-2c\,;-c)$, $(0\,;-c)$: c'est un **carré** de côté $2c$ et de centre F.

b. $s(A) = Q, s(B) = P$; $r(A) = P, r(B) = A$; $r \circ s(A) = r(Q) = B, r \circ s(B) = r(P) = Q$. Donc

$$s([AB]) = [QP], \qquad r([AB]) = [PA], \qquad r \circ s([AB]) = [BQ].$$

c. F est le milieu de $[NH]$. r et s ont le même centre F, donc commutent : $J = r\big(s(N)\big) = s\big(r(N)\big) = s(I)$, et F est aussi le milieu de $[IJ]$. Enfin $FI = FN$ et $(FN) \perp (FI)$. Les diagonales $[NH]$ et $[IJ]$ ont le même milieu, la même longueur et sont perpendiculaires : $NIHJ$ **est un carré de centre** F.

2. a. F est le milieu de $[NH]$; par le théorème de la médiane,

$$MH^2 + MN^2 = 2MF^2 + \frac{NH^2}{2} = 2MF^2 + \frac{(2NF)^2}{2} = 2(MF^2 + NF^2).$$

b. $NI = \sqrt{2}\,NF$ (diagonale et demi-diagonale du carré), donc $M \in \Gamma \Leftrightarrow MN^2 = 2NF^2$. D'après a, $MH^2 - 2MF^2 = 2NF^2 - MN^2$. Donc $M \in \Gamma \Leftrightarrow MH^2 - 2MF^2 = 0$.

3. Soit $N(0\,;n)$ avec $|n| = \alpha$: $H(-2c\,;-n)$ et $K(0\,;-n)$. Donc

$$NK = 2\alpha, \qquad NF = \sqrt{c^2 + \alpha^2}, \qquad NI = \sqrt{2}\,NF = \sqrt{2(c^2 + \alpha^2)}.$$

La droite (HK) est perpendiculaire à Δ en K ; la distance de N à (HK) est $NK = 2\alpha$. Or $4\alpha^2 \leq 2c^2 + 2\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq c^2$, ce qui est vrai : Γ coupe (HK) en **deux points** M_1**,** M_2, distincts si $\alpha < c$ et confondus (en K) si $\alpha = c$.

4. $M_1 \in \Gamma$ donne $M_1H^2 = 2M_1F^2$, soit $\frac{M_1F}{M_1H} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Comme $M_1 \in (HK)$, $(HK) \perp D$ et $H \in D$, le point H est le projeté orthogonal de M_1 sur D : $M_1F = \frac{\sqrt{2}}{2}\,d(M_1, D)$. Il en est de même pour M_2.

Donc M_1 et M_2 appartiennent à l'**ellipse** E **de foyer** F**, de directrice associée** D: $x = -2c$ **et d'excentricité** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Son équation s'obtient par $MF^2 = \frac{1}{2}(x + 2c)^2$:

$$(x + c)^2 + y^2 = \frac{1}{2}(x + 2c)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 2c^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1.$$

E a pour centre O, pour foyers F et F', pour sommets $\big(\pm c\sqrt{2}\,;0\big)$, ainsi que A et B.

Corrigé de l'exercice 16

1. MNP est rectangle en N si et seulement si $\overrightarrow{NM} \perp \overrightarrow{NP}$, c'est-à-dire si $\frac{p-n}{m-n}$ est imaginaire pur non nul, ou encore si $i\,\frac{p-n}{m-n}$ est un réel non nul.

2. a. $z \neq z^2 \Leftrightarrow z \notin \{0,1\}$; $z^2 \neq z^4 \Leftrightarrow z \notin \{0,1,-1\}$; $z \neq z^4 \Leftrightarrow z \notin \{0,1,j,\bar{j}\}$ avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Condition : $z \notin \{0,1,-1,j,\bar{j}\}$.

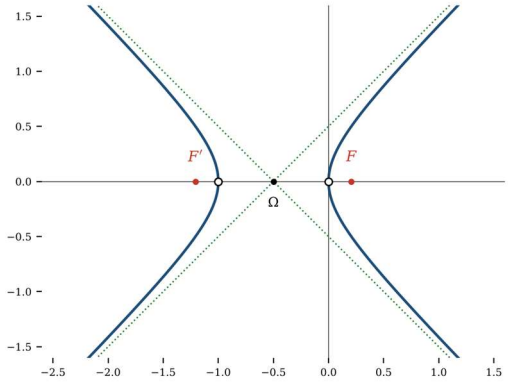
b. Pour un tel z : $\frac{z^4 - z^2}{z - z^2} = \frac{z^2(z-1)(z+1)}{-z(z-1)} = -z(z+1)$. La condition de 1 devient : $z(z+1)$ est imaginaire pur non nul. Or

$$z(z+1) = (x^2 + x - y^2) + i\,y(2x+1),$$

d'où $\mathrm{Re}\big(z(z+1)\big) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4}$. Parmi les valeurs exclues, seules $z = 0$ et $z = -1$ donnent des points de Γ (ce sont aussi celles qui annulent $z(z+1)$). **L'ensemble est** Γ **privée des points** $O(0\,;0)$ **et** $(-1\,;0)$**.**

3. Dans le repère d'origine $\Omega\left(-\frac{1}{2}\,;0\right)$: $\frac{X^2}{1/4} - \frac{y^2}{1/4} = 1$. Γ est une **hyperbole équilatère** : $a = b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $e = \sqrt{2}$. Sommets $(0\,;0)$ et $(-1\,;0)$ (justement les deux points exclus) ; foyers $\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\,;0\right)$; directrices $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$; asymptotes $y = \pm\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

4.



Exercice 16 : l'hyperbole Γ ; ses sommets (cercles blancs) sont exclus de l'ensemble.

Corrigé de l'exercice 17

1. r: $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}z$.

2. $M'(x';y') \in r(\zeta) \Leftrightarrow r^{-1}(M') \in \zeta$. Or r^{-1}: $z = e^{-i\frac{\pi}{4}}z'$ donne $x = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$ et $y = \frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}$, d'où $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ et $xy = \frac{y'^2-x'^2}{2}$. L'équation devient

$$13(x'^2 + y'^2) - 12(y'^2 - x'^2) - 25 = 0 \Leftrightarrow 25x'^2 + y'^2 = 25 \Leftrightarrow x'^2 + \frac{y'^2}{25} = 1.$$

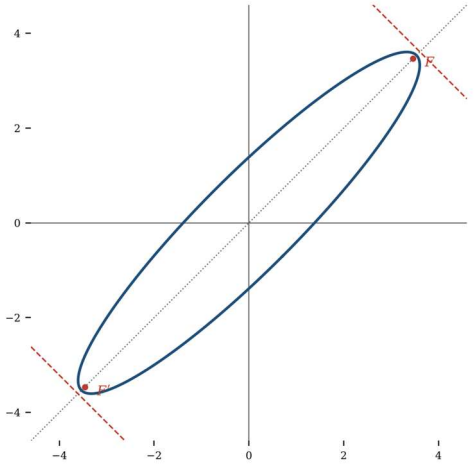
$r(\zeta)$ est une **ellipse** de centre O et d'axe focal $(O,\vec{j})$: demi-axes 5 et 1, $c = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, $e = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Foyers $\left(0\,;\pm 2\sqrt{6}\right)$; sommets $(0\,;\pm 5)$ et $(\pm 1\,;0)$; directrices $y = \pm\frac{25}{2\sqrt{6}} = \pm\frac{25\sqrt{6}}{12}$.

3. $\zeta = r^{-1}\big(r(\zeta)\big)$ est l'image de cette ellipse par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$: c'est une **ellipse** de centre O, d'excentricité $\frac{2\sqrt{6}}{5}$, d'axe focal la droite $y = x$. On applique $z \mapsto e^{-i\frac{\pi}{4}}z$:

– foyers $\pm 2\sqrt{6}\,i\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$, soit $F\left(2\sqrt{3}\,;2\sqrt{3}\right)$ et $F'\left(-2\sqrt{3}\,;-2\sqrt{3}\right)$;

– sommets principaux $\pm\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\,;\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, sommets secondaires $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

– directrices : les droites perpendiculaires à $y = x$ situées à la distance $\frac{25\sqrt{6}}{12}$ de O, soit $x + y = \pm\frac{25\sqrt{3}}{6}$.



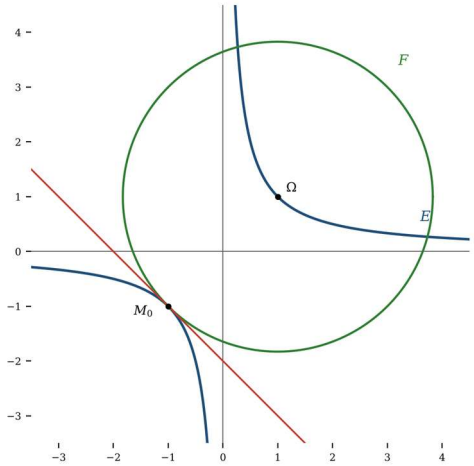
Exercice 17 : l'ellipse ζ, d'axe focal $y = x$, avec ses directrices.

Corrigé de l'exercice 18

1. $(1+i)^2 = 2i$ et $(1-i)^2 = -2i$. L'équation s'écrit $z^2 - \overline{z}^2 = 4i$, avec $z^2 - \overline{z}^2 = (z-\overline{z})(z+\overline{z}) = 2iy \cdot 2x = 4ixy$. Donc E **est l'hyperbole d'équation** $xy = 1$: hyperbole équilatère de centre O, d'asymptotes les axes, d'axe focal $y = x$, de sommets $(1\,;1)$ et $(-1\,;-1)$, de foyers $\left(\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right)$ et $\left(-\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}\right)$, d'excentricité $\sqrt{2}$.

2. $\overline{z} - (1-i) = \overline{z-(1+i)}$, donc le premier membre vaut $|z-(1+i)|^2$. F **est le cercle de centre** $\Omega(1\,;1)$ **et de rayon** $2\sqrt{2}$**.**

3. Le point $M_0(-1\,;-1)$ vérifie $xy = 1$ et $\Omega M_0 = |(-2\,;-2)| = 2\sqrt{2}$: $M_0 \in E \cap F$. – Tangente à E en M_0 : la tangente à $y = \frac{1}{x}$ en $x = -1$ a pour pente $-\frac{1}{x^2} = -1$, d'où $x + y = -2$. – Tangente à F en M_0 : perpendiculaire à $\overrightarrow{\Omega M_0}(-2\,;-2)$, d'où $x + y = -2$. **Les deux courbes ont la même tangente** $x + y + 2 = 0$ **en** M_0**.**



Exercice 18 : l'hyperbole E, le cercle F et leur tangente commune en M_0.

Corrigé de l'exercice 19

1. $z + i\overline{z} = (x+iy) + i(x-iy) = (x+y)(1+i)$, donc $\left|\frac{z+i\overline{z}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}|x+y|$. En élevant au carré :

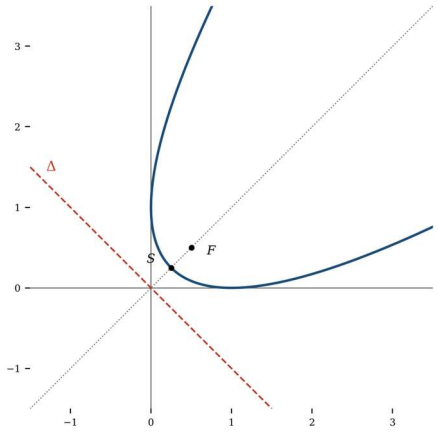
$$\frac{(x+y)^2}{2} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0.$$

2. $\| \overrightarrow{e_1} \| = \| \overrightarrow{e_2} \| = 1$ et $\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{2}(-1+1) = 0$: le repère est orthonormé (direct). Si $M = O + X\overrightarrow{e_1} + Y\overrightarrow{e_2}$, alors $x = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ et $y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$, d'où $x^2 + y^2 = X^2 + Y^2$, $xy = \frac{X^2-Y^2}{2}$ et $x + y = \sqrt{2}X$. L'équation devient

$$2Y^2 - 2\sqrt{2}X + 1 = 0 \Leftrightarrow Y^2 = \sqrt{2}\left(X - \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

3. ζ est une **parabole** de paramètre $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'axe la droite $y = x$, de sommet $S\left(X = \frac{\sqrt{2}}{4}\,;Y = 0\right)$, soit $S\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right)$, de foyer $X = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{p}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $F\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, et de directrice $X = 0$, c'est-à-dire la droite Δ: $x + y = 0$.

4. $\frac{|x+y|}{\sqrt{2}}$ est la distance de M à la droite Δ: $x + y = 0$, et $\left|z - \frac{1+i}{2}\right| = MF$. La relation $(*)$ signifie donc $MF = d(M,\Delta)$: on retrouve la définition de la parabole de foyer F et de directrice Δ.



Exercice 19 : la parabole ζ de foyer $F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et de directrice Δ.

Corrigé de l'exercice 20

1. $(x-1)^2-4y^2=4$, soit $\frac{(x-1)^2}{4}-y^2=1$. $\mathcal{H}$ est une **hyperbole** de centre $\Omega(1\,;0)$, avec $a=2$, $b=1$, $c=\sqrt{5}$, $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Sommets $(3\,;0)$ et $(-1\,;0)$; asymptotes $y=\pm\frac{1}{2}(x-1)$; foyers $\left(1\pm\sqrt{5}\,;0\right)$.

2. a. $\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{4}-1^2=2-1=1 : M_0\in\mathcal{H}$.

b. Dans le repère d'origine Ω, la tangente est $\frac{X_0X}{4}-Y_0Y=1$ avec $X_0=2\sqrt{2}$, $Y_0=1$: $\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)-y=1$, soit

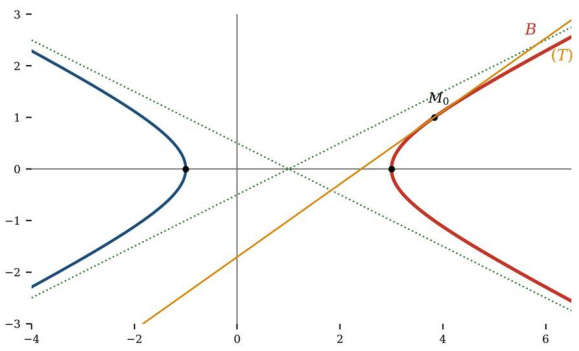
$$(T):\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)-1.$$

3. a. On pose $u=\cos\theta>0$. Le discriminant réduit vaut $(u^2+2u)^2-u^2(5+4u)=u^4-u^2=-u^2\sin^2\theta=(iu\sin\theta)^2$. D'où

$$z=\frac{u^2+2u\pm iu\sin\theta}{u^2},\qquad z'=1+\frac{2}{\cos\theta}+i\tan\theta,\qquad z''=1+\frac{2}{\cos\theta}-i\tan\theta.$$

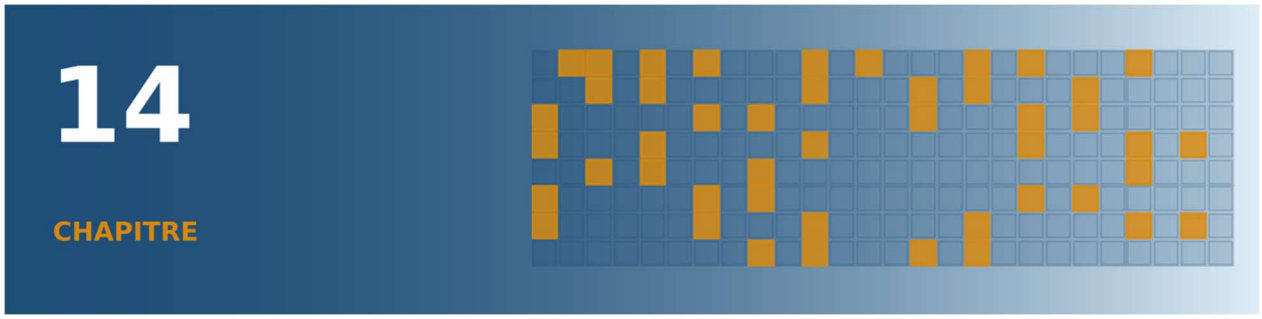
(Pour $\theta=0$, la racine est double : $z'=z''=3$.)

b. $M'\left(1+\frac{2}{\cos\theta}\,;\tan\theta\right)$ vérifie $\frac{(x-1)^2}{4}-y^2=\frac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1$, donc $M'\in\mathcal{H}$; de plus $x-1=\frac{2}{\cos\theta}\geq 2$, donc $x\geq 3$. Il en est de même pour M'', symétrique de M' par rapport à l'axe focal. Lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan\theta$ décrit $\mathbb{R}$: **M' et M'' décrivent toute la branche $\mathcal{B}$ de $\mathcal{H}$ située dans le demi-plan** $x\geq 3$ (branche de sommet $(3\,;0)$).



Exercice 20 : l'hyperbole $\mathcal{H}$, la tangente (T) en M_0 et la branche $\mathcal{B}$ (en rouge).

Chapitre 14 — Arithmétique



Cours • 32 exercices • Corrigés détaillés

Ce que vous devez savoir faire à la fin du chapitre
– Utiliser la division euclidienne et les congruences pour calculer un reste, un chiffre des unités ou des dizaines, et démontrer une divisibilité.
– Dresser une table de congruences pour étudier tous les cas possibles modulo n.
– Calculer un PGCD par l'algorithme d'Euclide et en déduire des coefficients de Bézout.
– Utiliser le lemme de Gauss, le théorème de Bézout et le petit théorème de Fermat.
– Résoudre les équations diophantiennes $ax + by = c$ et les systèmes de congruences simples ; traiter des problèmes concrets (partages, codage).

Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 2, chapitres 7 et 8 : *Divisibilité dans* $\mathbb{Z}$; *Identité de Bézout*). Les lettres a, b, c, n désignent des entiers relatifs.

Cours

I. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition. Soit d un entier non nul. On dit que d **divise** a (ou que a est un multiple de d) s'il existe un entier q tel que $a = dq$. On note $d \mid a$.
Un entier naturel $p \geq 2$ est **premier** si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p.

Propriétés. Pour des entiers non nuls a, b et un entier c :
– si $d \mid a$, alors $-d \mid a$;
– si $a \mid b$ et $b \mid a$, alors $a = b$ ou $a = -b$;
– si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$;
– si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors $a \mid xb + yc$ pour tous entiers x, y.
Factorisations utiles. Pour tout entier $n \geq 1$:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}),$$
$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

En particulier $a - b \mid a^n - b^n$.

II. Division euclidienne

Théorème. Pour tout entier a et tout entier b non nul, il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que

$$a = bq + r \qquad \text{et} \qquad 0 \leq r < |b|.$$

q est le **quotient** et r le **reste** de la division euclidienne de a par b. Le reste appartient à $\{0,1,\dots,|b|-1\}$.

III. Congruences

Définition. Soit n un entier naturel non nul. On dit que a est **congru à b modulo n**, et on note $a \equiv b\ [n]$, si $a - b$ est un multiple de n.
Pour tout entier a, il existe un unique $r \in \{0,\dots,n-1\}$ tel que $a \equiv r\ [n]$: c'est le reste de a modulo n. Deux entiers sont congrus modulo n si et seulement s'ils ont le même reste modulo n.

Propriétés. La congruence modulo n est réflexive, symétrique et transitive. Si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$, alors

$$a + c \equiv b + d\ [n], \qquad ac \equiv bd\ [n], \qquad ha \equiv hb\ [n]\ (h \in \mathbb{Z}), \qquad a^m \equiv b^m\ [n]\ (m \in \mathbb{N}^*).$$

Méthode — calculer a^N modulo n. On cherche une petite puissance $a^k \equiv 1\ [n]$ (ou $\equiv -1$), on écrit la division euclidienne $N = kq + r$, et alors $a^N = (a^k)^q a^r \equiv a^r\ [n]$.
Méthode — table de congruences. Pour étudier une expression polynomiale en x modulo n, on examine les n restes possibles de x (ou de chaque variable) dans un tableau.

IV. PGCD, PPCM

Théorème et définition. Pour a, b non nuls, il existe un unique entier naturel d tel que : $d \mid a$, $d \mid b$, et tout diviseur commun de a et b divise d. On le note $a \wedge b$ (PGCD). Deux entiers sont **premiers entre eux** si $a \wedge b = 1$.
Il existe un unique entier $m > 0$ multiple de a et de b qui divise tout multiple commun : c'est le PPCM, noté $a \vee b$.
Propriétés.
– $a \wedge b = |a| \wedge |b|$; si $b \mid a$, $a \wedge b = |b|$; $(ka) \wedge (kb) = |k|\,(a \wedge b)$.
– **Algorithme d'Euclide :** si $a = bq + r$ avec $r \neq 0$, alors $a \wedge b = b \wedge r$; le PGCD est le dernier reste non nul.
– Il existe un unique couple (a', b') tel que $a = (a \wedge b)a'$, $b = (a \wedge b)b'$ et $a' \wedge b' = 1$.
– $(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$.

V. Théorèmes de Bézout, de Gauss et de Fermat

Théorème de Bézout. $a \wedge b = 1$ si et seulement s'il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.
Corollaire. Si $d = a \wedge b$, il existe deux entiers u, v tels que $au + bv = d$.

Lemme de Gauss. Si $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1$, alors $a \mid c$.
Conséquences.
– Si $a \wedge b = 1$, $a \mid n$ et $b \mid n$, alors $ab \mid n$.

– (**Lemme d'Euclide**) Si un nombre premier p divise bc, alors $p \mid b$ ou $p \mid c$.
– **Inverse modulo b.** Si $b \geq 2$ et $a \wedge b = 1$, il existe un unique $u \in \{1, \dots, b-1\}$ tel que $au \equiv 1\ [b]$.

Petit théorème de Fermat. Soit p un nombre premier et a un entier non divisible par p. Alors $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$.
Pour tout entier a : $a^p \equiv a\ [p]$.

VI. Équations $ax + by = c$

Théorème. Soit $d = a \wedge b$. L'équation $ax + by = c$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si et seulement si $d \mid c$.

Méthode de résolution (cas $a \wedge b = 1$, sinon on divise d'abord par d).

1. On trouve une solution particulière (x_0, y_0) (évidente, ou par l'algorithme d'Euclide « remonté »).
2. Par différence : $a(x - x_0) = -b(y - y_0)$. D'après le lemme de Gauss, $b \mid x - x_0$; on obtient
$$x = x_0 + bk, \qquad y = y_0 - ak, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
3. On vérifie que ces couples sont bien solutions.

Attention. Dans une équation à inconnues **naturelles** (nombres de pièces, d'objets…), on termine en sélectionnant les valeurs de k compatibles avec les contraintes de signe ou d'encadrement.

Exercices

Exercice 1

1. Quel est le reste de la division de 32^{45} par 7 ?
2. Quel est le reste de la division de 24^{40} par 5 ?
3. Déterminer le chiffre des unités de l'écriture décimale de 7^{77}.
4. Déterminer le chiffre des dizaines de l'écriture décimale de 444^{44^4}.

Exercice 2

p et q sont des entiers naturels non nuls.

1. Démontrer que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$.
2. En déduire que, pour que $2^n - 1$ soit premier, il faut que n soit premier.
3. Prouver, à l'aide d'un contre-exemple, que la condition « n est premier » n'est pas suffisante.

Exercice 3

Montrer que, pour tout couple (x, y) d'entiers relatifs, si $x^2 + y^2$ est divisible par 7, alors x et y sont divisibles par 7.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $n^2 \equiv 0\ [8]$ ou $n^2 \equiv 4\ [8]$ si n est pair, et que $n^2 \equiv 1\ [8]$ si n est impair.

Exercice 5

1. Quel est le reste de la division euclidienne de $3^{10}+1$ par 10 ? En déduire le reste de la division euclidienne de $7^{10}+1$ par 10.
2. Soit $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq 9$. Montrer que 10 divise $r^{10}+1$ si et seulement si $r \in \{3,7\}$.
3. Déterminer l'ensemble des entiers naturels x tels que 10 divise $x^{10}+1$.

Exercice 6

On se propose de déterminer tous les couples $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ solutions de l'équation $(E) : 2^x - 3^y = 1$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$.
   a. Quel est le reste de la division euclidienne de 9^k par 8 ?
   b. Déterminer les restes de la division euclidienne de $3^{2k}+1$, puis de $3^{2k+1}+1$, par 8.
2. Soit (x,y) un couple solution de (E). Montrer, à l'aide de 1, que $x \leq 2$.
3. En déduire tous les couples $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ solutions de (E).

Exercice 7

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$:
$$5^{2^{n-2}} - 1 = 4\left(1+5^{2^0}\right)\left(1+5^{2^1}\right)\cdots\left(1+5^{2^{n-3}}\right).$$
2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 3$, 2^n divise $5^{2^{n-2}} - 1$ et 2^{n+1} ne divise pas $5^{2^{n-2}} - 1$.

Exercice 8

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n$ est un entier divisible par 2^n.

Exercice 9

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. 5 divise $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$;
2. 9 divise $4^n - 1 - 3n$.

Exercice 10

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 5 divise $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ si et seulement si 4 ne divise pas n.

Exercice 11

1. On considère l'équation $(E) : 17x - 6y = 2$, où x et y sont des entiers.
   a. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $17x = 6y$.
   b. Déterminer une solution particulière de (E).
   c. En déduire tous les couples de $\mathbb{Z}^2$ solutions de (E).
   d. Montrer que le PGCD de x et y, pour (x,y) solution de (E), vaut 1 ou 2.
   e. Déterminer les couples (x,y) solutions de (E) tels que $x \wedge y = 2$.
   f. Déterminer le couple (x_0,y_0) solution de (E) tel que $x_0 \wedge y_0 = 2$ et $100 \leq y_0 \leq 150$.
2. Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager équitablement et de donner le reste au cuisinier, qui recevrait alors 3 pièces. Mais leur bateau fait naufrage et seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés : le partage laisserait alors 5 pièces d'or au cuisinier.

a. On note N le nombre de pièces du butin, x le nombre de pièces de chaque pirate avant le naufrage et y après le naufrage. Exprimer N en fonction de x, puis en fonction de y.

b. Écrire la relation liant x et y.

c. En utilisant 1.c, déterminer la fortune minimale que peut espérer le cuisinier s'il décide de se débarrasser des six pirates restants.

Exercice 12

1. On considère l'équation (1) d'inconnue $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$: $11n - 24m = 1$.
   a. Justifier que cette équation admet au moins une solution.
   b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de (1).
   c. Déterminer l'ensemble des solutions de (1).
2.
   a. Justifier que $10^p - 1$ divise $10^{pk} - 1$ pour tous $k, p \in \mathbb{N}^*$.
   b. (n, m) désignant un couple d'entiers naturels solution de (1), montrer que $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$.
   c. En déduire l'existence de deux entiers N et M tels que $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$.
   d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.
   e. Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

Exercice 13 (Bac 2008, session principale)

1. Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x - 8y = 5$. Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels que $x = 8k - 1$ et $y = 3k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$.
2.
   a. Soit n, x, y trois entiers tels que $n = 3x + 2$ et $n = 8y + 7$. Montrer que (x, y) est solution de (E).
   b. On considère le système (S) : $n \equiv 2\ [3]$ et $n \equiv 7\ [8]$, où n est un entier. Montrer que n est solution de (S) si et seulement si $n \equiv 23\ [24]$.
3.
   a. Soit k un entier naturel. Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.
   b. Vérifier que 1991 est solution de (S) et montrer que $1991^{2008} - 1$ est divisible par 24.

Exercice 14

Table de correspondance utilisée aux questions 2 à 4 :

Lettre	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	**N**	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1.
   a. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $7u - 13v = 1$.
   b. En déduire deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $14u_0 - 26v_0 = 4$.

c. Déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que $14a - 26k = 4$.

2. On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $\varphi(n)$ le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26. On code un message ainsi : à chaque lettre on associe un entier entre 0 et 25 (A = 0, B = 1, ..., Z = 25) ; la lettre associée à n est codée par la lettre associée à $\varphi(n)$. On sait que F est codée par K et T par O.

   a. Montrer que $5a + b \equiv 10\ [26]$ et $19a + b \equiv 14\ [26]$.

   b. En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a - 26k = 4$.

   c. Déterminer tous les couples (a, b), avec $0 \leq a \leq 25$ et $0 \leq b \leq 25$, vérifiant ce système.

3. On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

   a. Coder le message « GAUSS ».

   b. Soit n et p deux entiers naturels. Montrer que, si $\varphi(n) = \varphi(p)$, alors $17(n - p) \equiv 0\ [26]$. En déduire que deux lettres distinctes sont codées par deux lettres distinctes.

4. On suppose toujours $a = 17$ et $b = 3$.

   a. Soit n un entier naturel. Calculer le reste de la division euclidienne de $23\varphi(n) + 9 - n$ par 26.

   b. En déduire un procédé de décodage.

   c. Décoder le message « KTGZDO ».

Exercice 15 — Suite de Fibonacci

Soit (f_n) la suite définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. 2 divise f_n si et seulement si 3 divise n ;
2. 3 divise f_n si et seulement si 4 divise n ;
3. 4 divise f_n si et seulement si 6 divise n.

Exercice 16 — Nombres de Mersenne

Soit a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer que :

1. $2^a - 1$ divise $2^{ab} - 1$;
2. $(2^a - 1) \wedge (2^b - 1) = 2^{a \wedge b} - 1$;
3. si $2^a - 1$ est premier, alors a est premier.

Exercice 17 — Nombres de Fermat

On appelle nombres de Fermat les entiers $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Partie A. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n divise $2^{F_n} - 2$.

Partie B. On se propose de démontrer que, si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.

I. Soit b et p deux entiers naturels non nuls.

1. Factoriser $b^{2p+1} - b$. En déduire que $b^{2p+1} - b$ et $b^{2p+1} + 1$ sont divisibles par $b + 1$.
2. Démontrer que, pour tous entiers a, m, p non nuls, $a^{m(2p+1)} + 1$ est divisible par $a^m + 1$.

II.

1.

a. Soit n un entier naturel non nul tel que $2^n + 1$ soit premier. Démontrer par l'absurde que n n'a pas de diviseur impair autre que 1.

b. Conclure.

2.

a. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que F_n ne soit pas premier.

b. Sierpiński a démontré que tout nombre de Fermat F_n non premier admet un diviseur de la forme $k \times 2^{n+2} + 1$, où k est un entier naturel non nul. Vérifier que cela correspond à l'exemple précédent.

Exercice 18 — Théorème de Wilson

Soit p un nombre premier et $E_p = \{1,2, \dots, p-1\}$.

1. Montrer que tout élément de E_p est premier avec p.
2. Montrer que, pour tout $a \in E_p$, il existe un unique $b \in E_p$ tel que $ab \equiv 1\ [p]$.
3. Déterminer les éléments a de E_p tels que $a^2 \equiv 1\ [p]$.
4. Montrer que $(p-1)! \equiv p-1\ [p]$.
5. En déduire que, pour tout nombre premier p, $(p-1)! + 1$ est divisible par p.

Exercice 19

Soit a un entier impair et n un entier naturel tel que $n \geq 3$. Établir que $a^{2^{n-2}} \equiv 1\ [2^n]$.

Exercice 20

Montrer que, pour tout entier $b \geq 1$, le nombre $x = 1 + b + 2b^2 + b^3 + b^4$ n'est pas premier.

Exercice 21

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(2n)!}{k}$.

1. Montrer que $s_n = (2n+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{k(2n+1-k)}$.
2. En déduire que s_n est un entier divisible par $2n+1$.

Exercice 22

1. Décomposer 319 en produit de facteurs premiers.
2. Démontrer que, si x et y sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour $3x + 5y$ et $x + 2y$.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ le système d'inconnues a et b : $(3a + 5b)(a + 2b) = 1276$ et $ab = 2m$, où m est le PPCM de a et b.

Exercice 23

1. Soit a un entier naturel. Montrer que $a^5 - a$ est divisible par 10.
2. Soit a et b des entiers naturels avec $a \geq b$. Démontrer que, si $a^5 - b^5$ est divisible par 10, alors $a^2 - b^2$ est divisible par 20.

Exercice 24

Montrer que les entiers suivants ne sont pas premiers :

1. $n^4 - n^2 + 16, n \in \mathbb{Z}$;
2. $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1, n \in \mathbb{N}^*$;

3. $2^{4n+2}+1, n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 25

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $(n^2+n) \wedge (2n+1) = 1$;
2. $(n^3+2n) \wedge (n^4+3n^2+1) = 1$;
3. $(n^2+1) \wedge ((n+1)^2+1) \in \{1,5\}$.

Exercice 26

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

1. 42 divise $n^7 - n$;
2. 2730 divise $n^{13} - n$;
3. $2^{15} - 2^3$ divise $n^{15} - n^3$.

Exercice 27

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35}$ est un entier.

Exercice 28

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. Démontrer que, si $(a^2+ab-b^2)^2 = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.
2. On se propose de déterminer les couples (a,b) tels que $(a^2+ab-b^2)^2 = 1$; un tel couple est appelé solution.
   a. Déterminer a lorsque $a = b$.
   b. Vérifier que (1,1), (2,3) et (5,8) sont des solutions.
   c. Montrer que, si (a,b) est solution et $a \neq b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.
3.
   a. Montrer que, si (x,y) est une solution différente de (1,1), alors $(y-x,x)$ et $(y,y+x)$ sont aussi des solutions.
   b. Déduire de 2.b trois nouvelles solutions.
4. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, (a_n, a_{n+1}) est solution. En déduire que a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 29

On pourra utiliser le résultat suivant : si $a \wedge b = 1$, alors $a^2 \wedge b^2 = 1$. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer $S_n \wedge S_{n+1}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $4S_n = n^2(n+1)^2$.
2. On suppose n pair : $n = 2k, k \geq 1$.
   a. Démontrer que $S_{2k} \wedge S_{2k+1} = (2k+1)^2 \times (k^2 \wedge (k+1)^2)$.
   b. Calculer alors $S_n \wedge S_{n+1}$.
3. On suppose n impair : $n = 2k+1, k \geq 0$.
   a. Démontrer que $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.
   b. Calculer alors $S_n \wedge S_{n+1}$.

4. En déduire qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 30

1. Pour $a = 2$, puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel non nul n tel que $a^n \equiv 1\ [7]$.
2. Soit a un entier naturel non divisible par 7.
   a. Montrer que $a^6 \equiv 1\ [7]$.
   b. On appelle ordre de a modulo 7 le plus petit entier naturel non nul k tel que $a^k \equiv 1\ [7]$. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1\ [7]$. En déduire que k divise 6. Quelles sont les valeurs possibles de k ?
   c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.
3. À tout entier naturel n, on associe $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$. Montrer que $A_{2006} \equiv 6\ [7]$.

Exercice 31

Partie A.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $4^n \equiv 1\ [3]$.
2. Prouver que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3. Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier naturel k, $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?
5. À l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B. Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $4^n \equiv 1\ [p]$.
2. Soit $n \geq 1$ un entier tel que $4^n \equiv 1\ [p]$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1\ [p]$, et r le reste de la division euclidienne de n par b.
   a. Démontrer que $4^r \equiv 1\ [p]$. En déduire que $r = 0$.
   b. Prouver que $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est un multiple de b.
   c. En déduire que b divise $p - 1$.

Exercice 32

1. Calculer $(4^5 - 1) \wedge (4^6 - 1)$.
2. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$. Calculer u_2, u_3 et u_4.
3.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.
   c. En déduire, pour tout entier naturel n, $u_n \wedge u_{n+1}$.
4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   b. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
   c. Déterminer, pour tout entier naturel n, $(4^n - 1) \wedge (4^{n+1} - 1)$.

Corrigés détaillés

Corrigé de l'exercice 1

1. $32 \equiv 4\ [7]$ et $4^3 = 64 \equiv 1\ [7]$. Comme $45 = 3 \times 15$, $32^{45} \equiv (4^3)^{15} \equiv 1\ [7]$: **le reste est** 1.

2. $24 \equiv -1\ [5]$, donc $24^{40} \equiv (-1)^{40} = 1\ [5]$: **le reste est** 1.

3. $7^2 = 49 \equiv -1\ [10]$, donc $7^4 \equiv 1\ [10]$. Comme $77 = 4 \times 19 + 1$, $7^{77} \equiv 7\ [10]$: **le chiffre des unités est** 7.

4. Le chiffre des dizaines est donné par le reste modulo 100. On a $444 \equiv 44\ [100]$. Les puissances de 44 modulo 100 sont :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathbf{44^k \bmod 100}$	44	36	84	96	24	56	64	16	4	76	44

Ainsi $44^{k+10} \equiv 44^k\ [100]$ pour $k \geq 1$: la suite est périodique de période 10. L'exposant $N = 44^4$ se termine par le chiffre 6 ($4^4 = 256$), donc $N \equiv 6\ [10]$, et

$$444^{44^4} \equiv 44^6 \equiv 56\ [100].$$

Le chiffre des dizaines est 5.

Corrigé de l'exercice 2

1. Avec $X = 2^p$: $2^{pq} - 1 = X^q - 1 = (X-1)(X^{q-1} + \cdots + X + 1)$, donc $2^p - 1 \mid 2^{pq} - 1$. Par symétrie, $2^q - 1 \mid 2^{pq} - 1$.

2. Supposons $n \geq 2$ non premier : $n = pq$ avec $1 < p < n$. Alors $2^p - 1$ divise $2^n - 1$ et $1 < 2^p - 1 < 2^n - 1$: $2^n - 1$ n'est pas premier. De plus, pour $n = 1$, $2^1 - 1 = 1$ n'est pas premier. Par contraposée, **si** $2^n - 1$ **est premier, alors** n **est premier**.

3. 11 est premier, mais $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ n'est pas premier.

Corrigé de l'exercice 3

Les carrés modulo 7 sont :

$x \bmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{x^2 \bmod 7}$	0	1	4	2	2	4	1

Les restes possibles de x^2 sont 0, 1, 2, 4. Une somme de deux de ces restes est nulle modulo 7 seulement pour $0 + 0$ (les sommes $1 + 6$, $2 + 5$, $4 + 3$ font intervenir 3, 5 ou 6, qui ne sont pas des carrés). Donc $x^2 \equiv y^2 \equiv 0\ [7]$, ce qui impose $x \equiv y \equiv 0\ [7]$ d'après le tableau.

Corrigé de l'exercice 4

– Si $n = 2k$: $n^2 = 4k^2$. Si k est pair, $k = 2j$ et $n^2 = 16j^2 \equiv 0\ [8]$; si k est impair, k^2 est impair et $n^2 = 4k^2 \equiv 4\ [8]$.

– Si $n = 2k + 1$: $n^2 = 4k(k+1) + 1$. Le produit $k(k+1)$ de deux entiers consécutifs est pair, donc $8 \mid 4k(k+1)$ et $n^2 \equiv 1\ [8]$.

Corrigé de l'exercice 5

1. $3^2 = 9 \equiv -1\ [10]$, donc $3^{10} = (3^2)^5 \equiv (-1)^5 = -1\ [10]$: $3^{10} + 1 \equiv 0\ [10]$, **le reste est** 0. $7 \equiv -3\ [10]$ et 10 est pair : $7^{10} \equiv 3^{10}\ [10]$, donc $7^{10} + 1$ **a aussi pour reste** 0.

2. On calcule r^{10} mod 10 (par exemple avec $r^{10} = (r^2)^5$) :

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r^{10} **mod 10**	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$(r^{10}+1)$ **mod 10**	1	2	5	0	7	6	7	0	5	2

Donc $10 \mid r^{10}+1 \Leftrightarrow r \in \{3,7\}$.

3. Si r est le reste de x modulo 10, alors $x^{10}+1 \equiv r^{10}+1$ [10]. L'ensemble cherché est $\{x \in \mathbb{N} \,/\, x \equiv 3$ [10] ou $x \equiv 7$ [10]$\}$.

Corrigé de l'exercice 6

1. a. $9 \equiv 1$ [8], donc $9^k \equiv 1$ [8] : le reste est 1.

b. $3^{2k}+1 = 9^k+1 \equiv 2$ [8] et $3^{2k+1}+1 = 3\times 9^k+1 \equiv 4$ [8].

2. Si $x \geq 3$, alors $2^x \equiv 0$ [8], donc $3^y+1 = 2^x \equiv 0$ [8]. Or, d'après 1.b, 3^y+1 est congru à 2 ou à 4 modulo 8 : contradiction. Donc $x \leq 2$.

3. $x = 0 : 3^y = 0$, impossible. $x = 1 : 3^y = 1, y = 0$. $x = 2 : 3^y = 3, y = 1$. **Solutions :** (1,0) **et** (2,1)**.**

Corrigé de l'exercice 7

> **Remarque sur l'énoncé.** Le facteur $\left(1+5^{2^0}\right) = 6$ manquait dans la 1re édition. Pour $n = 3$, on vérifie $5^2 - 1 = 24 = 4\times 6$.

1. Pour tout réel X et tout entier $m \geq 1$: $X^{2^m}-1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)\cdots\left(X^{2^{m-1}}+1\right)$. Cela se démontre par récurrence, car $X^{2^{m+1}}-1 = \left(X^{2^m}-1\right)\left(X^{2^m}+1\right)$. Avec $X = 5$ et $m = n-2 \geq 1$:

$$5^{2^{n-2}}-1 = 4\left(1+5^{2^0}\right)\left(1+5^{2^1}\right)\cdots\left(1+5^{2^{n-3}}\right).$$

2. Le produit comporte $n-2$ facteurs de la forme $1+5^{2^j}$, $0 \leq j \leq n-3$. Chacun est divisible par 2 mais pas par 4 :

– pour $j = 0$, c'est 6 ;

– pour $j \geq 1$, 5^{2^j} est un carré impair, donc $5^{2^j} \equiv 1$ [4] et $1+5^{2^j} \equiv 2$ [4].

Chaque facteur s'écrit $2\times$ (impair). Donc $5^{2^{n-2}}-1 = 2^2\times 2^{n-2}\times I = 2^n I$ avec I impair. Ainsi 2^n **divise** $5^{2^{n-2}}-1$ **et** 2^{n+1} **ne le divise pas**.

Corrigé de l'exercice 8

Posons $u_n = \left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n$. Les nombres $3\pm\sqrt{5}$ sont les racines de $X^2-6X+4=0$ (somme 6, produit 4). Donc, pour tout n, $u_{n+2} = 6u_{n+1}-4u_n$, avec $u_0 = 2$ et $u_1 = 6$. Par récurrence, u_n est un entier.

Montrons par récurrence double que $2^n \mid u_n$. C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Si $2^n \mid u_n$ et $2^{n+1} \mid u_{n+1}$, alors $2^{n+2} \mid 6u_{n+1} = 3\times 2u_{n+1}$ et $2^{n+2} \mid 4u_n$, donc $2^{n+2} \mid u_{n+2}$.

Corrigé de l'exercice 9

1. $2^{2n+1}+3^{2n+1} = 2\times 4^n + 3\times 9^n \equiv 2\times 4^n + 3\times 4^n = 5\times 4^n \equiv 0$ [5], car $9 \equiv 4$ [5].

2. Par récurrence. Pour $n = 1 : 4-1-3 = 0$. Si $9 \mid 4^n-1-3n$, alors

$$4^{n+1}-1-3(n+1) = 4(4^n-1-3n)+9n,$$

qui est divisible par 9.

Corrigé de l'exercice 10

Modulo 5 : $2^4 = 16 \equiv 1$, $3^4 = 81 \equiv 1$, $4^4 \equiv 1$. Les restes dépendent donc de n modulo 4 :

n mod 4	1^n	2^n	3^n	4^n	somme mod 5
0	1	1	1	1	4
1	1	2	3	4	0
2	1	4	4	1	0
3	1	3	2	4	0

Donc $5 \mid 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \Leftrightarrow n \not\equiv 0\ [4] \Leftrightarrow 4 \nmid n$.

Corrigé de l'exercice 11

> **Remarque sur l'énoncé.** La ligne « d) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $2x - 8y = 5$ », placée à la fin de cet exercice dans la 1re édition, appartient à l'exercice 13 ; elle a été supprimée ici.

1. a. $17x = 6y$: $6 \mid 17x$ et $6 \wedge 17 = 1$, donc $6 \mid x$ (Gauss) : $x = 6k$, puis $y = 17k$. Solutions : $(6k, 17k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

b. $17x \equiv 2\ [6]$ s'écrit $-x \equiv 2\ [6]$, soit $x \equiv 4\ [6]$. Pour $x = 4$: $68 - 2 = 66 = 6 \times 11$. $(4,11)$ **est solution.**

c. (x, y) est solution si et seulement si $17(x - 4) = 6(y - 11)$. D'après a :

$$x = 4 + 6k, \qquad y = 11 + 17k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

d. Si $d = x \wedge y$, alors d divise $17x - 6y = 2$: $d \in \{1,2\}$.

e. $x = 4 + 6k$ est toujours pair ; $y = 11 + 17k$ est pair si et seulement si k est impair. Pour $k = 2m + 1$, x et y sont pairs et $d = 2$:

$$x = 10 + 12m, \qquad y = 28 + 34m, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

f. $100 \leq 28 + 34m \leq 150 \Leftrightarrow 72 \leq 34m \leq 122 \Leftrightarrow m = 3$. $(x_0, y_0) = (46,130)$; vérification : $17 \times 46 - 6 \times 130 = 782 - 780 = 2$.

2. a. $N = 17x + 3$ et $N = 6y + 5$.

b. $17x + 3 = 6y + 5$, soit $17x - 6y = 2$.

c. D'après 1.c, $x = 4 + 6k$; comme $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on a $k \geq 0$, et $N = 17x + 3 = 71 + 102k$ est minimal pour $k = 0$. Vérification : $71 = 17 \times 4 + 3 = 6 \times 11 + 5$. **La fortune minimale du cuisinier est de** 71 **pièces d'or.**

Corrigé de l'exercice 12

1. a. $11 \wedge 24 = 1$; d'après le théorème de Bézout, il existe (n, m) tel que $11n - 24m = 1$.

b. Algorithme d'Euclide : $24 = 2 \times 11 + 2$, puis $11 = 5 \times 2 + 1$. En remontant :

$$1 = 11 - 5 \times 2 = 11 - 5(24 - 2 \times 11) = 11 \times 11 - 5 \times 24.$$

$(n, m) = (11,5)$ **est solution.**

c. $11n - 24m = 1 \Leftrightarrow 11(n - 11) = 24(m - 5)$. D'après Gauss, $24 \mid n - 11$: $n = 11 + 24k$, $m = 5 + 11k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. a. Avec $X = 10^p$: $X^k - 1 = (X - 1)\left(X^{k-1} + \cdots + 1\right)$.

b. $11n = 1 + 24m$, donc $10^{11n} = 10 \times 10^{24m}$, et

$$(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=10^{11}\ -1-10^{24m+1}+10=9.$$

c. On prend $(n,m)=(11,5)$. D'après 2.a, $10^{11n}-1=(10^{11}-1)N$ et $10^{24}\ -1=(10^{24}-1)M'$ avec N, M' entiers ; avec $M=10M'$, on obtient $(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M=9$.

d. Un diviseur commun de $10^{24}-1$ et de $10^{11}-1$ divise la combinaison $(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M=9$.

e. D'après d, le PGCD divise 9. Or $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$ s'écrivent avec des chiffres 9, donc sont divisibles par 9. **Le PGCD vaut** 9**.**

Corrigé de l'exercice 13

> **Remarque sur l'énoncé.** L'équation imprimée « $2x-8y=5$ » n'a aucune solution ($2\wedge 8=2$ ne divise pas 5). Le système $n=3x+2=8y+7$ conduit à $3x-8y=5$, qui est l'équation correcte.

1. $(-1,-1)$ est solution : $-3+8=5$. Alors $3x-8y=5\Leftrightarrow 3(x+1)=8(y+1)$. D'après Gauss ($3\wedge 8=1$), $8\mid x+1$: $x+1=8k$ et $y+1=3k$. Réciproquement, ces couples conviennent. $x=8k-1$**,** $y=3k-1$**,** $k\in\mathbb{Z}$**.**

2. a. $3x+2=8y+7\Leftrightarrow 3x-8y=5$.

b. Si n est solution de (S), il existe x, y avec $n=3x+2=8y+7$; d'après a et 1, $x=8k-1$ et $n=3(8k-1)+2=24k-1$, donc $n\equiv 23\ [24]$. Réciproquement, si $n=24k+23$, alors $n=3(8k+7)+2\equiv 2\ [3]$ et $n=8(3k+2)+7\equiv 7\ [8]$.

3. a. $2^{2k}=4^k\equiv 1\ [3]$ et $7^{2k}=49^k\equiv 1\ [8]$.

b. $1991=24\times 82+23$: 1991 est solution de (S), donc $1991\equiv 2\ [3]$ et $1991\equiv 7\ [8]$. Alors $1991^{2008}\equiv 2^{2008}\equiv 1\ [3]$ et $1991^{2008}\equiv 7^{2008}\equiv 1\ [8]$. L'entier $1991^{2008}-1$ est divisible par 3 et par 8, qui sont premiers entre eux : **il est divisible par** 24.

Corrigé de l'exercice 14

1. a. $7\times 2-13\times 1=1$: $(u,v)=(2,1)$.

b. En multipliant par 2 : $14\times 2-26\times 1=2$; en multipliant encore par 2 : $14\times 4-26\times 2=4$. $(u_0,v_0)=(4,2)$**.**

c. $14a-26k=4\Leftrightarrow 7a-13k=2\Leftrightarrow 7(a-4)=13(k-2)$. D'après Gauss : $a=4+13t$, $k=2+7t$, $t\in\mathbb{Z}$.

2. a. F (5) est codée par K (10) : $5a+b\equiv 10\ [26]$. T (19) est codée par O (14) : $19a+b\equiv 14\ [26]$.

b. Par différence, $14a\equiv 4\ [26]$: il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $14a-4=26k$.

c. D'après 1.c, $a\equiv 4\ [13]$, d'où $a\in\{4,17\}$ dans $\{0,\dots,25\}$. Puis $b\equiv 10-5a\ [26]$: pour $a=4$, $b\equiv -10\equiv 16$; pour $a=17$, $b\equiv -75\equiv 3$. Les deux couples vérifient la seconde congruence ($19\times 4+16=92\equiv 14$ et $19\times 17+3=326\equiv 14$). $(a,b)\in\{(4,16),(17,3)\}$**.**

3. a. $\varphi(n)=(17n+3)\bmod 26$: G (6) $\mapsto 105\equiv 1$ (B) ; A (0) $\mapsto 3$ (D) ; U (20) $\mapsto 343\equiv 5$ (F) ; S (18) $\mapsto 309\equiv 23$ (X). **« GAUSS » est codé « BDFXX ».**

b. $\varphi(n)=\varphi(p)\Rightarrow 17n+3\equiv 17p+3\ [26]\Rightarrow 17(n-p)\equiv 0\ [26]$. Comme $17\wedge 26=1$, Gauss donne $26\mid n-p$. Pour deux lettres, n, $p\in\{0,\dots,25\}$, donc $|n-p|<26$ et $n=p$: **deux lettres distinctes ont des codes distincts**.

4. a. $\varphi(n)\equiv 17n+3\ [26]$, donc

$$23\varphi(n)+9-n\equiv 391n+69+9-n=390n+78=26(15n+3)\equiv 0\ [26].$$

Le reste est 0.

b. Si une lettre est codée par la lettre de rang c, son rang n vérifie $n \equiv 23c + 9\ [26]$: **on décode en remplaçant c par le reste de $23c + 9$ modulo 26.**

c. K (10) → $239 \equiv 5$ (F) ; T (19) → $446 \equiv 4$ (E) ; G (6) → $147 \equiv 17$ (R) ; Z (25) → $584 \equiv 12$ (M) ; D (3) → $78 \equiv 0$ (A) ; O (14) → $331 \equiv 19$ (T). **« KTGZDO » se décode en « FERMAT ».**

Corrigé de l'exercice 15

On établit d'abord, par récurrence sur k, la formule $f_{n+k} = f_k f_{n+1} + f_{k-1} f_n$ ($k \geq 1$). Elle est vraie pour $k = 1$ et $k = 2$; si elle est vraie aux rangs k et $k + 1$, elle l'est au rang $k + 2$ par addition.

1. Avec $k = 3$: $f_{n+3} = 2f_{n+1} + f_n \equiv f_n\ [2]$. Les restes modulo 2 sont donc périodiques de période 3 : $f_0, f_1, f_2 \equiv 0,1,1$. Ainsi $2 \mid f_n \Leftrightarrow n \equiv 0\ [3]$.

2. Avec $k = 4$: $f_{n+4} = 3f_{n+1} + 2f_n \equiv -f_n\ [3]$. Donc $3 \mid f_{n+4} \Leftrightarrow 3 \mid f_n$. Or $f_0 = 0$ et $f_1 = f_2 = 1, f_3 = 2$ ne sont pas divisibles par 3. Ainsi $3 \mid f_n \Leftrightarrow 4 \mid n$.

3. Avec $k = 6$: $f_{n+6} = 8f_{n+1} + 5f_n \equiv f_n\ [4]$. Les restes de $f_0, \dots, f_5$ modulo 4 sont 0,1,1,2,3,1 : seul f_0 est divisible par 4. Donc $4 \mid f_n \Leftrightarrow 6 \mid n$.

Corrigé de l'exercice 16

1. C'est l'exercice 2, question 1 : avec $X = 2^a$, $X - 1 \mid X^b - 1$.

2. Posons $g(n) = 2^n - 1$ (avec $g(0) = 0$). Si $a = bq + r$, $0 \leq r < b$:

$$2^a - 1 = 2^r\left(2^{bq} - 1\right) + (2^r - 1).$$

Comme $2^b - 1 \mid 2^{bq} - 1$, on en déduit $g(a) \wedge g(b) = g(b) \wedge g(r)$ (un diviseur commun de deux des trois nombres divise le troisième). Les exposants suivent donc exactement l'algorithme d'Euclide appliqué à (a, b) ; celui-ci s'arrête sur $(a \wedge b, 0)$, et $g(a \wedge b) \wedge g(0) = g(a \wedge b) \wedge 0 = g(a \wedge b)$. D'où

$$(2^a - 1) \wedge \left(2^b - 1\right) = 2^{a \wedge b} - 1.$$

3. C'est l'exercice 2, question 2.

Corrigé de l'exercice 17

Partie A. Soit $n \geq 1$. On a $2^{2^n} \equiv -1\ [F_n]$, donc $2^{2^{n+1}} = \left(2^{2^n}\right)^2 \equiv 1\ [F_n]$. Or $F_n - 1 = 2^{2^n}$ est un multiple de 2^{n+1}, car $2^n \geq n + 1$. Écrivons $F_n - 1 = 2^{n+1}q$. Alors

$$2^{F_n - 1} = \left(2^{2^{n+1}}\right)^q \equiv 1\ [F_n], \qquad \text{donc} \qquad 2^{F_n} \equiv 2\ [F_n].$$

F_n divise $2^{F_n} - 2$.

Partie B. I. 1. $b^{2p+1} - b = b(b^{2p} - 1) = b(b^2 - 1)(b^{2p-2} + \cdots + b^2 + 1) = b(b - 1)(b + 1)(b^{2p-2} + \cdots + 1)$: il est divisible par $b + 1$. Ensuite $b^{2p+1} + 1 = (b^{2p+1} - b) + (b + 1)$ est aussi divisible par $b + 1$.

2. On applique 1 avec $b = a^m$: $a^{m(2p+1)} + 1 = b^{2p+1} + 1$ est divisible par $b + 1 = a^m + 1$.

II. 1. a. Supposons que n admette un diviseur impair $2p + 1 \geq 3$: $n = m(2p + 1)$ avec $1 \leq m < n$. D'après I.2 (avec $a = 2$), $2^m + 1$ divise $2^n + 1$, et $1 < 2^m + 1 < 2^n + 1$: $2^n + 1$ ne serait pas premier, ce qui est absurde.

b. Le seul diviseur impair de n étant 1, la décomposition de n en facteurs premiers ne contient que le facteur 2 : **n est une puissance de 2.**

2. a. $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257$ et $F_4 = 65537$ sont premiers, mais

$$F_5 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417.$$

Le plus petit entier est $n = 5$.

b. Pour $n = 5$, $k \times 2^7 + 1 = 128k + 1$, et $641 = 128 \times 5 + 1$: le diviseur 641 est bien de la forme annoncée, avec $k = 5$.

Corrigé de l'exercice 18

1. Si $a \in E_p$, $a \wedge p$ divise p, donc vaut 1 ou p ; comme $0 < a < p$, $p \nmid a$, donc $a \wedge p = 1$.

2. *Existence :* d'après Bézout, il existe u, v tels que $au + pv = 1$, donc $au \equiv 1\ [p]$. Le reste b de u modulo p vérifie $ab \equiv 1\ [p]$, et $b \neq 0$, donc $b \in E_p$. *Unicité :* si $ab \equiv ab' \equiv 1\ [p]$, alors $p \mid a(b - b')$, et par Gauss $p \mid b - b'$; comme $|b - b'| < p$, $b = b'$.

3. $a^2 \equiv 1\ [p] \Leftrightarrow p \mid (a-1)(a+1) \Leftrightarrow p \mid a - 1$ ou $p \mid a + 1$ (lemme d'Euclide). Comme $0 \leq a - 1 < p$ et $2 \leq a + 1 \leq p$: $a = 1$ **ou** $a = p - 1$.

4. Pour $p = 2$: $1! = 1 = p - 1$. Pour $p \geq 3$, chaque $a \in \{2, \ldots, p-2\}$ a un inverse $b \in \{2, \ldots, p-2\}$ distinct de a (d'après 3, $a^2 \not\equiv 1$; et $b \neq 1$, $b \neq p - 1$). Ces éléments se regroupent donc par paires $\{a, b\}$ de produit $\equiv 1\ [p]$. Ainsi $2 \times 3 \times \ldots \times (p-2) \equiv 1\ [p]$ et

$$(p-1)! \equiv 1 \times 1 \times (p-1) = p - 1\ [p].$$

5. $(p-1)! + 1 \equiv p \equiv 0\ [p]$: p divise $(p-1)! + 1$.

Corrigé de l'exercice 19

Par récurrence sur $n \geq 3$. Pour $n = 3$: $a^2 \equiv 1\ [8]$ d'après l'exercice 4 (a impair). Si $a^{2^{n-2}} = 1 + k\,2^n$ avec k entier, alors

$$a^{2^{n-1}} = (1 + k\,2^n)^2 = 1 + k\,2^{n+1} + k^2 2^{2n} \equiv 1\ [2^{n+1}],$$

car $2n \geq n + 1$.

Corrigé de l'exercice 20

$$(b^2+1)(b^2+b+1) = b^4 + b^3 + b^2 + b^2 + b + 1 = b^4 + b^3 + 2b^2 + b + 1 = x.$$

Pour $b \geq 1$, $b^2 + 1 \geq 2$ et $b^2 + b + 1 \geq 3$: x est le produit de deux entiers supérieurs à 1, donc x **n'est pas premier** (la condition $b > 3$ de la 1re édition n'est pas nécessaire).

Corrigé de l'exercice 21

1. On regroupe les termes d'indices k et $2n + 1 - k$ ($1 \leq k \leq n$) ; quand k décrit $\{1, \ldots, n\}$, $2n + 1 - k$ décrit $\{n+1, \ldots, 2n\}$. Or

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1-k} = \frac{2n+1}{k(2n+1-k)}.$$

D'où $s_n = (2n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{k(2n+1-k)}$.

2. Chaque $\frac{(2n)!}{k}$ est entier, donc s_n est un entier. Pour $1 \leq k \leq n$, les entiers k et $2n + 1 - k$ sont distincts et compris entre 1 et $2n$: ce sont deux facteurs distincts du produit $(2n)! = 1 \times 2 \times \ldots \times 2n$. Donc $k(2n + 1 - k)$ divise $(2n)!$, et la somme du membre de droite est un entier. s_n **est divisible par** $2n + 1$.

Corrigé de l'exercice 22

1. $319 = 11 \times 29$.

2. Soit d un diviseur commun de $3x+5y$ et de $x+2y$. Il divise $3(x+2y)-(3x+5y)=y$, puis $(x+2y)-2y=x$. Donc $d \mid x \wedge y = 1$.

3. Soit $d = a \wedge b$: $a = dx$, $b = dy$ avec $x \wedge y = 1$, $x, y \geq 1$, et $m = a \vee b = dxy$. La condition $ab = 2m$ s'écrit $d^2xy = 2dxy$, soit $d = 2$. La première équation devient $4(3x+5y)(x+2y) = 1276$, soit

$$(3x+5y)(x+2y) = 319 = 11 \times 29.$$

D'après 2, les deux facteurs sont premiers entre eux ; de plus $3x+5y > x+2y \geq 3$. Donc $x+2y = 11$ et $3x+5y = 29$, d'où $y=4$, $x=3$ (et $3 \wedge 4 = 1$). $(a,b) = (6,8)$**.** Vérification : $(18+40)(6+16) = 58 \times 22 = 1276$ et $6 \times 8 = 48 = 2 \times 24 = 2\,(6 \vee 8)$.

Corrigé de l'exercice 23

1. a^5 et a ont la même parité, donc $2 \mid a^5 - a$. D'après Fermat (5 premier), $a^5 \equiv a\ [5]$. Comme $2 \wedge 5 = 1$, $10 \mid a^5 - a$.

2. D'après 1, $a^5 \equiv a\ [10]$ et $b^5 \equiv b\ [10]$. Si $10 \mid a^5 - b^5$, alors $a \equiv b\ [10]$: $a - b = 10k$. Puis $a + b = (a-b) + 2b = 10k + 2b$ est pair. Donc $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ est divisible par $10 \times 2 = 20$.

Corrigé de l'exercice 24

1. $n^4 - n^2 + 16 = (n^2+4)^2 - 9n^2 = (n^2 - 3n + 4)(n^2 + 3n + 4)$. Pour tout entier n, $n^2 \pm 3n + 4 = \left(n \pm \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 1$, et ces entiers valent au moins 2. Le nombre est donc **composé**.

2. $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = (n+1)^4 - n^4 = (2n+1)(2n^2+2n+1)$, avec $2n+1 \geq 3$ et $2n^2+2n+1 \geq 5$ pour $n \geq 1$: **composé**.

3. Avec $X = 2^n$: $2^{4n+2} + 1 = 4X^4 + 1 = (2X^2+1)^2 - 4X^2 = (2X^2 - 2X + 1)(2X^2 + 2X + 1)$ (identité de Sophie Germain). Pour $n \geq 1$, $X \geq 2$ et $2X^2 - 2X + 1 \geq 5$: **composé** (par exemple $2^6 + 1 = 65 = 5 \times 13$).

Corrigé de l'exercice 25

1. Si d divise n^2+n et $2n+1$, il divise $(2n+1)^2 - 4(n^2+n) = 1$.

2. Par l'algorithme d'Euclide sur les expressions :

$$n^4 + 3n^2 + 1 = n(n^3+2n) + (n^2+1), \qquad n^3 + 2n = n(n^2+1) + n, \qquad n^2 + 1 = n \times n + 1.$$

Donc $(n^3+2n) \wedge (n^4+3n^2+1) = (n^3+2n) \wedge (n^2+1) = (n^2+1) \wedge n = n \wedge 1 = 1$.

3. Soit d le PGCD de n^2+1 et de $(n+1)^2+1 = n^2+2n+2$. Il divise leur différence $2n+1$, puis $4(n^2+1) - (2n+1)(2n-1) = 5$. Donc $d \in \{1,5\}$ (les deux cas se produisent : $n=1$ donne $2 \wedge 5 = 1$, $n=2$ donne $5 \wedge 10 = 5$).

Corrigé de l'exercice 26

On utilise la propriété suivante, conséquence de Fermat : **si p est premier et si $p-1$ divise $k-1$, alors $n^k \equiv n\ [p]$ pour tout entier n.** En effet, si $p \mid n$ c'est clair ; sinon $n^{p-1} \equiv 1$, donc $n^{k-1} \equiv 1$ et $n^k \equiv n\ [p]$.

1. $42 = 2 \times 3 \times 7$, et 1, 2, 6 divisent $7 - 1 = 6$: 2, 3 et 7 divisent $n^7 - n$. Ces nombres étant premiers deux à deux, $42 \mid n^7 - n$.

2. $2730 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$, et 1, 2, 4, 6, 12 divisent $13 - 1 = 12$: $2730 \mid n^{13} - n$.

3. $2^{15} - 2^3 = 8 \times 4095 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$, et $n^{15} - n^3 = n^3(n^{12} - 1)$.

– Pour $p \in \{5,7,13\}$: $p-1$ divise 12 ; si $p \nmid n$, $n^{12} \equiv 1\ [p]$, et sinon $p \mid n^3$.

– Modulo 8 : si n est pair, $8 \mid n^3$; sinon $n^2 \equiv 1$ [8] (exercice 4) et $n^{12} \equiv 1$ [8].

– Modulo 9 : si $3 \mid n$, $27 \mid n^3$; sinon $n^2 = 1 + 3t$ et $n^6 = (1+3t)^3 = 1 + 9t + 27t^2 + 27t^3 \equiv 1$ [9], donc $n^{12} \equiv 1$ [9].

Les facteurs 8, 9, 5, 7, 13 étant premiers entre eux deux à deux, $2^{15} - 2^3$ **divise** $n^{15} - n^3$.

Corrigé de l'exercice 27

$\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23}{35} = \frac{5n^7+7n^5+23n}{35}$. D'après Fermat :

– modulo 5 : $5n^7 + 7n^5 + 23n \equiv 2n^5 + 3n \equiv 2n + 3n = 5n \equiv 0$;

– modulo 7 : $5n^7 + 7n^5 + 23n \equiv 5n + 2n = 7n \equiv 0$.

Le numérateur est divisible par 5 et par 7, donc par 35 : **le nombre est un entier**.

Corrigé de l'exercice 28

1. Si d divise a et b, alors d^2 divise $a^2 + ab - b^2$, donc d^4 divise $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$: $d = 1$.

2. a. Si $a = b$: $(a^2)^2 = 1$, donc $a = 1$.

b. $1 + 1 - 1 = 1$; $4 + 6 - 9 = 1$; $25 + 40 - 64 = 1$: les carrés valent 1.

c. Si $a > b \geq 1$, alors $a^2 - b^2 \geq (b+1)^2 - b^2 \geq 3$ et $ab \geq 2$, donc $a^2 + ab - b^2 \geq 5$: ce n'est pas une solution. Donc, si (a, b) est solution avec $a \neq b$, $a < b$ et $a^2 - b^2 < 0$.

3. a. Soit (x, y) une solution différente de (1,1) : d'après 2.a et 2.c, $x < y$, donc $y - x \geq 1$.

$$(y-x)^2 + (y-x)x - x^2 = y^2 - xy - x^2 = -(x^2 + xy - y^2),$$
$$y^2 + y(x+y) - (x+y)^2 = y^2 - xy - x^2 = -(x^2 + xy - y^2).$$

Les carrés valent 1 : $(y - x, x)$ **et** $(y, x + y)$ **sont des solutions** (la seconde construction vaut aussi pour (1,1)).

b. À partir de (2,3) : (1,2) et (3,5) ; à partir de (5,8) : (3,5) et (8,13). **Trois nouvelles solutions :** (1,2), (3,5), (8,13).

4. Par récurrence : $(a_0, a_1) = (1,1)$ est solution ; si (a_n, a_{n+1}) est solution, alors $(a_{n+1}, a_n + a_{n+1}) = (a_{n+1}, a_{n+2})$ l'est (question 3.a, seconde construction). D'après 1, $a_n \wedge a_{n+1} = 1$.

Corrigé de l'exercice 29

1. Par récurrence : $4S_1 = 4 = 1^2 \times 2^2$; si $4S_n = n^2(n+1)^2$, alors

$$4S_{n+1} = n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3 = (n+1)^2(n^2 + 4n + 4) = (n+1)^2(n+2)^2.$$

2. a. $S_{2k} = k^2(2k+1)^2$ et $S_{2k+1} = \frac{(2k+1)^2(2k+2)^2}{4} = (2k+1)^2(k+1)^2$. Donc $S_{2k} \wedge S_{2k+1} = (2k+1)^2(k^2 \wedge (k+1)^2)$.

b. $k \wedge (k+1) = 1$, donc $k^2 \wedge (k+1)^2 = 1$ et $S_n \wedge S_{n+1} = (2k+1)^2 = (n+1)^2$.

3. a. Un diviseur commun de $2k + 1$ et $2k + 3$ divise 2, et ces nombres sont impairs : leur PGCD vaut 1.

b. $S_{2k+1} = (2k+1)^2(k+1)^2$ et $S_{2k+2} = (k+1)^2(2k+3)^2$, donc $S_n \wedge S_{n+1} = (k+1)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

4. Pour n pair ($n \geq 2$), $(n+1)^2 \geq 9$. Pour n impair, $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow n = 1$. **L'unique valeur est** $n = 1$: $S_1 = 1$ et $S_2 = 9$.

Corrigé de l'exercice 30

1. $2^3 = 8 \equiv 1\ [7] : n = 3.\ 3^2 \equiv 2, 3^3 \equiv 6, 3^6 \equiv 36 \equiv 1\ [7] : n = 6.$

2. a. C'est le petit théorème de Fermat (7 premier, $7 \nmid a$).

b. $6 = kq + r$ avec $0 \leq r < k : 1 \equiv a^6 = \left(a^k\right)^q a^r \equiv a^r\ [7]$. Si $r \neq 0$, cela contredirait la minimalité de k ; donc $r = 0$ et $k \mid 6 : k \in \{1,2,3,6\}$.

c.

a	2	3	4	5	6
ordre modulo 7	3	6	3	6	2

($4^3 = 64 \equiv 1$; $5^2 \equiv 4, 5^3 \equiv 6$, donc l'ordre de 5 est 6 ; $6 \equiv -1$, d'ordre 2.)

3. $2006 = 6 \times 334 + 2$, donc, pour $a \in \{2, \ldots, 6\}$, $a^{2006} \equiv a^2\ [7]$. Ainsi

$$A_{2006} \equiv 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 90 \equiv 6\ [7].$$

Corrigé de l'exercice 31

Partie A. 1. $4 \equiv 1\ [3]$, donc $4^n \equiv 1\ [3]$.

2. 29 est premier et ne divise pas 4 : d'après Fermat, $4^{28} \equiv 1\ [29]$.

3. $4^1 \equiv 4, 4^2 = 16 \equiv -1, 4^3 \equiv -4 \equiv 13, 4^4 \equiv 1\ [17]$. Donc $4^{4k} = (4^4)^k \equiv 1\ [17]$.

4. $4 \equiv -1\ [5]$, donc $4^n \equiv (-1)^n\ [5] : 5 \mid 4^n - 1 \Leftrightarrow n$ **est pair**.

5. D'après 1, 2, 3 (car $28 = 4 \times 7$) et 4 (car 28 est pair) : **3, 5, 17 et** 29 **divisent** $4^{28} - 1$.

Partie B. 1. p est premier et différent de 2, donc $p \nmid 4$. D'après Fermat, $4^{p-1} \equiv 1\ [p]$, avec $p - 1 \geq 2$.

2. a. $n = bq + r, 0 \leq r < b : 1 \equiv 4^n = \left(4^b\right)^q 4^r \equiv 4^r\ [p]$. Si $r \geq 1$, cela contredirait la minimalité de b ; donc $r = 0$.

b. Si $n = bq$, alors $4^n = \left(4^b\right)^q \equiv 1$. Réciproquement, si $p \mid 4^n - 1$, alors $b \mid n$ d'après a.

c. D'après B.1, $p \mid 4^{p-1} - 1$; d'après b, b **divise** $p - 1$.

Corrigé de l'exercice 32

1. $(4^6 - 1) - 4(4^5 - 1) = 3$, donc le PGCD divise 3 ; et 3 divise les deux nombres ($4 \equiv 1\ [3]$). **Le PGCD vaut** 3 (ce que confirme $4^5 - 1 = 1023 = 3 \times 11 \times 31$ et $4^6 - 1 = 4095 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$).

2. $u_2 = 5, u_3 = 21, u_4 = 85$.

3. a. Par récurrence : $u_1 = 4u_0 + 1$; si $u_{n+1} = 4u_n + 1$, alors $4u_n = u_{n+1} - 1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - (u_{n+1} - 1) = 4u_{n+1} + 1$.

b. $u_0 \in \mathbb{N}$ et, si $u_n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} = 4u_n + 1 \in \mathbb{N}$.

c. Un diviseur commun de u_n et u_{n+1} divise $u_{n+1} - 4u_n = 1 : u_n \wedge u_{n+1} = 1$.

4. a. $v_{n+1} = 4u_n + 1 + \frac{1}{3} = 4\left(u_n + \frac{1}{3}\right) = 4v_n$: suite géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$.

b. $v_n = \frac{4^n}{3}$ et $u_n = \frac{4^n - 1}{3}$.

c. $4^n - 1 = 3u_n$ et $4^{n+1} - 1 = 3u_{n+1}$, donc $(4^n - 1) \wedge (4^{n+1} - 1) = 3(u_n \wedge u_{n+1}) = 3$ pour $n \geq 1$ (pour $n = 0$, $0 \wedge 3 = 3$ également).

Chapitre 15 — Géométrie dans l'espace



Cours • 7 exercices • Corrigés détaillés

Ce que vous devez savoir faire à la fin du chapitre
– Calculer un produit scalaire, un déterminant et un produit vectoriel à l'aide des composantes.
– Utiliser le produit vectoriel pour obtenir un vecteur normal, une aire, un volume, une distance.
– Écrire une équation de plan et une représentation paramétrique de droite ; étudier les positions relatives.
– Déterminer l'intersection d'une sphère et d'un plan.
– Utiliser translations et homothéties de l'espace (effet sur les distances, les aires et les volumes).

L'espace ξ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 2, chapitre 6 : *Géométrie dans l'espace*).

Cours

I. Produit scalaire

Définition. Si $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ sont non nuls, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\widehat{AOB}$; si l'un des deux est nul, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Propriétés.
– $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$, où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).
– $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$; $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
– Le produit scalaire est symétrique et bilinéaire.
– Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$: $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

II. Déterminant et produit vectoriel

Déterminant. Pour $\vec{u}(a,b,c)$, $\vec{v}(a',b',c')$, $\vec{w}(a'',b'',c'')$:

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=a\begin{vmatrix}b' & b''\\ c' & c''\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}a' & a''\\ c' & c''\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}a' & a''\\ b' & b''\end{vmatrix}.$$

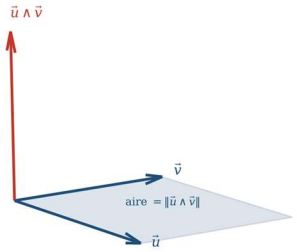
Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Produit vectoriel. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$. Sinon, $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est l'unique vecteur tel que : $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$; $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base directe ; $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Propriétés et calcul.
– $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$; le produit vectoriel est bilinéaire ; $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
– Composantes :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (bc' - cb' \,;\; ca' - ac' \,;\; ab' - ba').$$

– $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.



Le produit vectoriel est normal au plan de $\vec{u}$ et $\vec{v}$; sa norme est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Applications métriques.
– Aire du parallélogramme $ABCD$: $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$; aire du triangle ABC : $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.
– Volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$: $\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)\right|$.
– Volume du tétraèdre $ABCD$: $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD}\right|$ $\left(= \frac{1}{3} \times \text{aire de base} \times \text{hauteur}\right)$.
– Distance d'un point M à la droite $\Delta(A, \vec{u})$: $d(M, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

III. Plans, droites, distances

Plans. Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c) \neq \vec{0}$ a une équation $ax + by + cz + d = 0$. Si A, B, C ne sont pas alignés, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC). Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
Distance d'un point à un plan. Si P: $ax + by + cz + d = 0$ et $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$d(M, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Droites. La droite $D(A, \vec{u})$, avec $A(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, admet la représentation paramétrique $x = x_0 + \lambda\alpha$, $y = y_0 + \lambda\beta$, $z = z_0 + \lambda\gamma$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonale à un plan de vecteur normal $\vec{n}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

IV. Sphères

Équation. La sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R a pour équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$. Réciproquement, l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ est une sphère, un point ou l'ensemble vide, selon le signe de $\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4} - \delta$.

Intersection avec un plan P. Soit $h = d(\Omega, P)$ et H le projeté orthogonal de Ω sur P. L'intersection est vide si $h > R$, réduite à $\{H\}$ si $h = R$ (plan tangent), et c'est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - h^2}$ si $h < R$.

V. Translations et homothéties de l'espace

Translation $t_{\vec{u}}$: $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$; écriture $x' = x + a, y' = y + b, z' = z + c$. Elle conserve les distances, le produit scalaire, le parallélisme, l'orthogonalité et les milieux ; l'image d'une droite (d'un plan) est une droite (un plan) parallèle ; l'image d'une sphère est une sphère de même rayon.

Homothétie $h_{(I,k)}$, $k \neq 0$: $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$; pour tous M, N, $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$. Écriture : $x' = kx + (1-k)a$, etc., si $I(a,b,c)$. Elle multiplie les distances par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$; l'image d'un plan est un plan parallèle ; l'image d'une sphère de rayon R est une sphère de rayon $|k|R$.

Méthode — projeté orthogonal H d'un point M sur un plan P de vecteur normal $\vec{n}$. On écrit $\overrightarrow{MH} = t\,\vec{n}$ (car $(MH) \perp P$), puis on traduit $H \in P$ pour obtenir t. On en déduit H et $MH = |t| \,\|\vec{n}\| = d(M,P)$.

Exercices

Exercice 1

Soit le cube $OABCDEFG$ (arêtes $[OA]$, $[OC]$, $[OD]$ issues de O ; B, E, F, G tels que $OABC$ et $DEFG$ soient des faces, E au-dessus de A et G au-dessus de C). L'espace est orienté par le repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right)$. Soit a un réel strictement positif ; L, M, K sont les points définis par $\overrightarrow{OL} = a\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{BF}$.

1.
   a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$.
   b. En déduire l'aire du triangle DLM.
   c. Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).
2. On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM).
   a. Démontrer que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}$.
   b. Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{OH} = \lambda\overrightarrow{OK}$. Démontrer que $\lambda = \frac{a}{a^2+2}$. En déduire que H appartient au segment $[OK]$.
   c. Déterminer les coordonnées de H.
   d. Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$. En déduire que $HK = \frac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$.

Exercice 2

Soit a un réel strictement positif et $OABC$ un tétraèdre tel que les triangles OAB, OAC et OBC sont rectangles en O et $OA = OB = OC = a$. On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point défini par $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{HO}$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3. *Calcul de OH.*
   a. Calculer le volume V du tétraèdre $OABC$, puis l'aire S du triangle ABC.
   b. Exprimer OH en fonction de V et de S ; en déduire que $OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
4. *Étude du tétraèdre $ABCD$.* L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O; \frac{1}{a}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right)$.
   a. Démontrer que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$.
   b. Démontrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier (toutes ses arêtes ont la même longueur).
   c. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH), puis calculer ses coordonnées.

Exercice 3 (Bac, section Mathématiques, 2008, session principale)

On considère les points $A(1,0,2)$, $B(0,0,1)$, $C(0,-1,3)$ et le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

1.
   a. Vérifier que E a pour coordonnées $(0,2,3)$.
   b. Calculer le volume du tétraèdre $ABCE$.
2.
   a. Soit P le plan d'équation $x - 2y - z + 5 = 0$. Montrer que P est parallèle au plan (ABC).
   b. Soit K le point défini par $2\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Calculer les coordonnées de K et vérifier que K appartient à P.
3. Soit h l'homothétie de centre E qui transforme C en K.
   a. Déterminer le rapport de h.
   b. Le plan P coupe les arêtes $[EA]$ et $[EB]$ respectivement en I et J. Calculer le volume du tétraèdre $EIJK$.

Exercice 4 (Bac, section Sciences expérimentales, 2008, session principale)

On considère les points $A(3,2,6)$, $B(1,2,4)$ et $C(4,-2,5)$.

1.
   a. Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   b. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   c. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.
2. Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC). Montrer que $OH = \frac{4}{3}$.
3. Soit S la sphère de centre O passant par A.
   a. Justifier que l'intersection de S et du plan (ABC) est un cercle ζ de centre H.
   b. Calculer le rayon du cercle ζ.

Exercice 5 (type bac)

On considère les points $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ et $C(0,0,3)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; en déduire l'aire du triangle ABC et une équation du plan (ABC).

2. Calculer la distance de O au plan (ABC) et les coordonnées du projeté orthogonal H de O sur ce plan.
3. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$ de deux façons.
4. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2. Quel est le volume de l'image du tétraèdre $OABC$ par h ?

Exercice 6 (type bac)

Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$.

1. Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R.
2. Soit P le plan d'équation $2x-y+2z-1=0$. Montrer que P coupe S suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Déterminer les plans parallèles à P et tangents à S.
4. Vérifier que $A(5,-2,3)$ appartient à S et donner une équation du plan tangent à S en A.

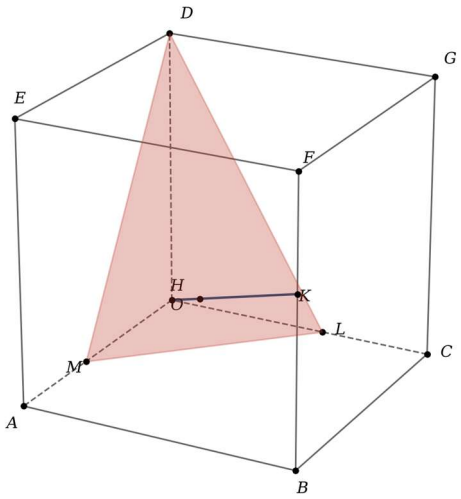
Exercice 7 (type bac)

Soit D la droite de représentation paramétrique $x=1+t$, $y=2-t$, $z=2t$ $(t\in\mathbb{R})$ et P le plan d'équation $x+y+z=6$.

1. Montrer que D et P sont sécants et déterminer leur point d'intersection I.
2. Soit $A(1,2,0)$. Déterminer le projeté orthogonal A' de A sur P, la distance de A à P et le symétrique A'' de A par rapport à P.
3. Calculer la distance du point O à la droite D.

Corrigés détaillés

Corrigé de l'exercice 1



Exercice 1 : le plan (DLM) (en rouge) et la droite (OK) qui lui est orthogonale en H (cas $a=0{,}6$).

Dans le repère $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$: $A(1,0,0)$, $C(0,1,0)$, $D(0,0,1)$, $B(1,1,0)$, $F(1,1,1)$, d'où

$$L(0,a,0),\qquad M(a,0,0),\qquad K(1,1,a)\quad \left(\overrightarrow{BK}=a\overrightarrow{BF}=a\vec{k}\right).$$

1. a. $\overrightarrow{DM}(a,0,-1)$ et $\overrightarrow{DL}(0,a,-1)$, donc

$$\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL} = (0 \times (-1) - (-1) \times a\,;\ (-1) \times 0 - a \times (-1)\,;\ a \times a - 0 \times 0) = (a\,;a\,;a^2).$$

b. $\mathcal{A}(DLM) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + a^4} = \frac{a}{2}\sqrt{a^2+2}$.

c. $\overrightarrow{OK}(1,1,a) = \frac{1}{a}\left(\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}\right)$ est colinéaire à un vecteur normal du plan (DLM) : $(OK) \perp (DLM)$. (Une équation de ce plan est $x + y + az = a$.)

2. a. H appartient au plan (DLM), ainsi que M ; donc $\overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{OK}$. Alors

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}\right) \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}.$$

b. $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = a \times 1 = a$ et $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK} = \lambda\, OK^2 = \lambda(a^2+2)$. Donc $\lambda = \frac{a}{a^2+2}$. On a $\lambda > 0$, et $\lambda < 1 \Leftrightarrow a^2 - a + 2 > 0$, ce qui est toujours vrai (discriminant $-7 < 0$). Donc $0 < \lambda < 1$ et $H \in [OK]$.

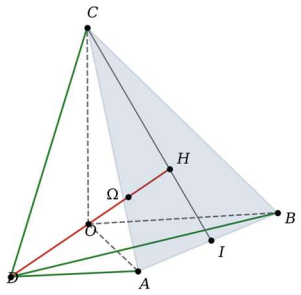
c. $H = \lambda K$: $H\left(\frac{a}{a^2+2}\,,\ \frac{a}{a^2+2}\,,\ \frac{a^2}{a^2+2}\right)$. (Vérification : $x + y + az = \frac{2a+a^3}{a^2+2} = a$.)

d. $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH} = (1-\lambda)\overrightarrow{OK} = \frac{a^2-a+2}{a^2+2}\overrightarrow{OK}$, d'où

$$HK = \frac{a^2 - a + 2}{a^2 + 2}\sqrt{a^2+2} = \frac{a^2 - a + 2}{\sqrt{a^2+2}}.$$

Corrigé de l'exercice 2

Remarque sur l'énoncé. La définition du point D manquait dans la 1re édition. On a choisi $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{HO}$ (O milieu de $[HD]$), qui est conforme à la figure et rend le tétraèdre $ABCD$ régulier, comme le demande la question 4.b.



Exercice 2 : tétraèdre trirectangle OABC, orthocentre H de ABC, tétraèdre régulier ABCD et centre Ω de sa sphère circonscrite.

1. Les triangles OAB, OAC, OBC sont rectangles isocèles de côtés a : $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$. ABC **est équilatéral.**

2. (OC) est orthogonale à (OA) et à (OB), donc au plan (OAB), et $(OC) \perp (AB)$. De plus $(CI) \perp (AB)$. La droite (AB) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (OIC), donc à ce plan, et en particulier à (OH). Ainsi (OH) est orthogonale à (AB) et à (IC), deux droites sécantes du plan (ABC) : $(OH) \perp (ABC)$, et H est le projeté orthogonal de O sur (ABC). Puis $(BC) \perp (OH)$ et $(BC) \perp (OA)$ (car $(OA) \perp (OBC)$), donc $(BC) \perp (OAH)$ et $(AH) \perp (BC)$. H est sur les hauteurs issues de C et de A : H **est l'orthocentre de** ABC (c'est aussi son centre de gravité, ABC étant équilatéral).

3. a. En prenant OAB pour base et OC pour hauteur : $V = \frac{1}{3} \times \frac{a^2}{2} \times a = \frac{a^3}{6}$. $S = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

b. En prenant ABC pour base et OH pour hauteur : $V = \frac{1}{3}S \times OH$, d'où

$$OH = \frac{3V}{S} = \frac{a^3/2}{\sqrt{3}\,a^2/2} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

4. Dans ce repère : $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(0,0,a)$.

a. Le plan (ABC) a pour équation $x + y + z = a$ et pour vecteur normal $(1,1,1)$. H est le projeté de O : $H(t,t,t)$ avec $3t = a$. $H\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$ (on retrouve $OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$).

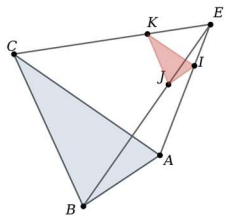
b. $D\left(-\frac{a}{3},-\frac{a}{3},-\frac{a}{3}\right)$, d'où $DA^2 = \left(\frac{4a}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{3}\right)^2 = 2a^2$, et de même $DB^2 = DC^2 = 2a^2$ par symétrie des coordonnées. Toutes les arêtes mesurent $a\sqrt{2}$: $ABCD$ **est régulier**.

c. Ω est équidistant de A, B, C : il appartient à la droite perpendiculaire au plan (ABC) passant par le centre H du cercle circonscrit à ABC, c'est-à-dire à (OH). Donc $\Omega(t,t,t)$ et

$$\Omega A^2 = \Omega D^2 \Leftrightarrow (a-t)^2 + 2t^2 = 3\left(t + \frac{a}{3}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 - 2at = 2at + \frac{a^2}{3} \Leftrightarrow t = \frac{a}{6}.$$

$\Omega\left(\frac{a}{6},\frac{a}{6},\frac{a}{6}\right)$: c'est l'isobarycentre de A, B, C, D.

Corrigé de l'exercice 3



Exercice 3 : le tétraèdre $ABCE$ et sa section IJK par le plan P, image de ABC par l'homothétie h.

1. a. $\overrightarrow{AB}(-1,0,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1,-1,1)$, donc

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \big(0 \times 1 - (-1)(-1)\,;\ (-1)(-1) - (-1) \times 1\,;\ (-1)(-1) - 0 \times (-1)\big) = (-1,2,1).$$

$E = A + (-1,2,1)$: $E(0,2,3)$.

b. $V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AE}\right| = \frac{1}{6}\left\|\overrightarrow{AE}\right\|^2 = \frac{1}{6}(1+4+1) = 1.$

2. a. $\vec{n}(1,-2,-1)$, vecteur normal de P, est colinéaire à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-1,2,1)$, vecteur normal de (ABC) : les plans sont parallèles. Ils sont même strictement parallèles, car $A \notin P$ $(1 - 0 - 2 + 5 = 4 \neq 0)$.

b. $2\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OK} = \frac{2\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{O}}{3}$: $K(0,1,3)$, et $0 - 2 - 3 + 5 = 0$: $K \in P$.

3. a. $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$, donc le rapport de h est $\frac{1}{3}$.

b. h transforme le plan (ABC) en le plan parallèle passant par $h(C) = K$, c'est-à-dire P. Donc $h(A)$ est le point d'intersection de (EA) et de P : $h(A) = I$; de même $h(B) = J$. Le tétraèdre $EIJK$ est l'image de $EABC$ par h ; les volumes étant multipliés par $\left(\frac{1}{3}\right)^3$:

$$V(EIJK) = \frac{1}{27} \times 1 = \frac{1}{27}.$$

Corrigé de l'exercice 4

1. a. $\overrightarrow{AB}(-2,0,-2)$ et $\overrightarrow{AC}(1,-4,-1)$, donc

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0 \times (-1) - (-2)(-4)\,;\ (-2) \times 1 - (-2)(-1)\,;\ (-2)(-4) - 0 \times 1) = (-8,-4,8).$$

b. Ce vecteur n'est pas nul : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc A, B, C **ne sont pas alignés**.

c. $\overrightarrow{AO}(-3,-2,-6)$: $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AO} = 24 + 8 - 48 = -16$, donc $V(OABC) = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$.

2. Un vecteur normal de (ABC) est $(2,1,-2)$; le plan $2x + y - 2z + d = 0$ passe par A : $6 + 2 - 12 + d = 0$, $d = 4$. Donc (ABC): $2x + y - 2z + 4 = 0$ et

$$OH = d\big(O,(ABC)\big) = \frac{|4|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{4}{3}.$$

(Autre méthode : $OH = \frac{3V}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{8}{\frac{1}{2} \times 12} = \frac{4}{3}$.) De plus, $H = t(2,1,-2)$ avec $9t + 4 = 0$: $H\left(-\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

3. a. Le rayon de S est $R = OA = \sqrt{9+4+36} = 7$. Comme $d\big(O,(ABC)\big) = \frac{4}{3} < 7$, l'intersection est un cercle, de centre le projeté orthogonal de O sur le plan, c'est-à-dire H.

b. $r = \sqrt{R^2 - OH^2} = \sqrt{49 - \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{425}{9}} = \frac{5\sqrt{17}}{3}$.

Corrigé de l'exercice 5

1. $\overrightarrow{AB}(-1,2,0)$, $\overrightarrow{AC}(-1,0,3)$: $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (6,3,2)$, de norme 7. Aire : $\frac{7}{2}$. Le plan a pour vecteur normal $(6,3,2)$ et passe par A : (ABC): $6x + 3y + 2z = 6$.

2. $d\big(O,(ABC)\big) = \frac{6}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$. $H = t(6,3,2)$ avec $49t = 6$: $H\left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49}\right)$.

3. $V = \frac{1}{6}\, OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$ (trièdre rectangle) ; ou $V = \frac{1}{3} \times \frac{7}{2} \times \frac{6}{7} = 1$.

4. Une homothétie de rapport 2 multiplie les volumes par 2^3 : volume 8.

Corrigé de l'exercice 6

1. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 2 + 1 + 4 + 9 = 16$: sphère de centre $\Omega(1,-2,3)$ et de rayon $R = 4$.

2. $d(\Omega, P) = \frac{|2+2+6-1|}{3} = 3 < 4$: l'intersection est un cercle de rayon $\sqrt{16-9} = \sqrt{7}$, de centre le projeté H de Ω : $H = \Omega + t(2,-1,2)$ avec $9 + 9t = 0$, $t = -1$, soit $H(-1,-1,1)$.

3. Q: $2x - y + 2z + d = 0$ est tangent à S si et seulement si $\frac{|10+d|}{3} = 4$, soit $d = 2$ ou $d = -22$: $2x - y + 2z + 2 = 0$ et $2x - y + 2z - 22 = 0$.

4. $(5-1)^2 + 0 + 0 = 16$: $A \in S$. Le plan tangent en A est orthogonal à $\overrightarrow{\Omega A}(4,0,0)$: c'est le plan $x = 5$.

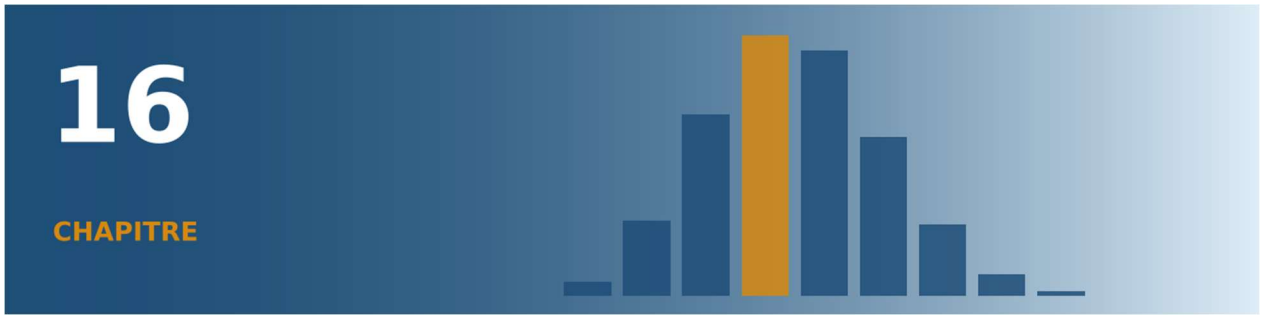
Corrigé de l'exercice 7

1. $\vec{u}(1,-1,2)$ dirige D, $\vec{n}(1,1,1)$ est normal à P ; $\vec{u}\cdot\vec{n}=2\neq 0$: D et P sont sécants. $(1+t)+(2-t)+2t=6\Leftrightarrow t=\frac{3}{2}$: $I\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},3\right)$.

2. $A'=A+s\,\vec{n}$ avec $3+3s=6$, $s=1$: $A'(2,3,1)$; $d(A,P)=AA'=\sqrt{3}$; $A''=A+2\vec{n}=(3,4,2)$.

3. $A\in D$: $d(O,D)=\frac{\|\overrightarrow{OA}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ avec $\overrightarrow{OA}\wedge\vec{u}=(1,2,0)\wedge(1,-1,2)=(4,-2,-3)$: $d(O,D)=\sqrt{\frac{29}{6}}\approx 2{,}20$.

Chapitre 16 — Probabilités



Cours • 24 exercices • Corrigés détaillés

Ce que vous devez savoir faire à la fin du chapitre
– Dénombrer des tirages (successifs avec ou sans remise, simultanés) et calculer des probabilités dans une situation d'équiprobabilité.
– Utiliser les probabilités conditionnelles, un arbre pondéré, la formule des probabilités totales et la formule de Bayes.
– Reconnaître des événements indépendants et une loi binomiale.
– Déterminer la loi d'une variable aléatoire, son espérance, sa variance et sa fonction de répartition.
– Utiliser une loi continue (uniforme, exponentielle, ou loi à densité donnée).

Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 2, chapitre 9 : *Probabilités*).

Cours

I. Dénombrement (rappels)

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$.

Type de tirage de p éléments	Modèle	Nombre
successifs avec remise	p-uplets	n^p
successifs sans remise	arrangements	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
simultanés	combinaisons	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

Le nombre de permutations de E est $n!$.

II. Probabilité sur un ensemble fini

Définitions. L'**univers** E est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire ; un **événement** est une partie de E. Une **probabilité** sur E est une application p de $\mathcal{P}(E)$ dans $[0,1]$ telle que $p(E) = 1$ et $p(A)$ est la somme des probabilités des événements élémentaires qui composent A.
En situation d'**équiprobabilité** : $p(A) = \dfrac{\text{card}A}{\text{card}E}$.

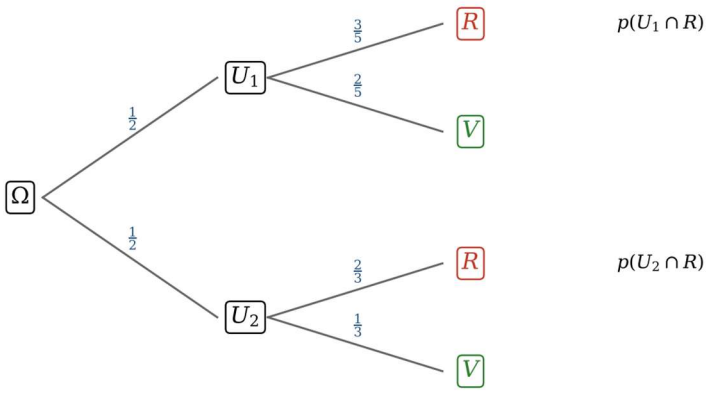
Propriétés. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$; $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$; si $A \cap B = \varnothing$, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

III. Probabilités conditionnelles, indépendance

Théorème et définition. Si $p(B) \neq 0$, l'application p_B définie par $p_B(A) = p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ est une probabilité sur E (probabilité de A sachant B). Ainsi $p(A \cap B) = p(B)\,p(A/B)$.
Indépendance. A et B sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A)\,p(B)$; si $p(B) \neq 0$, cela équivaut à $p(A/B) = p(A)$.
Formule des probabilités totales. Si $B_1, \ldots, B_n$ forment une partition de E avec $p(B_i) \neq 0$:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p\,(B_i)\,p(A/B_i).$$

Formule de Bayes. $p(B_k/A) = \frac{p(B_k)\,p(A/B_k)}{\sum_i p(B_i)\,p(A/B_i)}$.



Arbre pondéré (exercice 2) : la somme des poids issus d'un nœud vaut 1 ; la probabilité d'un chemin est le produit des poids ; $p(R)$ est la somme des probabilités des chemins menant à R.

IV. Variables aléatoires

Définitions. Une **variable aléatoire** (aléa numérique) est une application $X : E \to \mathbb{R}$. Si $X(E) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, la **loi** de X est la donnée des $p_i = p(X = x_i)$, avec $\sum p_i = 1$.
– **Espérance :** $E(X) = \sum x_i p_i$. **Variance :** $V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$. **Écart-type :** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
– **Fonction de répartition :** $F(x) = p(X \leq x)$; c'est une fonction en escalier, croissante, continue à droite, nulle avant x_1 et égale à 1 après x_n.

Propriétés. $E(\alpha X) = \alpha E(X)$, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$; $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
Loi binomiale. On répète n fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues dont le succès a la probabilité p. Le nombre X de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$p(X = k) = C_n^k\,p^k(1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n \qquad ; \qquad E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p).$$

V. Lois continues

Loi à densité. Une fonction f continue et positive sur un intervalle I, d'intégrale 1 sur I, est une **densité** ; la probabilité associée est $P([c,d]) = \int_c^d f(x)\,dx$ pour $[c,d] \subset I$. Une valeur isolée a une probabilité nulle.

Loi uniforme sur $[a,b]$: $f(x) = \frac{1}{b-a}$, donc $P([c,d]) = \frac{d-c}{b-a}$.

Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ sur $[0,+\infty[$;

$$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad P(X \geq t) = e^{-\lambda t}, \qquad P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda} \ .$$

Elle est **sans vieillissement** : $P(X \geq t+h \,/\, X \geq t) = P(X \geq h)$.

Méthode — modéliser. Avant tout calcul : préciser l'univers et l'hypothèse d'équiprobabilité (« au hasard », « indiscernables ») ; identifier le type de tirage (ordre ? remise ?) ; en présence d'étapes successives, dresser un **arbre** ; pour « au moins un », passer à l'**événement contraire**.

Exercices

Exercice 1

Une urne contient 12 boules blanches et 8 boules noires. Chacune des 20 boules a la même probabilité d'être tirée.

1. On tire simultanément 5 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   a. 3 boules blanches et 2 boules noires ?
   b. des boules qui ne sont pas toutes de la même couleur ?
2. On tire successivement 5 boules, avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   a. 3 boules blanches et 2 boules noires, dans cet ordre ?
   b. 3 boules blanches et 2 boules noires, dans un ordre quelconque ?
3. On tire successivement 3 boules, en remettant la boule si elle est blanche et en ne la remettant pas si elle est noire. Quelle est la probabilité de tirer :
   a. exactement une boule blanche ?
   b. au moins une boule blanche ?

Exercice 2

Deux urnes indiscernables U_1 et U_2 contiennent : U_1 : 3 boules rouges et 2 boules vertes ; U_2 : 2 boules rouges et 1 boule verte. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité que la boule soit rouge ?
2. On suppose que la boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 ?

Exercice 3

Une urne contient 3 jetons marqués (a) et 2 jetons marqués (b). On tire successivement et sans remise deux jetons. Quelle est la probabilité de tirer un jeton (b) en premier et un jeton (a) en second ?

Exercice 4

Une urne contient des jetons rouges et noirs, portant chacun un numéro. On tire un jeton au hasard. La probabilité que le jeton soit rouge est $\frac{1}{3}$, qu'il porte un numéro pair est $\frac{4}{9}$, qu'il soit rouge et porte un numéro pair est $\frac{1}{9}$.

1. Quelle est la probabilité que le jeton soit noir ?
2. Quelle est la probabilité qu'il porte un numéro impair ?
3. Quelle est la probabilité qu'il soit noir et porte un numéro impair ?
4. Les événements « être noir » et « porter un numéro impair » sont-ils indépendants ?
5. Sachant que le jeton tiré est noir, quelle est la probabilité qu'il porte un numéro impair ?

Exercice 5

I. Une urne contient deux boules blanches et n boules noires, indiscernables au toucher. Un joueur tire simultanément deux boules ; on note A_2 l'événement « le joueur a tiré deux boules blanches ». Déterminer n pour que $p(A_2) = \frac{1}{15}$.

II. Dans la suite, $n = 4$. Un joueur tire simultanément deux boules ; on note A_0 : « deux boules noires », A_1 : « une noire et une blanche », A_2 : « deux blanches ».

1. Calculer $p(A_0)$ et $p(A_1)$.
2. Le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée et perd deux points pour chaque boule noire tirée. Calculer la probabilité qu'il soit gagnant (score strictement positif).

III. Après ce premier tirage, le joueur remet les boules noires dans l'urne, laisse de côté les boules blanches tirées, puis effectue un nouveau tirage simultané de deux boules. Soit B_i l'événement « on obtient i boule(s) blanche(s) lors du deuxième tirage » ($i = 0,1,2$).

1. Donner $p(B_0/A_2)$ et en déduire $p(B_0 \cap A_2)$. Calculer de même $p(B_0 \cap A_1)$ et $p(B_0 \cap A_0)$. En déduire que $p(B_0) = \frac{41}{75}$.
2. Montrer de même que $p(B_2) = \frac{2}{75}$. En déduire $p(B_1)$.

Exercice 6

On dispose de deux dés cubiques d'apparence identique : l'un est parfait, l'autre est truqué ; pour le dé truqué, la probabilité d'obtenir un six est $\frac{1}{3}$. Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1.
   a. On lance le dé parfait 3 fois de suite (lancers indépendants). Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux six.
   b. Même question avec le dé truqué.
2. On choisit l'un des deux dés au hasard et on le lance 3 fois de suite. On note T : « choisir le dé truqué », A : « choisir le dé parfait et obtenir exactement deux six », B : « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux six », C : « obtenir exactement deux six ».
   a. Calculer $p(A)$ puis $p(B)$.
   b. En déduire $p(C)$.
   c. Déterminer la probabilité d'avoir choisi le dé truqué, sachant qu'on a obtenu exactement deux six.

Exercice 7

1. Une urne U_1 contient 2 jetons numérotés 1 et 2 ; une urne U_2 contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4. On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne.
   a. Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?
   b. On a tiré un jeton portant le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de U_1 ?
2. On rassemble les deux urnes en une seule contenant les 6 jetons. On tire simultanément et au hasard 2 jetons.
   a. Calculer la probabilité de tirer 2 jetons portant le même numéro.
   b. Soit S la variable aléatoire égale à la somme des numéros des 2 jetons tirés. Déterminer la loi de S.
   c. Deux joueurs, Claude et Dominique, conviennent que, si la somme est impaire, Claude donne 10 dinars à Dominique et que, dans le cas contraire, Claude reçoit λ dinars de Dominique. Soit X le gain algébrique de Claude. Calculer $E(X)$ en fonction de λ, puis déterminer λ pour que le jeu soit équitable ($E(X) = 0$).

Exercice 8

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément deux boules. On note A_0 : « aucune boule noire », A_1 : « une seule boule noire », A_2 : « deux boules noires ». Montrer que $p(A_0) = \frac{6}{15}$ et $p(A_1) = \frac{8}{15}$; en déduire $p(A_2)$.
2. Il reste 4 boules dans l'urne ; on effectue un second tirage simultané de deux boules. On note B_0, B_1, B_2 les événements « aucune », « une seule », « deux » boules noires au second tirage.
   a. Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$ et $p_{A_2}(B_0)$.
   b. Calculer $p(B_0)$.
   c. On n'a obtenu aucune boule noire au second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire au premier ?
3. Soit R l'événement « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient sorties ». Montrer que $p(R) = \frac{1}{3}$.

Exercice 9

250 candidats se présentent à un examen comportant une épreuve écrite et une épreuve orale. Un candidat ne peut passer l'oral que s'il est admis à l'écrit.

1. Sachant que 120 candidats sont admis à l'écrit, quelle est la probabilité qu'un candidat passe l'oral ?
2. 60 candidats seulement sont déclarés admis. Quelle est la probabilité qu'un candidat admis à l'écrit réussisse l'oral ?

Exercice 10

On fait tourner une roue comportant 12 secteurs de même taille numérotés de 1 à 12. Les secteurs de numéro pair sont jaunes ; les secteurs de numéro impair multiple de 3 sont verts ; les autres sont rouges. Si la roue s'arrête sur un secteur vert, on tire un billet dans une urne A, sinon dans une urne B. Dans A, un billet sur quatre est gagnant ; dans B, un billet sur vingt. Calculer la probabilité d'obtenir un billet gagnant.

Exercice 11

Un fumeur essaie de réduire sa consommation. S'il reste un jour sans fumer, il fume le lendemain avec la probabilité 0,4 ; s'il fume un jour, il fume le lendemain avec la probabilité 0,2. On note U_n la probabilité qu'il fume le n-ième jour.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = -0{,}2\,U_n + 0{,}4$.
2. On pose $V_n = U_n - \frac{1}{3}$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique.
3. En déduire U_n en fonction de n et de U_1.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 12

Soit A et B deux événements indépendants.

1. Démontrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants, et qu'il en est de même de A et $\overline{B}$, et de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
2. On suppose $p(A) = 0{,}2$ et $p(B) = 0{,}6$. Calculer $p(A \cup B)$, $p\left(A \cup \overline{B}\right)$, $p\left(\overline{A} \cup B\right)$ et $p\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$.

Exercice 13

Un grossiste est approvisionné par trois marques M_1, M_2, M_3 : la moitié de son stock provient de M_1, un huitième de M_2 et trois huitièmes de M_3. 13 % des appareils de M_1, 5 % de ceux de M_2 et 10 % de ceux de M_3 sont rouges. On choisit au hasard un appareil emballé.

1. Quelle est la probabilité qu'il vienne de M_3 ?
2. Quelle est la probabilité qu'il soit rouge sachant qu'il vient de M_2 ?
3. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas rouge ?
4. L'appareil choisi est rouge. Quelle est la probabilité qu'il soit de la marque M_1 ?

Exercice 14

On considère n sacs $S_1, \ldots, S_n$ $(n \geq 3)$: S_1 contient trois boules blanches et une noire ; chacun des autres contient quatre boules noires et une blanche.

Partie A. On tire une boule de chacun des sacs S_1, S_2, S_3. Soit X le nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer la loi de X, puis calculer $E(X)$.
2. Représenter graphiquement la fonction de répartition F de X.

Partie B. On tire une boule de S_1 et on la place dans S_2, puis on tire une boule de S_2 et on la place dans S_3, et ainsi de suite jusqu'au k-ième tirage $(1 \leq k \leq n)$. On note a_k la probabilité de l'événement A_k : « obtenir une boule blanche au k-ième tirage ».

1. Calculer $p(A_k/A_{k-1})$ et $p\left(A_k/\overline{A_{k-1}}\right)$ pour $k \geq 2$; en déduire que $a_k = \frac{1}{6}a_{k-1} + \frac{1}{6}$.
2. On pose $b_k = a_k - \frac{1}{5}$. Montrer que (b_k) est une suite géométrique. En déduire a_k en fonction de k.

Exercice 15 — Jeu du « chuck-a-luck »

On parie sur un nombre de 1 à 6, puis on lance 3 dés. Si le nombre parié sort 3 fois, on gagne 3 dinars ; 2 fois, 2 dinars ; 1 fois, 1 dinar ; s'il ne sort pas, on perd 1 dinar. Soit X le gain lors d'une partie.

1. Déterminer la loi de X, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2. Représenter graphiquement la fonction de répartition F de X.

Exercice 16

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches. Soit $n \geq 2$. On répète n fois l'épreuve « tirer une boule puis la remettre » (tirages équiprobables et indépendants). On note p_n la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n-ième tirage.

1. Calculer p_2, p_3 et p_4.
2. On note B_n : « on tire une boule blanche au n-ième tirage » et U_n : « on tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».
   a. Calculer $p(B_n)$.
   b. Exprimer $p(U_n)$ en fonction de n.
   c. En déduire p_n et vérifier que $p_n = \frac{n-1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
3. On pose $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.
   a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 2$, $S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   b. Déterminer la limite de (S_n).

Exercice 17

Robin joue à un jeu électronique : chaque partie est un duel contre l'un des monstres M_1, M_2, M_3 choisi par la machine. M_1 apparaît avec la probabilité $\frac{1}{2}$, M_2 et M_3 ont la même probabilité d'apparition. Robin gagne avec la probabilité 0,3 contre M_1, 0,4 contre M_2 et 1 contre M_3.

1. Calculer la probabilité que Robin gagne une partie.
2. Sachant que Robin a perdu la partie, quelle est la probabilité :
   a. qu'il ait joué contre M_1 ?
   b. qu'il ait joué contre M_3 ?
3. Robin joue quatre parties indépendantes. Calculer la probabilité qu'il en gagne au moins une.

Exercice 18

Une machine tombe au plus une fois en panne par mois. Si elle n'a pas de panne le mois n, la probabilité qu'elle en ait une le mois $n+1$ est 0,24 ; si elle tombe en panne le mois n, la probabilité qu'elle tombe en panne le mois $n+1$ est 0,04. La probabilité de panne le premier mois est 0,1. On note E_n : « la machine tombe en panne le n-ième mois » et $p_n = p(E_n)$; ainsi $p_1 = 0{,}1$.

1.
   a. Donner $p(E_{n+1}/E_n)$ et $p\left(E_{n+1}/\overline{E_n}\right)$. Exprimer $p(E_n \cap E_{n+1})$ et $p\left(\overline{E_n} \cap E_{n+1}\right)$ en fonction de p_n.
   b. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0{,}24 - 0{,}2\,p_n$.
2.
   a. Résoudre l'équation $p = 0{,}24 - 0{,}2\,p$.
   b. On pose $u_n = p_n - p$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n ; en déduire u_n et p_n en fonction de n.
   c. Montrer que (p_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 19

Un magasin stocke des boîtes rouges (25 %) et bleues (75 %), chacune protégée par un carton. Parmi les cartons contenant une boîte rouge, 45 % portent la marque M ; parmi ceux contenant une boîte bleue, 60 %. On prend un carton au hasard.

1. On ouvre le carton : il contient une boîte rouge. Quelle est la probabilité p_1 que le carton porte la marque M ? Si la boîte était bleue, quelle serait la probabilité p_2 ?
2. Quel est le pourcentage de cartons marqués M ? En déduire la probabilité p_3 qu'un carton tiré porte la marque M.
3. On n'ouvre pas le carton, mais on remarque qu'il porte la marque M. Quelle est la probabilité p_4 qu'il contienne une boîte rouge ?

Exercice 20

Quatre filles et trois garçons passent un oral ; l'ordre de passage est tiré au hasard.

1. L'examinateur tire les sept noms l'un après l'autre. On note F_1 : « le premier candidat est une fille » et F_2 : « le deuxième candidat est une fille ».
   a. Quelle est la probabilité que les deux premiers candidats soient des filles ?
   b. Quelle est la probabilité que le deuxième soit une fille sachant que le premier en est une ?
   c. Quelle est la probabilité que le deuxième candidat soit une fille ?
2. L'examinateur tire simultanément quatre noms. Soit X le nombre de filles désignées.
   a. Déterminer la loi de X.
   b. Calculer $E(X)$.

Exercice 21

Des gaufrettes sont vendues en paquets : dans 5 % des cas l'emballage n'est pas intact ; dans 70 % des paquets d'emballage non intact, il y a au moins une gaufrette cassée ; 90 % des paquets d'emballage intact ne contiennent aucune gaufrette cassée.

1. Un client achète un paquet au hasard. On note I : « l'emballage est intact » et C : « au moins une gaufrette est cassée ».
   a. Calculer $p(I)$.
   b. On considère E : « l'emballage n'est pas intact et aucune gaufrette n'est cassée » et F : « l'emballage est intact et aucune gaufrette n'est cassée ». Exprimer E et F à l'aide de I, $\overline{I}$ et $\overline{C}$, puis calculer $p(E)$ et $p(F)$. En déduire $p\left(\overline{C}\right)$ puis $p(C)$.
2. Les paquets sont vendus par lots de cinq (choix indépendants). Quelle est la probabilité que, dans un lot, au moins quatre paquets aient un emballage intact ? qu'aucune gaufrette ne soit cassée ? (Résultats à 10^{-4} près.)

Exercice 22

Un jeu consiste à extraire simultanément 3 boules d'une urne contenant 5 boules rouges et 5 boules vertes. Si le joueur obtient 3 rouges (événement R_3), il gagne 500 dinars ; 2 rouges et 1 verte (R_2), 300 dinars ; sinon (événement E), il ne gagne rien.

1. Montrer que $p(R_2) = \frac{5}{12}$ et $p(R_3) = \frac{1}{12}$.
2. Soit X le gain du joueur. Donner la loi de X et calculer $E(X)$.
3. On modifie les règles : si R_3 ou R_2 est réalisé, le joueur ne gagne rien immédiatement mais est qualifié pour le « Banco » ; si E est réalisé, il ne gagne rien et n'est pas qualifié. Le « Banco

» consiste à extraire une boule parmi les sept restées dans l'urne : si elle est verte, le joueur empoche 1000 dinars ; si elle est rouge, il repart avec une prime de consolation de 200 dinars.

a. Quelle est la probabilité d'empocher les 1000 dinars sachant que R_3 est réalisé ?
b. Même question sachant que R_2 est réalisé.
c. En déduire la probabilité d'empocher les 1000 dinars.
d. Soit Y le gain dans ce nouveau jeu ($Y \in \{0,200,1000\}$). Établir la loi de Y.
e. Calculer $E(Y)$ et comparer avec $E(X)$.

Exercice 23

1. Soit P la loi de probabilité sur $[0,2\pi]$ de densité $f(x) = \lambda \sin\frac{x}{2}$.
   a. Déterminer λ.
   b. Calculer $P\left(\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.
2. La durée d'attente X, en secondes, à la caisse rapide d'un supermarché suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{200}$: $P(X < t) = \int_0^t \frac{1}{200} e^{-\frac{x}{200}} dx$ pour $t \geq 0$.
   a. Calculer la probabilité que l'attente soit inférieure à une minute.
   b. Calculer la probabilité que l'attente dépasse trois minutes.

Exercice 24

1. Soit P la loi de probabilité sur $[1,10]$ de densité $f(x) = \frac{\lambda}{x^3}$.
   a. Déterminer λ.
   b. Calculer $P([2,5])$.
2. La durée de vie X (en heures) d'un élément mécanique vérifie, pour tout $t \geq 0$, $P(X < t) = 0{,}002 \int_0^t e^{-0{,}00} \quad dx$.
   a. Vérifier que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   b. Calculer $P(X < 400)$.
   c. Calculer la probabilité que cet élément ait une durée de vie inférieure à 1000 heures sachant qu'il a déjà tenu 500 heures.

Corrigés détaillés

Corrigé de l'exercice 1

1. Univers : les combinaisons de 5 boules parmi 20, $C_{20}^5 = 15\,504$ issues équiprobables.

a. $p = \frac{C_{12}^3 C_8^2}{C_{20}^5} = \frac{220 \times 28}{15\,504} = \frac{385}{969} \approx 0{,}397$.

Remarque sur l'énoncé. « Des boules de couleurs différentes » est impossible à la lettre, puisqu'il n'y a que deux couleurs. On l'a interprété comme « des boules qui ne sont pas toutes de la même couleur ».

b. Événement contraire : « 5 blanches ou 5 noires ». $p = 1 - \frac{C_{12}^5 + C_8^5}{C_{20}^5} = 1 - \frac{792+5}{15\,504} = \frac{916}{969} \approx 0{,}945$.

2. Les tirages avec remise sont indépendants ; à chaque tirage, $p(\text{blanche}) = \frac{3}{5}$ et $p(\text{noire}) = \frac{2}{5}$.

a. $\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{108}{3125}$.

b. Il y a $C_5^3 = 10$ places possibles pour les blanches : $10 \times \frac{108}{3125} = \frac{216}{625} \approx 0{,}346$.

3. La composition de l'urne change seulement après une noire.

a. Trois ordres possibles :

$$p(BNN) = \frac{12}{20}\cdot\frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}, \quad p(NBN) = \frac{8}{20}\cdot\frac{12}{19}\cdot\frac{7}{19}, \quad p(NNB) = \frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}\cdot\frac{12}{18}.$$

Leur somme vaut $\frac{7574}{27\,075} \approx 0{,}280$.

b. $1 - p(NNN) = 1 - \frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}\cdot\frac{6}{18} = 1 - \frac{14}{285} = \frac{271}{285} \approx 0{,}951$.

Corrigé de l'exercice 2

On utilise l'arbre du cours.

1. Formule des probabilités totales : $p(R) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{3}{10} + \frac{1}{3} = \frac{19}{30}$.

2. $p(U_1/R) = \frac{p(U_1 \cap R)}{p(R)} = \frac{3/10}{19/30} = \frac{9}{19}$.

Corrigé de l'exercice 3

$p = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$ (probabilité de (b) au premier tirage, puis de (a) au second parmi les 4 jetons restants).

Corrigé de l'exercice 4

Notons R : « rouge », $N = \overline{R}$: « noir », P : « pair », $I = \overline{P}$: « impair ».

1. $p(N) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

2. $p(I) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

3. $N \cap I = \overline{R \cup P}$, donc $p(N \cap I) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}$.

4. $p(N)\,p(I) = \frac{2}{3} \times \frac{5}{9} = \frac{10}{27} \neq \frac{9}{27} = p(N \cap I)$: **les événements ne sont pas indépendants**.

5. $p(I/N) = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 5

I. $p(A_2) = \frac{1}{C_{n+2}^2} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow (n+1)(n+2) = 30 \Leftrightarrow n = 4$ (n naturel).

II. 1. $C_6^2 = 15$: $p(A_0) = \frac{C_4^2}{15} = \frac{2}{5}$, $p(A_1) = \frac{2\times4}{15} = \frac{8}{15}$ (et $p(A_2) = \frac{1}{15}$).

2. Scores : A_0 donne -4, A_1 donne $3 - 2 = 1$, A_2 donne 6. Donc $p(\text{gagnant}) = p(A_1) + p(A_2) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

III. 1. Si A_2 est réalisé, l'urne contient 4 noires : $p(B_0/A_2) = 1$ et $p(B_0 \cap A_2) = \frac{1}{15}$. Si A_1 : 1 blanche et 4 noires, $p(B_0/A_1) = \frac{C_4^2}{C_5^2} = \frac{3}{5}$, d'où $p(B_0 \cap A_1) = \frac{8}{15}\cdot\frac{3}{5} = \frac{8}{25}$. Si A_0 : 2 blanches et 4 noires, $p(B_0/A_0) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$, d'où $p(B_0 \cap A_0) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{25}$.

$$p(B_0) = \frac{5}{75} + \frac{24}{75} + \frac{12}{75} = \frac{41}{75}.$$

2. Deux blanches au second tirage ne sont possibles que si A_0 est réalisé : $p(B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{15} = \frac{2}{75}$. Puis $p(B_1) = 1 - \frac{41}{75} - \frac{2}{75} = \frac{32}{75}$.

Corrigé de l'exercice 6

1. a. Loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \frac{1}{6}\right)$: $C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$.

b. $\mathcal{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$: $3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

2. a. $p(A) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{72} = \frac{5}{144}$; $p(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$.

b. $C = A \cup B$, avec A et B incompatibles : $p(C) = \frac{5}{144} + \frac{16}{144} = \frac{21}{144} = \frac{7}{48}$.

c. $p(T/C) = \frac{p(B)}{p(C)} = \frac{1/9}{7/48} = \frac{16}{21}$.

Corrigé de l'exercice 7

1. a. $p(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.

b. $p(U_1/1) = \frac{1/4}{3/8} = \frac{2}{3}$.

2. Les numéros sont {1,1,2,2,3,4} et il y a $C_6^2 = 15$ paires équiprobables.

a. Paires de même numéro : {1,1} et {2,2}, d'où $p = \frac{2}{15}$.

b. On dénombre les paires :

s	2	3	4	5	6	7
paires	{1,1}	{1,2} (× 4)	{1,3} (× 2), {2,2}	{1,4}, {2,3} (× 2 chacune)	{2,4} (× 2)	{3,4}
$p(S = s)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

c. $p(S \text{ impaire}) = \frac{4+4+1}{15} = \frac{3}{5}$, donc $X = -10$ avec la probabilité $\frac{3}{5}$ et $X = \lambda$ avec la probabilité $\frac{2}{5}$.

$$E(X) = -6 + \frac{2\lambda}{5} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 15.$$

Le jeu est équitable pour $\lambda = 15$ dinars.

Corrigé de l'exercice 8

Remarque sur l'énoncé. La question numérotée « d) » est renumérotée « c) ».

1. $C_6^2 = 15$: $p(A_0) = \frac{C_4^2}{15} = \frac{6}{15}$, $p(A_1) = \frac{4 \times 2}{15} = \frac{8}{15}$, $p(A_2) = \frac{1}{15}$.

2. a. Après A_0 : 2 rouges et 2 noires, $p_{A_0}(B_0) = \frac{1}{6}$. Après A_1 : 3 rouges et 1 noire, $p_{A_1}(B_0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Après A_2 : 4 rouges, $p_{A_2}(B_0) = 1$.

b. $p(B_0) = \frac{6}{15} \cdot \frac{1}{6} + \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{15} = \frac{1+4+1}{15} = \frac{2}{5}$.

c. $p(A_1/B_0) = \frac{4/15}{6/15} = \frac{2}{3}$.

3. $R = \left(A_1 \cap \overline{B_0}\right) \cup (A_0 \cap B_2)$: après A_1, il faut tirer la noire restante ; après A_0, il faut tirer les deux noires.

$$p(R) = \frac{8}{15} \times \frac{1}{2} + \frac{6}{15} \times \frac{1}{6} = \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3}.$$

Corrigé de l'exercice 9

1. $p(\text{oral}) = \frac{120}{250} = \frac{12}{25} = 0{,}48$.

2. $p(\text{admis/admis à l'écrit}) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 10

Secteurs verts : 3 et 9, d'où $p(V) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Par la formule des probabilités totales :

$$p(G) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}.$$

Corrigé de l'exercice 11

1. Notons F_n : « il fume le n-ième jour ». $U_{n+1} = p(F_n) \times 0{,}2 + p\left(\overline{F_n}\right) \times 0{,}4 = 0{,}2U_n + 0{,}4(1 - U_n) = -0{,}2U_n + 0{,}4$.

2. $V_{n+1} = -0{,}2U_n + 0{,}4 - \frac{1}{3} = -0{,}2\left(U_n - \frac{1}{3}\right) = -0{,}2\,V_n$, car $0{,}4 - \frac{1}{3} = \frac{1}{15} = 0{,}2 \times \frac{1}{3}$. (V_n) est géométrique de raison $-0{,}2$.

3. $U_n = \frac{1}{3} + \left(U_1 - \frac{1}{3}\right)(-0{,}2)^{n-1}$.

4. $|-0{,}2| < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \frac{1}{3}$.

Corrigé de l'exercice 12

> **Remarque sur l'énoncé.** Les barres des événements contraires, perdues à l'impression, ont été rétablies.

1. $p\left(\overline{A} \cap B\right) = p(B) - p(A \cap B) = p(B) - p(A)p(B) = p\left(\overline{A}\right)p(B)$: $\overline{A}$ et B sont indépendants. Par symétrie des rôles, A et $\overline{B}$ le sont aussi. En appliquant ce résultat au couple indépendant $\left(\overline{A}, B\right)$, on obtient que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

2.

– $p(A \cup B) = 0{,}2 + 0{,}6 - 0{,}12 = 0{,}68$;

– $p\left(A \cup \overline{B}\right) = 0{,}2 + 0{,}4 - 0{,}08 = 0{,}52$;

– $p\left(\overline{A} \cup B\right) = 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}48 = 0{,}92$;

– $p\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 1 - p(A \cap B) = 0{,}88$.

Corrigé de l'exercice 13

1. $p(M_3) = \frac{3}{8}$.

2. $p(R/M_2) = 0{,}05$.

3. $p(R) = \frac{1}{2}(0{,}13) + \frac{1}{8}(0{,}05) + \frac{3}{8}(0{,}10) = 0{,}065 + 0{,}006\,25 + 0{,}0375 = 0{,}108\,75$, donc $p\left(\overline{R}\right) = 0{,}891\,25$.

4. $p(M_1/R) = \dfrac{0{,}065}{0{,}108\,75} = \dfrac{52}{87} \approx 0{,}598$.

Corrigé de l'exercice 14

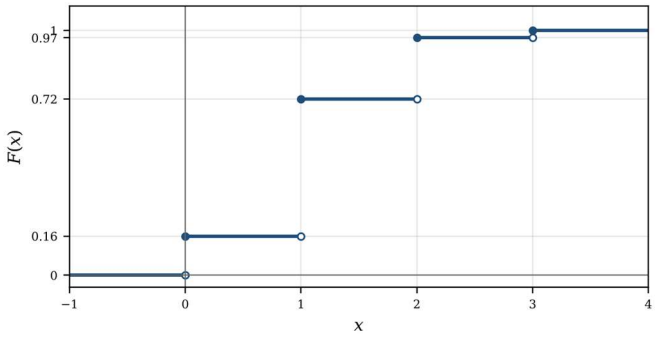
Remarque sur l'énoncé. La partie A utilise trois sacs : on a pris $n \geq 3$ (au lieu de $n \geq 2$).

Partie A. 1. Les trois tirages sont indépendants, avec $p(\text{blanche}) = \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}$.

$$p(X=0) = 1/4 \cdot 4/5 \cdot 4/5 = 0{,}16, \qquad p(X=1) = 3/4 \cdot 16/25 + 1/4 \cdot 2 \cdot 1/5 \cdot 4/5 = 0{,}56,$$
$$p(X=2) = 3/4 \cdot 2 \cdot 1/5 \cdot 4/5 + 1/4 \cdot 1/25 = 0{,}25, \qquad p(X=3) = 3/4 \cdot 1/25 = 0{,}03.$$

$E(X) = 0{,}56 + 0{,}50 + 0{,}09 = 1{,}15$ (c'est aussi $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$).

2. $F(x) = 0$ si $x < 0$; 0,16 sur $[0{,}1[$; 0,72 sur $[1{,}2[$; 0,97 sur $[2{,}3[$; 1 si $x \geq 3$.



Exercice 14 : fonction de répartition de X.

Partie B. 1. Pour $k \geq 2$, le sac S_k contient, au moment du tirage, sa boule blanche, ses quatre noires et la boule reçue : 6 boules.

$$p(A_k/A_{k-1}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \qquad p\left(A_k/\overline{A_{k-1}}\right) = \frac{1}{6}.$$

D'où $a_k = \frac{1}{3}a_{k-1} + \frac{1}{6}(1 - a_{k-1}) = \frac{1}{6}a_{k-1} + \frac{1}{6}$.

2. $b_k = \frac{1}{6}a_{k-1} + \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = \frac{1}{6}\left(a_{k-1} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{6}b_{k-1}$: (b_k) est géométrique de raison $\frac{1}{6}$, avec $b_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20}$. Donc

$$a_k = \frac{1}{5} + \frac{11}{20}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}.$$

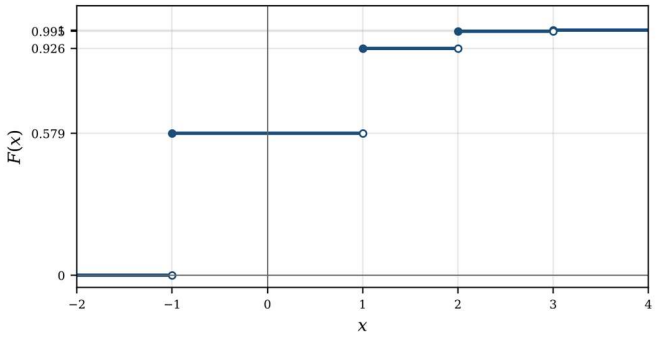
Corrigé de l'exercice 15

1. Le nombre N d'apparitions du nombre parié suit $\mathcal{B}\left(3, \frac{1}{6}\right)$.

x	-1	1	2	3
$p(X=x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

$E(X) = \frac{-125+75+30+3}{216} = -\frac{17}{216} \approx -0{,}079$: le jeu est défavorable au joueur. $E(X^2) = \frac{125+75+60+9}{216} = \frac{269}{216}$, donc $V(X) = \frac{269}{216} - \left(\frac{17}{216}\right)^2 = \frac{57\,815}{46\,656} \approx 1{,}239$.

2. $F(x) = 0$ si $x < -1$; $\frac{125}{216}$ sur $[-1{,}1[$; $\frac{200}{216}$ sur $[1{,}2[$; $\frac{215}{216}$ sur $[2{,}3[$; 1 si $x \geq 3$.



Exercice 15 : fonction de répartition du gain X.

Corrigé de l'exercice 16

À chaque tirage, $p(\text{blanche}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

1. $p_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$; $p_3 = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$; $p_4 = 3\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

2. a. $p(B_n) = \frac{1}{3}$.

b. Le nombre de blanches parmi les $n-1$ premiers tirages suit $\mathcal{B}\left(n-1, \frac{1}{3}\right)$: $p(U_n) = (n-1)\,\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.

c. Par indépendance, $p_n = p(U_n)\,p(B_n) = \frac{n-1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{n-1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$, car $\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.

3. a. Pour $n = 2$: $1 - 2\times\frac{4}{9} = \frac{1}{9} = p_2$. Si la formule est vraie au rang n :

$$S_{n+1} = 1 - \left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + \frac{n}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) - \frac{n}{4}\right] = 1 - \left(\frac{n+1}{2}+1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

b. $\lim n\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = 0$ (croissances comparées), donc $\lim S_n = 1$.

Corrigé de l'exercice 17

$p(M_1) = \frac{1}{2}$ et $p(M_2) = p(M_3) = \frac{1}{4}$.

1. $p(G) = \frac{1}{2}(0{,}3) + \frac{1}{4}(0{,}4) + \frac{1}{4}(1) = 0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}25 = 0{,}5$.

2. a. $p\left(M_1/\overline{G}\right) = \frac{0{,}5\times 0{,}7}{0{,}5} = 0{,}7$.

b. $p\left(M_3/\overline{G}\right) = \frac{0{,}25\times 0}{0{,}5} = 0$ (Robin bat toujours M_3).

3. $1 - (0{,}5)^4 = \frac{15}{16} = 0{,}9375$.

Corrigé de l'exercice 18

1. a. $p(E_{n+1}/E_n) = 0{,}04$ et $p\left(E_{n+1}/\overline{E_n}\right) = 0{,}24$. Donc $p(E_n \cap E_{n+1}) = 0{,}04\,p_n$ et $p\left(\overline{E_n} \cap E_{n+1}\right) = 0{,}24(1-p_n)$.

b. $p_{n+1} = 0{,}04p_n + 0{,}24 - 0{,}24p_n = 0{,}24 - 0{,}2\,p_n$.

2. a. $1{,}2\,p = 0{,}24 \Leftrightarrow p = 0{,}2$.

b. $u_{n+1} = 0{,}24 - 0{,}2p_n - 0{,}2 = -0{,}2(p_n - 0{,}2) = -0{,}2\,u_n$, avec $u_1 = 0{,}1 - 0{,}2 = -0{,}1$. D'où

$$u_n = -0{,}1\,(-0{,}2)^{n-1}, \qquad p_n = 0{,}2 - 0{,}1\,(-0{,}2)^{n-1}.$$

c. $|-0{,}2| < 1$: (p_n) converge vers 0,2.

Corrigé de l'exercice 19

1. $p_1 = p(M/R) = 0{,}45$; $p_2 = p(M/B) = 0{,}6$.

2. $p(M) = 0{,}25 \times 0{,}45 + 0{,}75 \times 0{,}6 = 0{,}1125 + 0{,}45 = 0{,}5625$: 56,25 % des cartons sont marqués, et $p_3 = 0{,}5625$.

3. $p_4 = p(R/M) = \frac{0{,}1125}{0{,}5625} = 0{,}2$.

Corrigé de l'exercice 20

1. a. $p(F_1 \cap F_2) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$.

b. $p(F_2/F_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

c. $p(F_2) = p(F_1 \cap F_2) + p\left(\overline{F_1} \cap F_2\right) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{7}$.

2. a. $C_7^4 = 35$ choix équiprobables ; X prend les valeurs 1 à 4 ($X = 0$ est impossible, puisqu'il n'y a que trois garçons).

k	1	2	3	4
$p(X = k)$	$\frac{C_4^1 C_3^3}{35} = \frac{4}{35}$	$\frac{C_4^2 C_3^2}{35} = \frac{18}{35}$	$\frac{C_4^3 C_3^1}{35} = \frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

b. $E(X) = \frac{4+36+36+4}{35} = \frac{80}{35} = \frac{16}{7}$.

Corrigé de l'exercice 21

1. a. $p(I) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

b. $E = \overline{I} \cap \overline{C}$: $p(E) = 0{,}05 \times 0{,}3 = 0{,}015$. $F = I \cap \overline{C}$: $p(F) = 0{,}95 \times 0{,}9 = 0{,}855$. E et F forment une partition de $\overline{C}$: $p\left(\overline{C}\right) = 0{,}87$ et $p(C) = 0{,}13$.

2. Le nombre de paquets intacts suit $\mathcal{B}(5\,;0{,}95)$:

$$p(\geq 4) = 5(0{,}95)^4(0{,}05) + (0{,}95)^5 \approx 0{,}9774.$$

La probabilité qu'aucune gaufrette ne soit cassée dans le lot est $(0{,}87)^5 \approx 0{,}4984$.

Corrigé de l'exercice 22

1. $C_{10}^3 = 120$: $p(R_3) = \frac{C_5^3}{120} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$ et $p(R_2) = \frac{C_5^2 C_5^1}{120} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$.

2. $p(X = 500) = \frac{1}{12}$, $p(X = 300) = \frac{5}{12}$, $p(X = 0) = \frac{1}{2}$. $E(X) = \frac{500+1500}{12} = \frac{500}{3} \approx 166{,}67$ dinars.

3. a. Après R_3, l'urne contient 2 rouges et 5 vertes : $p = \frac{5}{7}$.

b. Après R_2 : 3 rouges et 4 vertes, $p = \frac{4}{7}$.

c. $p(\text{Banco}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{7} = \frac{25}{84}$.

d. $p(Y = 1000) = \frac{25}{84}$; $p(Y = 200) = \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{7} + \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{7} = \frac{17}{84}$; $p(Y = 0) = \frac{1}{2} = \frac{42}{84}$.

e. $E(Y) = \frac{25\,000+3400}{84} = \frac{7100}{21} \approx 338{,}10$ dinars : environ le double de $E(X)$, donc le nouveau jeu est plus avantageux pour le joueur.

Corrigé de l'exercice 23

1. a. $\int_0^{2\pi} \lambda \sin\frac{x}{2}\,dx = \lambda\left[-2\cos\frac{x}{2}\right]_0^{2\pi} = 4\lambda = 1$, d'où $\lambda = \frac{1}{4}$ ($f \geq 0$ sur $[0{,}2\pi]$).

b. $P\left(\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \frac{1}{4}\left[-2\cos\frac{x}{2}\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}0795.$

2. X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{200}$; une minute vaut 60 s.

a. $P(X < 60) = 1 - e^{-0{,}3} \approx 0{,}2592.$

b. $P(X > 180) = e^{-0{,}9} \approx 0{,}4066.$

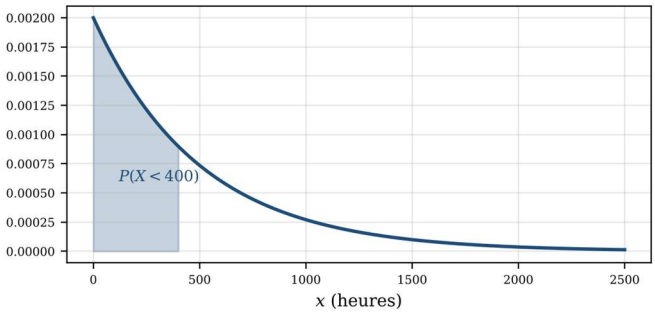
Corrigé de l'exercice 24

1. a. $\int_1^{10} \frac{\lambda}{x^3}dx = \lambda\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^{10} = \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{200}\right) = \frac{99\lambda}{200} = 1$, d'où $\lambda = \frac{200}{99}$.

b. $P([2{,}5]) = \frac{200}{99}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{50}\right) = \frac{200}{99} \times \frac{21}{200} = \frac{7}{33} \approx 0{,}212.$

2. a. $0{,}002\,e^{-0{,}002x}$ est la densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}002$.

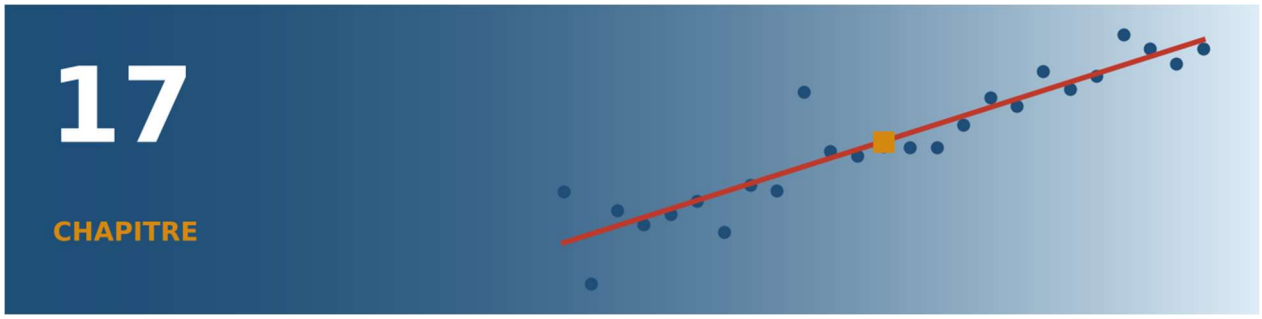
b. $P(X < 400) = 1 - e^{-0{,}8} \approx 0{,}5507.$



Exercice 24 : densité de la loi exponentielle de paramètre $0{,}002$; l'aire colorée est $P(X < 400)$.

c. $P(X < 1000 \,/\, X \geq 500) = \frac{P(500 \leq X < 100\ )}{P(X \geq 500)} = \frac{e^{-1}-e^{-2}}{e^{-1}} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}6321$. On retrouve $P(X < 500)$: c'est la propriété de **durée de vie sans vieillissement** de la loi exponentielle.

Chapitre 17 — Statistiques



Cours • 10 exercices • Corrigés détaillés

Ce que vous devez savoir faire à la fin du chapitre
– Représenter le nuage de points d'une série statistique double et placer son point moyen.
– Calculer (à la calculatrice) variances, covariance et coefficient de corrélation linéaire, et juger de la pertinence d'un ajustement affine.
– Déterminer la droite de régression par la méthode des moindres carrés et l'utiliser pour des estimations.
– Effectuer un changement de variable ($z = \ln y$, $z = \frac{1}{y}$, $X = e^{kx}$…) pour se ramener à un ajustement affine, puis revenir à la variable initiale.

Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 2, chapitre 10 : *Statistiques*).

Cours

I. Série statistique double

Définitions. Une série statistique double est une liste de couples (x_i, y_i), $1 \le i \le n$. Elle est représentée par un **nuage de points** $M_i(x_i ; y_i)$. Les séries (x_i) et (y_i) sont ses distributions marginales.
Le **point moyen** est $G(\overline{x} ; \overline{y})$, avec $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$ et $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum y_i$.

Variance, covariance, corrélation.

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \overline{x}^2, \qquad \operatorname{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}, \qquad r = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\,\sigma_y}.$$

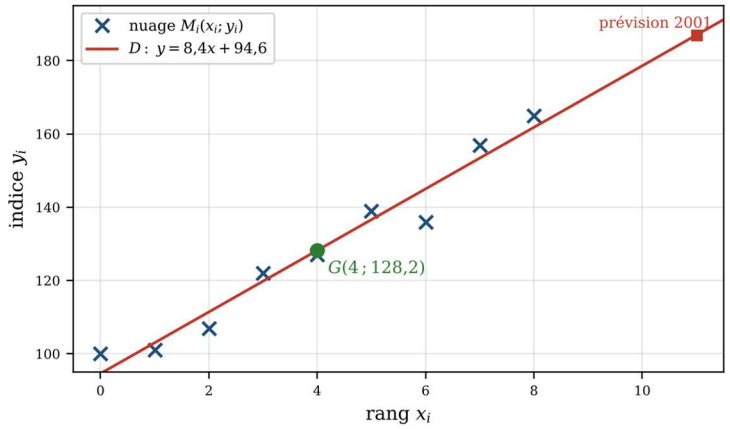
On a toujours $-1 \le r \le 1$. Plus $|r|$ est proche de 1, plus les points sont proches d'une droite ; en pratique, on considère un ajustement affine comme justifié lorsque $|r|$ est proche de 1 (par exemple $|r| \ge 0{,}9$). Le signe de r est celui de la pente.

II. Ajustement affine par la méthode des moindres carrés

Théorème. La droite de régression de y en x, qui minimise $\sum\big(y_i - (ax_i + b)\big)^2$, a pour équation

$$y = ax + b \qquad \text{avec} \qquad a = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{V(x)}, \qquad b = \overline{y} - a\,\overline{x}.$$

Elle passe par le point moyen G. La droite de régression de x en y est $x = a'y + b'$ avec $a' = \frac{\text{cov}(x,y)}{V(y)}$; on a $aa' = r^2$.



Nuage de points, point moyen G et droite de régression (données de l'exercice 5). Une prévision consiste à lire la droite en dehors de la plage des données (extrapolation).

III. Ajustements se ramenant à un ajustement affine

Méthode — changement de variable.
– Si le nuage a une allure **exponentielle** (croissance à taux constant), on pose $z = \ln y$. Un ajustement $z = ax + b$ donne $y = e^b\, e^{ax} = B\, e^{ax}$.
– Si y semble inversement proportionnel à une fonction affine de x, on pose $z = \frac{1}{y}$: $z = ax + b$ donne $y = \frac{1}{ax+b}$.
– Plus généralement, on choisit un changement $X = \varphi(x)$ ou $Y = \psi(y)$ pour lequel le nouveau coefficient de corrélation est plus proche de 1 en valeur absolue.
On revient toujours à la variable initiale avant de faire une prévision.

Attention. Une droite de régression ne permet des prévisions raisonnables qu'au voisinage des données. Une extrapolation lointaine peut être absurde (temps négatif, charge supérieure à celle d'une flèche plus courte…) : il faut toujours confronter le modèle au sens physique du problème.

Exercices

Exercice 1

Le tableau donne l'évolution du chiffre d'affaires (CA), en millions de dinars, d'une entreprise sur la période 1996–2002.

Année	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6
CA y_i	164	182	200	221	246	270	300

La droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés a pour équation $y = 22{,}5x + 158{,}64$ (coefficients arrondis à 10^{-2}).

1. À l'aide de cet ajustement, déterminer le chiffre d'affaires que l'entreprise peut prévoir en 2005.

2. L'ajustement affine ne semblant pas traduire l'évolution du chiffre d'affaires, on pose $z_i = \ln y_i$.
   a. Calculer les z_i, arrondis à 10^{-2}.
   b. Déterminer, à la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-3}).
   c. En déduire une relation de la forme $y = B\,e^{ax}$ (B arrondi à l'entier).
3. On admet que la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 164\,e^{0{,}1x}$ modélise l'évolution du chiffre d'affaires.
   a. Donner une nouvelle estimation, arrondie au million de dinars, du chiffre d'affaires en 2005.
   b. À partir de quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires dépassera 500 millions de dinars ?

Exercice 2

Les résultats seront arrondis à 10^{-3} ; le détail des calculs n'est pas demandé. On étudie l'évolution des records du 100 mètres masculin depuis 1900.

Année	1900	1912	1921	1930	1964	1983	1991	1999
Rang x_i	0	12	21	30	64	83	91	99
Temps y_i (s)	10,80	10,60	10,40	10,30	10,06	9,93	9,86	9,79

Changement de variables utilisé à la question 2 : $X = e^{-0{,}0092}$ et $Y = \ln y$.

X_i	1	0,895	0,824	0,758	0,554	0,464	0,431	0,401
Y_i	2,380	2,361	2,342	2,332	2,309	2,296	2,288	2,281

1. *Modèle affine.*
   a. Construire le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ (unités : 1 cm pour dix ans en abscisse, 1 cm pour un dixième de seconde en ordonnée, graduations commençant au point $(0 ; 9)$).
   b. Peut-on envisager un ajustement affine à court terme ? Permet-il des prévisions pertinentes à long terme ?
2. *Modèle exponentiel.* On pose $X = e^{-0{,}00924x}$ et $Y = \ln y$ (valeurs dans le second tableau ci-dessus).
   a. Donner une équation de la droite de régression de Y en X.
   b. En déduire que l'on peut modéliser y sous la forme $y = \exp(a\,e^{-0{,}00} + b)$, où a et b sont des réels à déterminer.
   c. Quel record peut-on prévoir en 2010 avec ce modèle ?
   d. Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \exp(0{,}154\,e^{-0{,}0092} + 2{,}221)$.
   e. Que peut-on en conclure, selon ce modèle, sur les records du 100 mètres à très long terme ?

Exercice 3 — Prix d'équilibre

Le prix d'équilibre d'un produit est le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales. Une étude a donné (prix en dinars par kilogramme, quantités en milliers de kilogrammes) :

Prix x_i	0,30	0,35	0,45	0,65	0,80	1
Demande y_i	6,25	4,90	3,75	2,75	2,40	2,25

Prix x_i	**0,30**	**0,35**	**0,45**	**0,65**	**0,80**	**1**
Offre z_i	1,25	1,30	1,30	1,50	1,55	1,60

Les résultats numériques seront arrondis à 10^{-2}.

1. *Représentation graphique.* Représenter sur un même graphique les nuages de points (x_i, y_i) et (x_i, z_i) (unités : 10 cm pour 1 dinar en abscisse, 2 cm pour 1 millier de kg en ordonnée).
2. *Étude de la demande.* On pose $Y_i = \ln y_i$.
   a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, Y_i). Un ajustement affine de Y en x est-il satisfaisant ?
   b. Donner une équation de la droite de régression de Y en x, puis une estimation de la demande y en fonction du prix x.
3. *Étude de l'offre.*
   a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, z_i). Un ajustement affine de z en x est-il satisfaisant ?
   b. Donner une équation de la droite de régression de z en x.
4. *Étude graphique du prix d'équilibre.* On modélise la demande et l'offre par $f(x) = e^{-1{,}41x+2{,}08}$ et $g(x) = 0{,}53x + 1{,}10$ sur $[0,2]$.
   a. Étudier le sens de variation de f sur $[0,2]$ et dresser son tableau de variation.
   b. Tracer les courbes de f et g sur le graphique de la question 1.
   c. Déterminer graphiquement le prix d'équilibre.
5. *Étude numérique.* Soit $h = f - g$ sur $[0,2]$.
   a. Étudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.
   b. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $[0,2]$; en donner une valeur approchée à 10^{-1}.
   c. Quel est le prix d'équilibre du produit ?

Exercice 4

Les calculs peuvent être faits à la calculatrice. Le tableau donne la charge maximale y_i (en tonnes) qu'une grue peut lever pour une longueur de flèche x_i (en mètres).

x_i	**16,5**	**18**	**19,8**	**22**	**25**	**27**	**29**	**32**	**35**	**39**	**41,7**
y_i	10	9	8	7	6	5,5	5	4,5	4	3,5	3,2

1. (Résultats à 10^{-2} près.)
   a. Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ (1 cm pour 2 m en abscisse, 1 cm pour 1 t en ordonnée).
   b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
   c. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et la tracer.
   d. En déduire la charge maximale pour une flèche de 26 mètres. Que peut-on dire ?
2. On pose $z_i = \frac{1}{y_i}$.
   a. Compléter le tableau des z_i (arrondis à 10^{-3}).
   b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z, puis une équation de la droite de régression de z en x (résultats à 10^{-4} près).
   c. En déduire la valeur de z pour $x = 26$, puis la charge maximale pour une flèche de 26 mètres. Ce résultat paraît-il plus satisfaisant que celui de 1.d ? Pourquoi ?

Exercice 5

Le tableau donne l'indice y_i (base 100 en 1990) du chiffre d'affaires à l'exportation d'une entreprise ; x_i est le rang de l'année.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	100	101	107	122	127	139	136	157	165

1.
   a. Représenter le nuage de points (origine $(0; 100)$; 1,5 cm par an ; 2 cm pour 10 points d'indice).
   b. Calculer les coordonnées du point moyen G (ordonnée arrondie au dixième) et le placer.
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire (arrondi au centième). Un ajustement affine est-il envisageable ?
3. Soit D la droite de régression de y en x.
   a. Donner le coefficient directeur de D, arrondi au dixième.
   b. À l'aide de G, donner une équation de D et la tracer.
4. En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon, estimer l'indice du chiffre d'affaires en 2001 (arrondi à l'unité).

Exercice 6

La cote d'une voiture d'occasion selon son année de mise en circulation est donnée par :

Année	1991	1992	1993	1994	1995
Rang x_i	1	2	3	4	5
Cote y_i (dinars)	42 900	54 200	64 100	81 600	102 000

1. Représenter le nuage de points (2 cm pour un an ; 1 cm pour 10 000 dinars).
2. On pose $z = \ln y$.
   a. Compléter le tableau des z_i (valeurs approchées à 10^{-2} par défaut).
   b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z. Un ajustement affine est-il justifié ?
   c. Donner une équation de la droite de régression de z en x (coefficients arrondis à 10^{-2} par défaut).
   d. Calculer la valeur de z donnée par cette équation pour l'année 1988 ; en déduire une estimation de la cote d'une voiture de 1988 (arrondie à 100 dinars).

Exercice 7

Un fournisseur d'accès à Internet a relevé l'indice de son nombre d'abonnés (base 100 en 2000).

Année	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i	1	2	3	4	5
Indice y_i	100	112	130	160	200

Partie A.

1. Le nombre d'abonnés était de 2040 en 2000. Quel est-il en 2004 ?
2. Quel est le pourcentage d'augmentation du nombre d'abonnés entre 2003 et 2004 ?

3. Donner une équation de la droite de régression de y en x.
4. Quelles prévisions du nombre d'abonnés peut-on faire pour 2005 et 2010 (à l'unité près) ?

Partie B. On pose $z = \ln y$.

1. Compléter le tableau des z_i (arrondis à 10^{-2}).
2. Construire le nuage de points (x_i, z_i) et la droite de régression de z en x, d'équation $z = 0{,}17x + 4{,}39$.
3. Exprimer le nombre d'abonnés n_i en fonction du rang x_i.
4. En déduire une nouvelle prévision du nombre d'abonnés pour 2005 et 2010.

Exercice 8 (type bac)

Une entreprise a relevé ses dépenses publicitaires x_i (en milliers de dinars) et ses ventes y_i (en milliers d'articles) sur six mois (données fictives).

x_i	2	3	5	6	8	10
y_i	22	27	35	41	48	57

1. Calculer les coordonnées du point moyen G, la covariance et le coefficient de corrélation linéaire (à 10^{-3} près). Un ajustement affine est-il justifié ?
2. Donner une équation de la droite de régression de y en x (coefficients à 10^{-2} près).
3. Estimer les ventes pour une dépense de 12 milliers de dinars.

Exercice 9 (type bac)

On a mesuré la taille y (en milliers d'individus) d'une population de bactéries en fonction du temps t (en heures) (données fictives).

t_i	0	1	2	3	4	5
y_i	1,2	1,9	3,1	4,8	7,7	12,4

1. On pose $z = \ln y$. Calculer les z_i (à 10^{-2} près), puis le coefficient de corrélation entre t et z.
2. Donner une équation de la droite de régression de z en t (coefficients à 10^{-3} près) ; en déduire y sous la forme $y = k\,e^{at}$.
3. Estimer la population au bout de 7 heures, puis le temps de doublement de la population.

Exercice 10 (type bac)

On a relevé les notes de mathématiques x et de physique y de huit élèves (données fictives).

x_i	8	10	11	12	13	14	15	17
y_i	7	9	11	11	12	15	14	17

1. Calculer $\overline{x}, \overline{y}, V(x), V(y), \mathrm{cov}(x, y)$ et le coefficient de corrélation r.
2. Déterminer les droites de régression D_1 de y en x et D_2 de x en y. Vérifier que le produit de leurs coefficients directeurs (au sens $y = ax + b$ et $x = a'y + b'$) vaut r^2.
3. Estimer la note de physique d'un élève ayant obtenu 16 en mathématiques.

Corrigés détaillés

Corrigé de l'exercice 1

Remarque sur l'énoncé. Les montants sont exprimés en millions de dinars (la 1re édition mélangeait dinars et euros).

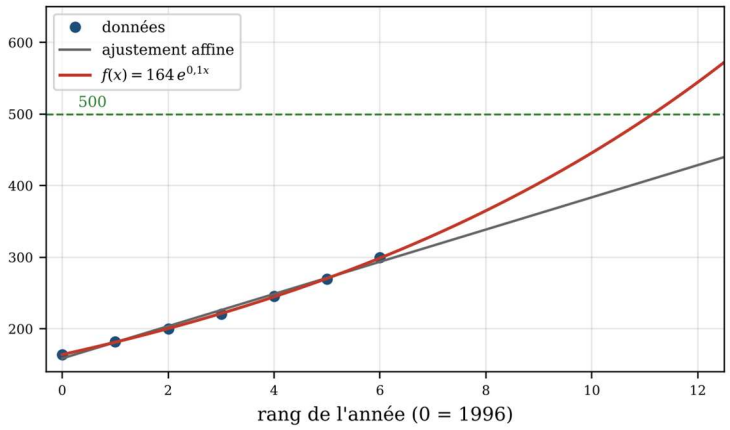
1. L'année 2005 a le rang 9 : $y = 22{,}5 \times 9 + 158{,}64 = 361{,}14$. **Prévision : environ** 361 **millions de dinars.**

2. a.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$	5,10	5,20	5,30	5,40	5,51	5,60	5,70

b. À la calculatrice ($r \approx 0{,}9999$) : $z = 0{,}100x + 5{,}100$.

c. $y = e^z = e^{5{,}1}\, e^{0{,}1x}$, avec $e^{5{,}1} \approx 164{,}02$: $y = 164\, e^{0{,}1x}$.



Exercice 1 : données, ajustement affine (gris) et modèle exponentiel f (rouge).

3. a. $f(9) = 164\, e^{0{,}9} \approx 403{,}37$: **environ** 403 **millions de dinars** en 2005.

b. $f(x) > 500 \Leftrightarrow e^{0{,}1x} > \frac{500}{164} \Leftrightarrow x > 10\ln\frac{500}{164} \approx 11{,}15$. Le premier rang entier est 12, soit **l'année 2008**.

Corrigé de l'exercice 2

1. a. Voir la figure.

b. Le coefficient de corrélation vaut $r \approx -0{,}981$ et la droite de régression est $y = -0{,}009x + 10{,}681$ (coefficients arrondis à 10^{-3}). Un ajustement affine est acceptable **à court terme**. À long terme, il est absurde : il prévoit des records toujours plus bas, puis un temps **négatif** (vers $x \approx 1150$). Il ne permet donc pas de prévisions pertinentes à long terme.

2. a. À la calculatrice ($r \approx 0{,}993$) : $Y = 0{,}154X + 2{,}221$.

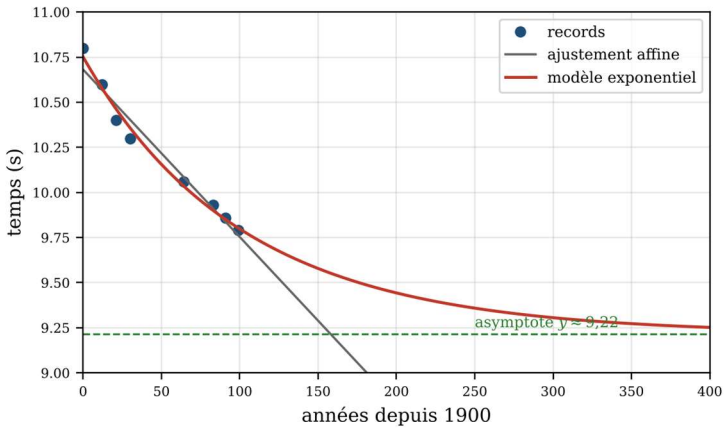
b. $\ln y = 0{,}154\, e^{-0{,}00924x} + 2{,}221$, d'où $y = \exp(0{,}154\, e^{-0{,}00924} + 2{,}221)$: $a = 0{,}154$ **et** $b = 2{,}221$.

c. 2010 a le rang 110 : $y = \exp(0{,}154\, e^{-1{,}0164} + 2{,}221) \approx 9{,}745$ **s**.

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0{,}0092} = 0$ et exp est continue, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{2{,}221} \approx 9{,}217$.

e. Selon ce modèle, les records décroissent mais ne descendront jamais sous 9,217 **s environ** : la droite $y = e^{2{,}221}$ est asymptote horizontale. *(Remarque : le record réel de* 9,58 *s, établi en 2009, est*

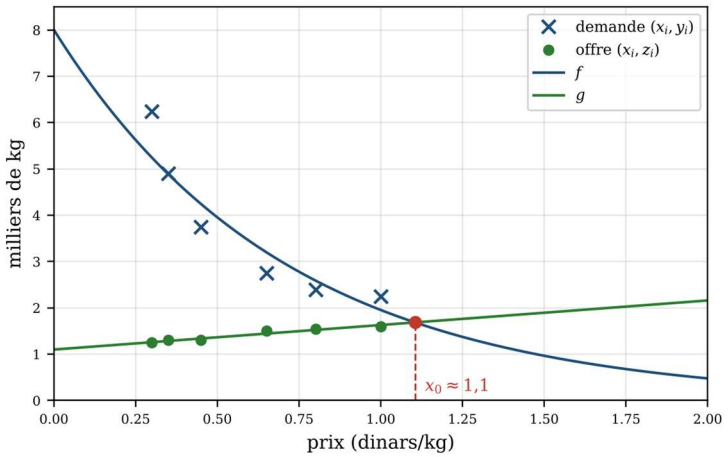
déjà bien inférieur à la prévision de 2010. Un modèle construit sur des données anciennes reste une approximation.)



Exercice 2 : records, ajustement affine et modèle exponentiel avec son asymptote.

Corrigé de l'exercice 3

Remarque sur l'énoncé. Dans la 1re édition, l'exercice 4 (la grue) était inséré au milieu de celui-ci. Les questions 3 à 5 (offre, prix d'équilibre) ont été replacées ici, et les prix sont exprimés en dinars.



Exercice 3 : nuages de la demande (croix) et de l'offre (points), courbes de f et g, prix d'équilibre $x_0 \approx 1{,}1$.

1. Voir la figure.

2. a. Pour $(x_i, \ln y_i)$: $r \approx -0{,}94$. Comme $|r|$ est proche de 1, l'ajustement affine de Y en x est satisfaisant.

b. $Y = -1{,}41x + 2{,}08$, d'où $y = e^{-1{,}41x+2{,}08}$ (soit $y \approx 8{,}0\, e^{-1{,}41}$).

3. a. Pour (x_i, z_i) : $r \approx 0{,}97$, proche de 1 : l'ajustement est satisfaisant.

b. $z = 0{,}53x + 1{,}10$.

4. a. $f'(x) = -1{,}41\, e^{-1{,}41x+2{,}08} < 0$: f est strictement décroissante sur $[0{,}2]$, de $f(0) = e^{2{,}08} \approx 8{,}00$ à $f(2) = e^{-0{,}74} \approx 0{,}48$.

x	0		2
$f'(x)$		−	
f	8,00	↘	0,48

b. Voir la figure.

c. Les courbes se coupent pour $x \approx 1{,}1$.

5. a. $h'(x) = f'(x) - 0{,}53 < 0$: h est strictement décroissante sur $[0{,}2]$, de $h(0) \approx 6{,}90$ à $h(2) \approx -1{,}68$.

b. h est continue et strictement décroissante, et $h(0) > 0 > h(2)$: l'équation $h(x) = 0$ a une **unique solution** x_0 dans $[0{,}2]$. Comme $h(1{,}1) \approx 0{,}01 > 0$ et $h(1{,}2) \approx -0{,}26 < 0$, on a $1{,}1 < x_0 < 1{,}2$, et $x_0 \approx 1{,}1$ (plus précisément $x_0 \approx 1{,}105$).

c. Le prix d'équilibre est d'environ 1,10 **dinar par kilogramme**, pour une quantité d'environ 1,69 millier de kilogrammes.

Corrigé de l'exercice 4

1. a. Voir la figure.

b. $r \approx -0{,}96$.

c. $y = -0{,}26x + 13{,}10$.

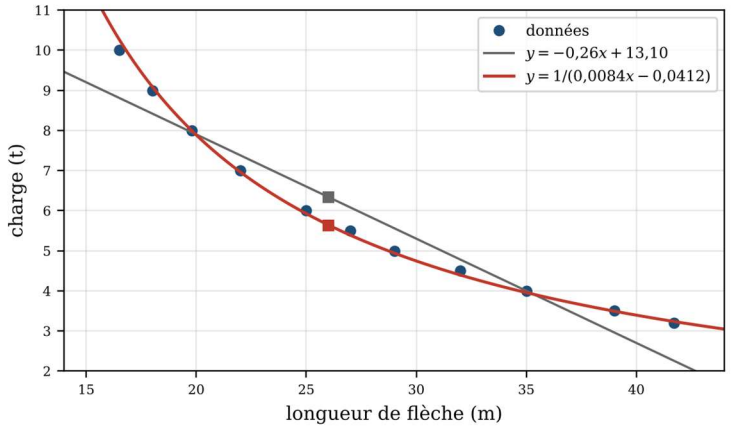
d. $y(26) = -0{,}26 \times 26 + 13{,}10 = 6{,}34$ t. Ce résultat est **incohérent** : une flèche de 25 m ne permet de lever que 6 t, donc une flèche plus longue ne peut pas lever davantage. L'ajustement affine n'est pas adapté (le nuage est courbe).

2. a.

x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	32	35	39	41,7
z_i	0,100	0,111	0,125	0,143	0,167	0,182	0,200	0,222	0,250	0,286	0,313

b. $r \approx 0{,}9993$ et $z = 0{,}0084x - 0{,}0412$.

c. $z(26) = 0{,}0084 \times 26 - 0{,}0412 = 0{,}1772$, d'où $y = \frac{1}{0{,}1772} \approx 5{,}64$ t. Ce résultat est **plus satisfaisant** : il est compris entre les charges admissibles à 25 m (6 t) et à 27 m (5,5 t), et le coefficient de corrélation est beaucoup plus proche de 1.



Exercice 4 : la droite (gris) surestime la charge à 26 m ; l'ajustement $y = \frac{1}{0{,}0084x - 0{,}0412}$ (rouge) suit le nuage.

Corrigé de l'exercice 5

1. a. Voir la figure du cours.

b. $\overline{x} = 4$ et $\overline{y} = \frac{1154}{9} \approx 128{,}2$: $G(4; 128{,}2)$.

2. $r \approx 0{,}98$: très proche de 1, donc un ajustement affine est justifié.

3. a. $a = \frac{\text{cov}(x,y)}{V(x)} \approx 8{,}4$.

b. D passe par G : $y - 128{,}2 = 8{,}4(x-4)$, soit $y = 8{,}4x + 94{,}6$.

4. 2001 a le rang 11 : $y = 8{,}4 \times 11 + 94{,}6 = 187$. **Indice estimé :** 187**.**

Corrigé de l'exercice 6

Remarque sur l'énoncé. Les unités « F » (francs) de la 1re édition ont été remplacées par des dinars, conformément au tableau.

1. Le nuage est croissant et légèrement convexe.

2. a.

x_i	1	2	3	4	5
z_i **(par défaut)**	10,66	10,90	11,06	11,30	11,53

b. $r \approx 0{,}998$: très proche de 1, l'ajustement affine de z en x est justifié.

c. La calculatrice donne $z = 0{,}214x + 10{,}448$, soit, arrondi par défaut à 10^{-2} : $z = 0{,}21x + 10{,}44$.

d. 1988 a le rang -2 : $z = 0{,}21 \times (-2) + 10{,}44 = 10{,}02$, d'où $y = e^{10{,}02} \approx 22\,471$. **Cote estimée : environ** 22 500 **dinars.**

Corrigé de l'exercice 7

Partie A. 1. $2040 \times \frac{200}{100} = 4080$ abonnés.

2. $\frac{200-160}{160} = 0{,}25$: +25 %.

3. À la calculatrice : $y = 24{,}8x + 66$ ($r \approx 0{,}974$).

4. Le nombre d'abonnés est $n = 20{,}4\,y$. 2005 a le rang 6 : $y = 214{,}8$, d'où $n \approx 4382$; 2010 a le rang 11 : $y = 338{,}8$, d'où $n \approx 6912$.

Partie B. 1.

x_i	1	2	3	4	5
$z_i = \ln y_i$	4,61	4,72	4,87	5,08	5,30

2. Le nuage (x_i, z_i) est très proche de la droite $z = 0{,}17x + 4{,}39$ ($r \approx 0{,}991$).

3. $y = e^{0{,}17x+4{,}39}$, donc $n = 20{,}4\,e^{0{,}17x+4{,}39}$ (environ $1647\,e^{0{,}17x}$).

4. 2005 ($x = 6$) : $n \approx 4562$; 2010 ($x = 11$) : $n \approx 10\,674$. Le modèle exponentiel suit mieux la croissance accélérée observée entre 2002 et 2004 ; il donne des prévisions nettement supérieures à celles du modèle affine à long terme.

Corrigé de l'exercice 8

1. $\overline{x} = \frac{34}{6} \approx 5{,}667$, $\overline{y} = \frac{230}{6} \approx 38{,}333$; $V(x) \approx 7{,}556$, $\text{cov}(x,y) \approx 32{,}778$; $r \approx 0{,}999$: très proche de 1, l'ajustement affine est justifié.

2. $a = \frac{\text{cov}(x,y)}{V(x)} \approx 4{,}34$ et $b = \overline{y} - a\overline{x} \approx 13{,}75$: $y = 4{,}34x + 13{,}75$.

3. $y(12) = 4{,}34 \times 12 + 13{,}75 \approx 65{,}8$: environ 65 800 articles.

Corrigé de l'exercice 9

1.

t_i	0	1	2	3	4	5
z_i	0,18	0,64	1,13	1,57	2,04	2,52

$r \approx 0{,}9999$.

2. $z = 0{,}467t + 0{,}180$, d'où $y = e^{0{,}180}e^{0{,}467t} \approx 1{,}2\,e^{0{,}467t}$.

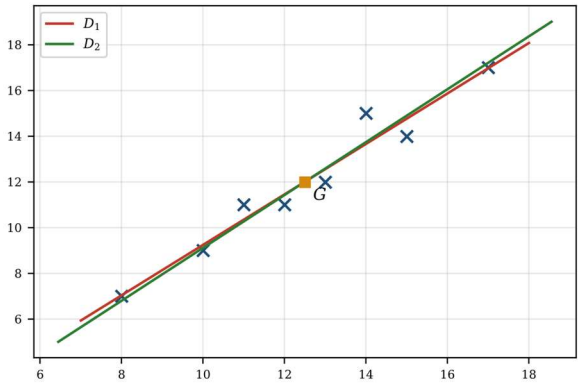
3. $y(7) \approx 1{,}2\,e^{3{,}269} \approx 31{,}5$ milliers. Le doublement correspond à $e^{0{,}46} = 2$, soit $T = \frac{\ln 2}{0{,}467} \approx 1{,}48$ h (environ 1 h 29 min).

Corrigé de l'exercice 10

1. $\overline{x} = 12{,}5$; $\overline{y} = 12$; $V(x) = 7{,}25$; $V(y) = 9{,}25$; $\mathrm{cov}(x, y) = 8$; $r = \frac{8}{\sqrt{7{,}25 \times 9{,}25}} \approx 0{,}977$.

2. D_1 : $y = ax + b$ avec $a = \frac{8}{7{,}25} \approx 1{,}10$, $b = 12 - a \times 12{,}5 \approx -1{,}79$: $y = 1{,}10x - 1{,}79$. D_2 : $x = a'y + b'$ avec $a' = \frac{8}{9{,}25} \approx 0{,}86$, $b' = 12{,}5 - a' \times 12 \approx 2{,}12$: $x = 0{,}86y + 2{,}12$. $aa' = \frac{\mathrm{cov}^2}{V(x)V(y)} = r^2 \approx 0{,}954$. Les deux droites passent par $G(12{,}5\,;12)$.

3. D'après D_1 : $y \approx 1{,}10 \times 16 - 1{,}79 \approx 15{,}9$.



Exercice 10 : nuage, point moyen G et les deux droites de régression.

Formulaire

Ce formulaire rassemble les résultats du programme à connaître par cœur. Chaque formule est démontrée ou justifiée dans le chapitre indiqué entre parenthèses.

Limites usuelles (chapitres 1, 7 et 8)

$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$	$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$
$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1}$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\ \lim_{x\to 0^+}x\ln x=0$
$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}xe^x=0$
$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^n}{x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty\ (n\in\mathbb{N}^*)$

Dérivées usuelles (chapitre 3)

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
$\boldsymbol{x^n\ (n\in\mathbb{Z}^*)}$	nx^{n-1}	u^n	$nu'u^{n-1}$
$\boldsymbol{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\boldsymbol{\sin x}$	$\cos x$	$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$
$\boldsymbol{\cos x}$	$-\sin x$	$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$
$\boldsymbol{\tan x}$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$\boldsymbol{\ln x}$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert u\rvert$	$\frac{u'}{u}$
$\boldsymbol{e^x}$	e^x	e^u	$u'e^u$
$\boldsymbol{v\circ u}$	$u'\times(v'\circ u)$	f^{-1}	$\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$

Primitives usuelles (chapitres 5, 7 et 8)

Fonction	Primitive	Fonction	Primitive
$\boldsymbol{x^n\ (n\neq -1)}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$u'u^n\ (n\neq -1)$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\boldsymbol{\frac{1}{x}}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x}}}$	$2\sqrt{x}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\boldsymbol{\cos(ax+b)}$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$\boldsymbol{1+\tan^2 x}$	$\tan x$	$u'e^u$	e^u

Intégrales (chapitre 6)

– $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f ; relation de Chasles ; linéarité.

– **Intégration par parties :** $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b u\,v'$.

– **Valeur moyenne :** $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. **Inégalité de la moyenne :** si $m \leq f \leq M$ sur $[a,b]$ $(a<b)$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

– **Volume de révolution :** $V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$.

Logarithme et exponentielle (chapitres 7 et 8)

– $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln a^n = n\ln a$; $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$ $(a,b>0)$.

– $e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $(e^a)^n = e^{na}$; $e^{\ln x} = x$ $(x>0)$; $\ln e^x = x$.

– $a^x = e^{x\ln a}$ $(a>0)$.

Équations différentielles (chapitre 9)

– $y' = ay : y = Ce^{ax}$. $y' = ay + b$ $(a \neq 0) : y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.

– $y'' + \omega^2 y = 0 : y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$.

Trigonométrie

– $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$; $\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b$.

– $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$; $\sin 2a = 2\sin a\cos a$.

– $\cos^2 a = \frac{1+\cos}{2}$; $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$.

Nombres complexes (chapitre 10)

– $z\overline{z} = |z|^2$; $|zz'| = |z|\,|z'|$; $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'\ [2\pi]$; $\arg\frac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z'\ [2\pi]$.

– $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$; **Moivre :** $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$; **Euler :** $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

– $AB = |z_B - z_A|$; $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\ [2\pi]$.

– Racines n-ièmes de $re^{i\theta}$: $\sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Transformations du plan (chapitres 11 et 12)

Transformation	Écriture complexe
Translation de vecteur d'affixe b	$z' = z + b$
Rotation de centre $\Omega(\omega)$, d'angle θ	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$
Homothétie de centre $\Omega(\omega)$, de rapport k	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Similitude directe de centre Ω, rapport k, angle θ	$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$
Antidéplacement / similitude indirecte	$z' = a\overline{z} + b$ $(\lvert a\rvert = 1 \,/\, \lvert a\rvert \neq 1)$

Coniques (chapitre 13)

Conique	Équation réduite	Foyers	Directrices	Excentricité
Parabole	$y^2 = 2px$	$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$x = -\frac{p}{2}$	1
Ellipse ($a > b$)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, c^2 = a^2 - b^2$	$(\pm c, 0)$	$x = \pm\frac{a^2}{c}$	$\frac{c}{a} < 1$
Hyperbole	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, c^2 = a^2 + b^2$	$(\pm c, 0)$	$x = \pm\frac{a^2}{c}$	$\frac{c}{a} > 1$

Arithmétique (chapitre 14)

– **Bézout :** $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = 1$. **Gauss :** $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1 \Rightarrow a \mid c$.

– **Fermat :** p premier, $p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1\ [p]$. $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$.

Géométrie dans l'espace (chapitre 15)

– $\vec{u} \wedge \vec{v} = (bc' - cb' ;\ ca' - ac' ;\ ab' - ba')$; aire du triangle ABC : $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$; volume du tétraèdre $ABCD$: $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD}\right|$.

– $d(M, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$; $d(M, \Delta) = \frac{\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$.

Probabilités (chapitre 16)

– $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$; $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$; $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

– Probabilités totales : $p(A) = \sum p(B_i)\, p(A/B_i)$.

– $E(X) = \sum x_i p_i$; $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$; loi binomiale : $p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$, $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$.

– Loi exponentielle de paramètre λ : $P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda}$; $P(X \geq t) = e^{-\lambda t}$.

Statistiques (chapitre 17)

– $\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}$; $r = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$.

– Droite de régression de y en x : $y = ax + b$ avec $a = \frac{\text{cov}(x,y)}{V(x)}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

Mathématiques — Bac section Mathématiques

Ce livre accompagne l'élève de 4e année, section Mathématiques, tout au long de l'année et jusqu'à l'examen du baccalauréat. Il couvre l'intégralité du programme officiel tunisien, dans l'ordre des manuels : l'analyse, puis la géométrie, l'arithmétique, les probabilités et les statistiques.

Dans chacun des 17 chapitres :

- un cours complet et conforme aux manuels, organisé en encadrés (définitions, théorèmes, méthodes, mises en garde) ;
- des exercices progressifs, des problèmes de synthèse et des exercices « type bac » ;
- des corrigés entièrement rédigés, tels qu'on les attend le jour de l'examen ;
- de nombreuses figures pour comprendre et pour vérifier.

En fin d'ouvrage, un formulaire rassemble les résultats à connaître par cœur.

17 chapitres · 306 exercices corrigés · plus de 100 figures

Ali AKIR

Collection Atomath — Deuxième édition